Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ

ЧИСТИЙ ЗГИН ПОЛОСИ (БАЛКИ), ОСЛАБЛЕНОЇ ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ З ВПАЯНИМ В ЦЕЙ ОТВІР ЕЛІПТИЧНИМ КІЛЬЦЕМ АБО ШАЙБОЮ

§ 1. ЗГИН ПОЛОСИ З ВПАЯНИМ КІЛЬЦЕМ

Припустимо, що в еліптичний отвір пружної ізотропної полоси (балки) вставлено пружне, ізотропне, але з іншого матеріалу еліптичне кільце. Кільце обмежене двома конфокальними еліпсами L_1 і L_2, причому розміри зовнішнього еліпса L_1 однакові з розмірами еліптичного отвору полоси, так, що еліпс L_1 є границею двох областей кільця і балки.

Після того, як кільце вставлене, його спаюють з оточуючим матеріалом балки, а потім балка піддається чистому згину з моментом M.

Визначимо пружну рівновагу балки. Помістимо початок координат в центрі еліптичного отвору балки, або в центрі еліптичного кільця. Будемо вважати для простоти, що великі півосі еліпсів L_1 і L_2 лежать на осі балки (див. рис. 1), по якій направимо і вісь x. Розв'язання в загальному випадку буде складніше в обчисленнях.

Граничні умови будуть слідуючі:

1. Контур L_2 вільний від діяння зовнішніх сил, отже на L_2

$$X_n - iY_n = o.$$

2. Вздовж контура L_1 кільце припаяне до пластинки, отже на L_1

$$X_n = X_{1n}, \quad Y_n = Y_{1n}, \quad u = u_1, \quad v = v_1$$

або

$$X_n - iY_n = X_{1n} - iY_{1n}, \quad u - iv = u_1 - iv_1.$$

3. На лініях $y = \pm l$, які обмежують полосу, $X_n - iY_n = o$.

4. На лініях $x = \pm c$, паралельних осі oy, нехай діють нормальні зусилля $X_x = -Ay$. Ці зусилля еквівалентні статично парі, момент якої

$$M=2h\int_{-l}^{+l}Ay^2\,dy=\frac{4}{3}Ahl^3, \qquad (1,1)$$

де $2h$ — товщина пластини.

Тут індексом „1“ позначені переміщення і напруження, які відносяться до області кільця, а без індекса — ті ж величини, що відносяться до області, зайнятої балкою.

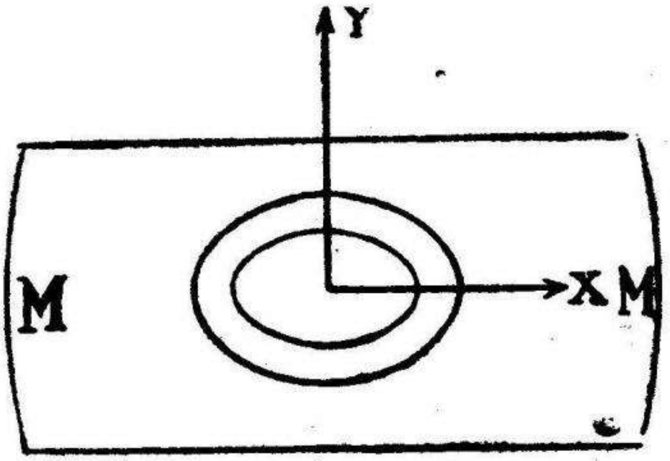

Рис. 1.

Далі будемо відмічати значком „1“ всі елементи (пружні константи, компоненти напружень і інш.), які відносяться до області кільця, а без індекса „1“ — ті ж елементи, які, однак, відносяться до області полоси (балки).

