Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

О. С. КОВАНЬКО

ІНТЕГРАЛ СТІЛЬТЬЄСА ТА ТЕОРЕМА ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ

Використовуючи поняття та властивості інтегралу Стільтьєса, можна надзвичайно просто вивести формули середнього значення для означеного інтегралу, відомі під назвою першої та другої формули середнього значення.

Хай $\Phi(x)$ — неперервна, а $f(x)$ — монотонна функції на $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Ми знаємо з теорії інтегралу Стільтьєса, що тоді

$$\int_a^b \Phi(x)\, df(x) = \Phi(c)\, [f(b-o) - f(a+o)]. \tag{1}$$

Якщо $f(x) = \int_a^x \psi(t)\, dt$ (де $\psi(t)$ постійного знаку), тоді формулу (1) можна переписати, опираючись на абсолютну неперервність $f(x)$, в такому вигляді:

$$\int_a^b \Phi(x)\, \psi(x)\, dx = \Phi(c) \int_a^b \psi(x)\, dx \tag{2}$$

Це відома п е р ш а формула середнього значення.

Візьмемо тепер формулу інтегрування по частинам в теорії інтегралу Стільтьєса

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \left[f(x) \int_a^x \varphi(t)\, dt \right] - \int_a^b \left\{ \int_a^x \varphi(t)\, dt \right\} df(x)$$

або

$$\int_a^e f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(b-o) \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^e \left\{ \int_a^x \varphi(t)\, dt \right\} df(x). \tag{3}$$

Примінюючи до інтегралу лівої частини формулу (1), в якій ми поклали $\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, ми одержимо

$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt \right\} df(x) = \int\limits_a^c \varphi(x)\,dx\,[f(b-o) - f(a+o)]. \qquad (4)$$

Підставляючи значення інтегралу (4) в формулу (3), **одержимо**

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = f(b-o)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^c \varphi(x)dx\,[f(b-o) - f(a+o)] =$$

$$= f(b-o)\int\limits_a^c \varphi(x)dx + f(b-o)\int\limits_x^b \varphi(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx\,[f(b-o) - fa(+o)],$$

звідки остаточно

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+o)\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx + f(b-o)\int\limits_c^b \varphi(x)\,dx. \qquad (5)$$

Це відома д р у г а формула середнього значення.

А. С. КОВАНЬКО. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА И ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Резюме

В этой работе автор даёт исключительно простой способ **вывода** первой и второй теорем о среднем значении, используя теории интеграла Стильтьеса.