Ми будемо розв'язувати поставлену задачу наближено, беручи до уваги тільки умови 1 і 2. Відносно ж умов 3 і 4 ми будемо дбати тільки про те, щоб досліджувана пружна рівновага на великій віддалі від кільця наближалась до пружного стану суцільної полоси. Цей пружний стан, як відомо, характеризується функціями:

$$\varphi(z)=\frac{Aiz^2}{8},\quad \psi(z)=-\frac{Aiz^2}{8}.\,*$$

Таким чином, ми будемо розв'язувати задачу так, неначе б еліптичне кільце було впаяне в необмежену пластинку. При цьому припущенні функції, які характеризують пружний стан пластинки, будуть мати вигляд

$$\varphi^0(z)=\frac{Aiz^2}{8}+\varphi_2{}^0(z),$$

$$\psi^0(z)=-\frac{Aiz^2}{8}+\psi_2{}^0(z), \qquad (1,2)$$

де $\varphi_2{}^0(z)$ і $\psi_2{}^0(z)$ — функції голоморфні поза еліптичним кільцем, включаючи безконечно віддалену точку.

* Мусхелишвили Н. И. „Некоторые задачи математической теории упругости“, изд. 1935, стр. 280—281.

Якщо позначити через $\varphi^0_1(z)$ і $\psi^0_1(z)$ функції, які характеризують пружний стан кільця, то умови 1 і 2 будуть рівнозначні слідуючим:

$$\overline{\varphi_0(z)} + \bar{z}\varphi^{0\prime}(z) + \psi^0(z) = \overline{\varphi_1^0(\bar{z})} + \bar{z}\varphi_1^{0\prime}(z) + \psi_1^0(z), \qquad (1,3)$$

$$\frac{1}{\mu}\left\{x\overline{\varphi^0(\bar{z})} - \bar{z}\varphi^0_1{}'(z) - \psi^0(z)\right\} = \frac{1}{\mu_1}\left\{x_1\overline{\varphi^0_1(\bar{z})} - \bar{z}\varphi^0_1{}'(z) - \psi^0_1(z)\right\}, \qquad (1,4)$$

де z — точка на L_1 і

$$\overline{\varphi^0_1(\bar{z})} + \bar{z}\varphi^0_1{}'(z) + \psi^0_1(z) = 0, \qquad (1,5)$$

де z — точка на L_2.

Відобразимо при допомозі функції $z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$ область пластинки і кільця на зовнішність круга радіуса $R_1 < 1$ так, щоб границя двох областей, тобто контур L_1, відобразилася на круг радіуса 1.

Це можна завжди зробити, підібравши відповідним способом R_1:

$$R_1 = \frac{(1 - K_1)\ (1 + K_2)}{(1 + K_1)\ (1 - K_2)}, \qquad (1,6)$$

де $K_1 = \frac{b_1}{a_1}$, а $K_2 = \frac{b_2}{a_2}$.

Величини a_1, a_2 означають відповідно півосі еліпсів, що обмежують кільце. Величина m при цьому буде рівна

$$m = \frac{1 - K_1}{1 + K_1} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}.$$

Так як еліпси L_1 і L_2 конфокальні, то між величинами a_1, a_2, K_1 і K_2 повинно бути відношення

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{1 - K_2^2}{1 - K_1^2}.$$

Після відображення граничні умови 1,3, 1,4, 1,5 заміняються

$$\overline{\varphi(\bar{\sigma})} + \frac{\overline{\omega(\bar{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{\varphi_1(\bar{\sigma})} + \frac{\overline{\omega(\bar{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi_1{}'(\sigma) + \psi_1(\sigma), \qquad (1,7)$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}(\sigma) - \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\omega(\bar{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)\right\} = \frac{\varkappa_1}{\mu}\overline{\varphi_1(\bar{\sigma})} - \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\overline{\omega(\bar{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi_1{}'(\sigma) + \psi_1(\sigma)\right\}, \qquad (1,8)$$

де σ_1 — точка одиничного круга і $\sigma = e^{i\vartheta}$.

$$\overline{\varphi}_1(\overline{\sigma}_1) + \frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_1)}{\omega'(\sigma_1)}\varphi_1'(\sigma_1) + \psi_1(\sigma_1) = 0, \qquad (1,9)$$

де σ_1 — точка на кругу радіуса R_1 і $\sigma_1 = R_1\,\sigma$.

Тут введено позначення: $\varphi^0(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$ $\varphi_1^0(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta)$, $\psi_0(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$, $\psi_1^0(\omega(\zeta)) = \psi_1(\zeta)$, функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, згідно з формулою (1,1), можуть бути представлені

$$\varphi(\zeta) = \frac{AiR^2}{8}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2 + \varphi_0(\zeta); \qquad \varphi_0 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \zeta^{-v};$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{AiR^2}{8}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2 + \psi_0(\zeta), \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v \zeta^{-v} \qquad (1,10)$$

для достатньо великих ζ.

Щождо функцій $\varphi_1(\zeta)$ і $\psi_1(\zeta)$, то вони голоморфні в кільці $(R_1, 1)$ і кожна з них може бути представлена як сума 2-х функцій. Одна з них голоморфна всередині і на колі круга радіуса 1, а друга – голоморфна зовні і на колі круга радіуса $R_1 < 1$, включаючи і безмежно віддалену точку.

$$\varphi_1(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta),$$

де
$$P_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \zeta^v, \quad Q_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} d_v \zeta^v,$$

а
$$P_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} e_v \zeta^{-v}, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v \zeta^{-v}. \qquad (1,11)$$

Підставимо значення функцій $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ із (1,10) і (1,11), а також значення відображуючої функції $\omega(\zeta)$ в (1,7), (1,8) і (1,9) і після очевидних перетворень одержимо

$$\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2 - m}\varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) - \frac{AiR^2}{\gamma}(1-m^2)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= \overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2 - m}P_1'(\sigma) + Q_1(\sigma) + \overline{P}^2\left(\frac{1}{\sigma}\right) +$$

$$+ \frac{(1+m\sigma^2)}{\sigma^2 - m}P_2'(\sigma) + Q_2(\sigma). \qquad (1,12)$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\varphi_0{}'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{AiR^2}{\gamma}\left(\frac{1}{\sigma}+m\sigma\right)^2+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{\gamma}\left\{\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)^2-2\left(\frac{1}{\sigma}+m\sigma\right)\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)\right\}=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2+m}P_1{}'(\sigma)+Q_1(\sigma)\right\}+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2+m}P_2{}'(\sigma)+Q_2(\sigma)\right\}. \tag{1,13}$$

$$\overline{P}_1(\overline{\sigma}_1)+\frac{\overline{\sigma}_1+\dfrac{m}{\overline{\sigma}_1}}{1-\dfrac{m}{\overline{\sigma}_1{}^2}}P_1{}'(\sigma_1)+Q_1(\sigma_1)+P_2(\sigma_1)+$$
$$+\frac{\sigma_1+\dfrac{m}{\overline{\sigma}_1}}{1-\dfrac{m}{\overline{\sigma}_1{}^2}}P_2{}'(\sigma_1)+Q_2(\sigma_1)=0, \tag{1,14}$$

але $\sigma_1=R_1\sigma$; $\overline{\sigma}_1=\dfrac{R_1}{\sigma}$;

в кінці одержуємо умову на внутрішньому контурі кільця

$$\overline{P}_1\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+\frac{R_1\sigma(R_1{}^2+m\sigma^2)}{R_1{}^2\sigma^2-m}P_1{}'(R_1\sigma)+Q_1(R_1\sigma)+\overline{P}_2\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+$$
$$+\frac{R_1\sigma(R_1{}^2+m\sigma^2)}{R_1{}^2\sigma^2-m}P_2{}'(R_1\sigma)+Q_2(R_1\sigma)=0. \tag{1,15}$$

Візьмемо умови (1,12) і (1,13), помножимо їх кожну зокрема на $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{db}{\sigma-\zeta}$ і проінтегруємо по одиночному колі спершу кола $(\zeta)>1$, а потім кола $(\zeta)<1$. Тоді із умов (1,12) і (1,13) ми одержимо слідуючі чотири співвідношення:

$$-\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}\varphi_0{}'(\zeta)-\psi_0(\zeta)+\frac{(1-m)^2}{8}AiR^2\frac{1}{\zeta^2}=$$
$$=-P_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{(1+m^2)}{2}\left\{\frac{P_1{}'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}}+\frac{P_1{}'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\}-$$
$$-\left\{\frac{(1+m\zeta^3)\zeta}{\zeta^2-m}P_2{}'(\zeta)+Q_2(\zeta)\right\}-b_0+\overline{c}_0, \tag{1,16}$$

де b_0 — коефіцієнт функції $\psi_0(\zeta)$ при її розвиненні в ряд довкола безконечно віддаленої точки.

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{(1-m^2)}{8} AiR^2(\zeta^2-2) + b_0 = \bar{c}_0 + \frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m} P_1'(\zeta) -$$

$$-\frac{1+m^2}{2}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + Q_1(\zeta) + \bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right). \qquad (1,17)$$

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta) + \psi_0(\zeta)\right\} - \frac{1}{\mu} b_0 + \frac{\varkappa}{\mu}\frac{AiR^2}{8}\frac{1}{\zeta^2} -$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{8}\frac{m(m-2)}{\zeta^2} = -\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1+m^2}{2}\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} +\right.$$

$$\left.+\frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}P_2'(\zeta) + Q_2(\zeta) + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}C_0\right. . \qquad (1,18)$$

$$\frac{x}{\mu}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\varsigma}\right) - \frac{1}{\mu} b_0 - \frac{x}{\mu}\frac{AiR^2}{8}(m^2\zeta^2) + \frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{8}(1-2m)\zeta^2 +$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\frac{1}{\mu}\left[(1-x)m-(1+m^2)\right] = \frac{\varkappa_1}{\mu_1}c_0 - \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}P_1'(\zeta) +\right.$$

$$\left.+Q_1(\zeta)\right\} + \frac{1}{\mu_1}\frac{1+m^2}{2}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right). \qquad (1,19)$$

Якщо до одержаних співвідношень приєднати вирази

$$b_0 + \frac{(1-m)^2}{4} AiR^2 = \bar{c}_0 + d_0,$$

$$\frac{1}{\mu} b_0 + \frac{AiR^2}{4}\frac{(\varkappa-1)m + (1+m^2)}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} d_0 - \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{c}_0, \qquad (1,20)$$

які одержуємо із (1,12) і (1,13) через помноження цих співвідношень кожного зокрема на $\frac{1}{2\pi i}\frac{db}{\sigma}$ і інтегрування по одиночному колі, то тоді вирази (1,16), (1,17), (1,18), (1,19) разом з (1,20) на основі теореми Харнака будуть еквівалентні граничним умовам (1,12) і (1,13), з яких ми вийшли.

Візьмемо значення одержаних виразів на одиночному колі і розв'яжемо їх відносно функцій P_1, Q_1, P_2 і Q_2. Для цього помножимо (1,16) на $\frac{1}{\mu_1}$ і додамо до (1,18).

$$\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\,\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1 m(m-2)+x\mu_1}{\mu(x_1+1)}\,\frac{1}{\sigma^2}+\bar{c}_0-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}\,b_0.$$

Визначаючи $c_0-\dfrac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}$ із (1,20) і переходячи до спряжених значень, одержимо вираз для функції P_1

$$P_1(\sigma)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\,\overline{\varphi}_0'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\overline{\psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\}+$$

$$+\frac{AiR^2}{8}\,\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1 m(m-2)+\varkappa\mu_1}{\mu(x_1+1)}\,\sigma^2-$$

$$-\frac{AiR^2}{4}\,\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1(\varkappa_1-1)m-\mu_1(1+m^2)}{\mu(\varkappa_1+1)}.$$

Помножуючи (1,17) на $\dfrac{1}{\mu_1}$ і додаючи до нього (1,19), найдемо для функції $P_2(\sigma)$ вираз

$$P_2(\sigma)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu\varkappa_1+1}\,\varphi_0(\sigma)-\frac{AiR^2}{8}\,\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m)^2-x\mu_1 m^2}{\mu(x_1+1)}\,\frac{1}{\sigma}. \tag{1,22}$$

Помножимо тепер вираз (1,16) на $\dfrac{x_1}{\mu_1}$ і віднімемо від нього рівняння (1,18); ми одержимо функцію $Q_2(\sigma)$ при значенні

$$P_1'(\sqrt{m})=-P_1'(-\sqrt{m})=-\frac{AiR_2}{4m\sqrt{m}}\,\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m^3)-\varkappa\mu_1 m^2}{\mu(\varkappa_1+1)}; \tag{1,23}$$

$$Q_2(\sigma)=\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\,\varphi_0'(\sigma)+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\psi_0(\sigma)+$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\left\{\frac{x\mu_1-\mu\varkappa_1(1-m)^2-\mu m(m-2)}{2\mu(\varkappa_1+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m)^2-\varkappa\mu_1 m^2}{\mu(\varkappa_1+1)m}\right\}\frac{1}{\sigma^2}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,b_0. \tag{1,24}$$

І, нарешті, помножуючи (1,17) на $\dfrac{x_1}{\mu_1}$ і віднімаючи від нього (1,19), ми найдемо вираз для функції $Q_1(\sigma)$ при тому ж значенні $P_1'(\sqrt{m})$:

$$Q_1(\sigma) = \frac{\varkappa_1 \mu - \varkappa \mu_1}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) +$$

$$\frac{AiR^2}{8} \frac{\varkappa \mu_1 m^2 - \mu_1(1-2m) - \varkappa_1 \mu(1-m)^2}{\mu(\varkappa_1+1)} \sigma^2 - \frac{(1+m\sigma)\sigma}{\sigma^2 - m} P_1'(\sigma) -$$

$$- \frac{1+m^2}{m} \frac{AiR^2}{4} \frac{(1-2m)\mu_1 - \mu(1-m)^2 - \varkappa \mu_1 m^2}{\mu(x_1+1)(\sigma^2 - m)} +$$

$$+ \frac{AiR^2}{4} \frac{(1-m^2)\varkappa_1 \mu + \mu_1(\varkappa - 1)m + (1+m^2)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} + \frac{\varkappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} b_0. \quad (1,25)$$

Одержаними значеннями функцій P_1, P_2, Q_1 і Q_2 поставлена задача звелася до першої основної задачі теорії пружності. Помножимо тепер умову (1,15) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \eta}$ і проінтегруємо по одиночному кола колі $|\eta| > 1$.

Тоді ця умова буде рівноважна слідуючій:

$$\bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + Q_2(R_1\eta) + \frac{R_1\eta(R_1^2 - m\eta^2)}{R_1^2\eta^2 - m} P_2'(R_1\eta) - \bar{c}_0 +$$

$$+ \frac{R_1^4 + m^3}{2R_1^3}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{R_1\eta - \sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{R_1\eta + \sqrt{m}}\right\} = 0. \quad (1,26)$$

Підставляючи в (1,26) значення входячих функцій, значення $P_1'(\sqrt{m}) = -P_1'(-\sqrt{m})$ із (1,23), а також значення $\bar{c}_0$, визначене із (1,20), одержимо

$$\frac{(\varkappa_1 - 1)\mu - (\varkappa - 1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1 + 1)} \frac{(1 + mR_1^2\eta^2)R_1\eta}{R_1^2\eta^2 - m} \varphi_0'(R_1\eta) +$$

$$+ \frac{x\mu_1 + \mu}{\mu(x_1+1)} \frac{R_1\eta(R_1^2 + m\eta^2)}{R_1^2\eta^2 - m} \varphi_0'(R_1\eta) +$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} \frac{(R_1^2 + m\eta^2)\eta}{R_1(\eta^2 - mR_1^2)} \varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{\varkappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} \psi_0(R_1\eta) + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} \psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{AiR^2}{8} \frac{(m-2)m(\mu_1 R_1^4 - \mu) - \mu(1-m)^2(R_1^4 + x_1) - x\mu_1(R_1^4 - 1)}{\mu(x_1+1)} \frac{1}{R_1^2\eta^2} +$$

$$+ \frac{AiR^2}{4} \frac{(1-2m)\mu_1 - \mu(1-m)^2 - \varkappa\mu_1 m^2}{m\mu(\varkappa_1+1)} \frac{1 - R_1^2}{R_1^2\eta^2} - b_0 = 0. \quad (1,27)$$

Взявши тепер значення, спряжене умові (1,15), і зробивши те ж саме, що ми зробили з умовою (1,15), знайдемо ще одне співвідношення, яке разом з (1,26) дасть можливість послідовно визначити коефіцієнти функцій φ_0 і ψ_0, а за ними коефіцієнти введених нами функцій.

Ця потрібна нам умова буде слідуюча:

$$P_2(R_1\eta)+\overline{Q}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{R_1^4+m^2}{2R_1\sqrt{m}}\left\{\frac{\overline{P}_1'(\sqrt{m})}{\sqrt{m}\,\eta-R}+\frac{\overline{P}_1'(-\sqrt{m})}{\sqrt{m}\,\eta+R_1}\right\}-d_0-$$

$$-\frac{R_1(R_1^2\eta^2+m)}{\eta)m\eta^2-R_1^2)}\overline{P}_1'\left(\frac{R_1}{\eta}\right)=0. \qquad (1,28)$$

Підставляючи сюди значення функцій і значення $P_1'(\sqrt{m})$, і виконуючи очевидні перетворення, одержимо друге співвідношения, про яке говорили ми вище:

$$\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(R_1\eta)+\frac{\varkappa_1\mu-\mu_1\varkappa}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)-\frac{R_1(1-R_1^2)(m-\eta^2)}{\eta(R_1^2-m\eta^2)}\overline{P}_1'\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\,\frac{(1-2m)\mu_1+\mu(1-m^2)-\varkappa\mu_1m^2}{\mu(x_1+1)}\,\frac{m(1+m^2)\eta^2-(R_1^4+m^2)}{m^2(R_1^2-m\eta^2)}-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\,\frac{\varkappa\mu_1m^3(R_1^4-1)-(1-2m)(\mu_1R_1^4-\mu)-\mu(1-m)^2(\varkappa_1R_1^4+1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\frac{1}{R_1^2\eta^2}-$$

$$-\frac{AiR^2}{4}\,\frac{(1-m)^2\varkappa_1\mu+\mu_1(x-1)m+(1+m^2)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}-d_0+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0=0. \qquad (1,29)$$

При послідовному визначенні коефіцієнтів функцій із співвідношень (1,27) і (1,29) прийдеться кожний раз розв'язувати систему рівнянь з двома невідомими.

Якщо покласти $\mu=\mu_1$, $\varkappa=\varkappa_1$, тоді наша задача буде зводитись до наближеної розв'язки згину полоси з еліптичним отвором і із (1,27) і (1,29) одержуємо:

$$\psi_0(R_1\eta)+\frac{R_1\eta(R_1^2+m\eta^2)}{R_1^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{AiR^2}{\gamma}\,\frac{(R_1^2-m)^2}{R_1^2\eta^2}-b_0=0;$$

$$\varphi_0(R_1\eta)+\frac{AiR^2}{\gamma}\,\frac{(R_1^2-m)^2}{R_1^2\eta^2}+b_0+\frac{AiR^2}{4}m-d_0=0.$$

Але в даному випадку $d_0=b_0-\dfrac{AiR^2}{4}m$. Відкидаючи постійний складник в виразі для ψ_1, одержимо розв'язку, яка, як і треба було чекати, сходиться з розв'язкою Мусхелішвілі.

Так як $m = \frac{1 - K_1}{1 + K_1}$ не залежить від півосей внутрішнього еліпса, то, взявши K_1 близьким одиниці і зважаючи на умову конфокальності, рівності (1,27) і (1,29) дадуть наближений розв'язок задачі про згин полоси, коли в цю полосу впаяно з іншого матеріалу кільце, внутрішній контур якого еліпс, зовнішній — близький до кола.

Функції P_1, Q_1, P_2, Q_2 залежать від контурних умов на внутрішньому контурі кільця тільки через функції φ_0 і ψ_0. Внаслідок цього тими ж функціями може бути в деяких випадках розв'язана задача, коли внутрішній контур кільця не є вільний від діяння зовнішніх сил (наприклад, коли внутрішній контур кільця підлягає рівномірному тисненню).

Відзначимо, нарешті, що цим же методом може бути розв'язана задача про згин полоси із впаяним ізотропним кільцем з пружними константами, відмінними від пружних констант полоси, але з таким кільцем, область якого разом з всією рештою площини відобразилася б на круг при допомозі раціональної функції.

§ 2. ЧИСТИЙ ЗГИН ПОЛОСИ З ВПАЯНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ЯДРОМ

Цю задачу ми будемо розв'язувати так, як розв'язували задачу про згин полоси із впаяним кільцем, тобто так, начеб ядро було впаяне в необмежену пластинку.

При такій постановці немає необхідності визначати знову функції P_1, Q_1, P_2 і Q_2. Досить в формулах (1,21), (1,22) (1,24), (1,25) положити $m = R_1^2$.

Це рівнозначно відображенню всієї площини з розрізом вздовж відрізку AB, що сполучає фокуси впаяної шайби на зовнішність круга радіуса R_1, при тому границя еліптичної шайби перетворюється в коло радіуса 1.

На колі круга радіуса R_1 граничні умови будуть

$$\varphi_1(\sigma_1) = \varphi_1(\bar{\sigma}_1)$$

і

$$\psi(\sigma) = \psi_1(\bar{\sigma}_1), \tag{2,1}$$

тому, що σ_1 і $\bar{\sigma}_1$ відповідає одна і та ж точка відрізку AB. При виконанні цих умов функції φ_1^0 і ψ_1^0 будуть приймати одні і ті ж самі значення при наближенні z до розрізу з тої і з другої сторони і, отже, будуть аналітичними функціями в нерозрізному еліпсі.

Вносячи в (2,1) замість φ_1 і ψ_1 їх значення із (1,11) і приймаючи до уваги значення функцій із (1,21), (1,22), (1,24) і (1,25) при $m = R_1^2$ після спрощень одержимо дві умови для визначення коефіцієнтів функцій φ_0 і ψ_0, а за ними і коефіцієнтів всіх дальших введених функцій.

Ці умови будуть слідуючі:

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1(\sigma^2+1)}{\sigma(1-R^4\sigma^2)}\bar{\varphi}_0'\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{x\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{AiR^2}{8}\frac{(\mu-\mu_1)(1-R_1^2)(1-R_1^4)}{\mu R_1^2(\varkappa_1+1)}\sigma^2-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}b_0=0; \qquad (2,2)$$

і

$$\frac{\varkappa'\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{\sigma^2+R_1^4}{R_1(1-\sigma^3)\sigma}\varphi_0'\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+\frac{\sigma(1+R_1^4\sigma^2)}{R_1(1-\sigma^2)}P_1'(R_1\sigma)-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\frac{(1-2R_1^2)\mu_1-(1-R_1^2)^2\mu-\varkappa\mu_1R_1^4}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1-R_1^4+\sigma^2(\sigma^2-1)}{R_1^4(\sigma^2-1)}+$$

$$+\frac{AiR^2}{8}\frac{(R_1^4-1)\{\varkappa\mu_1(R_1^4+1)-\varkappa_1\mu(1-R_1^2)^2\}+}{\mu(\varkappa+1)}$$

$$\frac{+R_1^2\{(R_1^2-2)\mu-(1-2R_1^2)R_1\mu_1\}}{\mu(\varkappa+1)}+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0=0. \qquad (2,3)$$

Замінюючи кожний член виразів (2,2) і (2,3) відповідним рядом, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, ми послідовно визначимо коефіцієнти функцій φ_0 і ψ_0 за винятком коефіцієнта b_0, який можна припустити рівним нулю.

При цьому нам доведеться для кожної пари відповідних коефіцієнтів функцій φ_0 і ψ_0 розв'язувати систему рівнянь першої степені з двома невідомими.

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ С ВПАЯННЫМ В ЭТО ОТВЕРСТИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КОЛЬЦОМ

Резюме

В настоящей работе дано приближенное решение задачи об изгибе балки с эллиптическим отверстием и впаянным в это отверстие эллипти-

ческим кольцом, упругие постоянные которого отличны от упругих постоянных балки. При этом предполагается, что размеры отверстия малы по сравнению с шириной балки.

Полученные результаты решают также задачу об изгибе балки с впаянной в эллиптическое отверстие шайбой.

Решение задачи получается методом конформных отображений.