Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

О. С. КОВАНЬКО

ПРО ІСНУВАННЯ ІНТЕГРУЮЧОГО МНОЖНИКА ДИФЕРЕНЦІАЛА ТРЬОХ ЗМІННИХ

В цій статті ми розглянемо відоме класичне питання інтегрувальності рівняння виду

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \tag{1}$$

одним співвідношенням або, що те саме, питання існування інтегруючого множника ϱ, що перетворює ліву частину (1) в новий диференціал.

Цю задачу будемо трактувати і розв'язувати методом векторного аналізу.

Розглядаючи A, B і C як проекції деякого вектору $\overline{R}$, ми можемо записати (1) в такому векторному виді:

$$R\, d\overline{r} = 0, \tag{1'}$$

де $\overline{r}$ — радіус-вектор або координатний вектор простору.

Задача тепер ставиться так:

Дано поле векторів $\overline{R}(x, y, z)$. Питається: при яких умовах існує такий скалярний множник $\varrho(x, y, z)$, що ϱ, $\overline{R}$ є градієнт деякої функції $U(x, y, z)$ тобто

$$\operatorname{grad} U = \varrho R. \tag{2}$$

Відповідь на цю задачу дається наступною теоремою:

Теорема: Необхідна та достатня умова існування рівності (2) (а, значить, і відповідних ϱ і U) полягає в тому, що

$$\overline{R} \operatorname{rot} \overline{R} = 0 \tag{3}$$

або інакше $\overline{R} \perp \operatorname{rot} R$.

Доведення:

1) Умова необхідна:

Нехай (2) має місце, тоді, беручи rot обох частин (3), дістанемо:

$$\text{rot}\,(\text{grad}\,U) = \varrho\,\text{rot}\,\overline{R} + (\text{grad}\,\varrho \times R).$$

Але $$\text{rot}\,(\text{grad}\,U) = 0.$$

Отже $$\varrho\,\text{rot}\,\overline{R} + \overline{R}\,(\text{grad}\,\varrho \times R) = 0. \tag{4}$$

Помножаючи (4) скалярно на $\overline{R}$, одержимо

$$\varrho\,(R\,\text{rot}\,\overline{R}) + \overline{R}\,(\text{grad}\,\varrho \times \overline{R}) = 0, \tag{5}$$

але $\overline{R}\,(\text{grad}\,\varrho \times \overline{R}) = 0$, оскільки мішаний добуток містить два **однакових множники**.

А звідси виникає, що

$$\overline{R}\,\text{rot}\,\overline{R} = 0, \tag{6}$$

що й треба довести.

2) Умова теореми достатня.

Отже, нехай (3) має місце.

Нехай ϱ_1 — довільний скаляр, тоді

$$\text{rot}\,(\overline{R}\,\varrho_1) = \varrho_1\,\text{rot}\,\overline{R} + (\text{grad}\,\varrho_1 \times R). \tag{7}$$

Помножаючи обидві частини (7) скалярно на $\overline{R}$, одержимо:

$$R\,\text{rot}\,(R\,\varrho_1) = \varrho_1\,(R\;\text{rot}\,\overline{R}) + \overline{R}\,(\text{grad}\,\varrho_1 \times \overline{R}).$$

Але тому, що обидва доданки правої частини рівні нулеві, то

$$\overline{R}\;\text{rot}\,(\overline{R}\,\varrho_1) = 0. \tag{8}$$

Оберемо ϱ_1, як інтегруючий множник виразу $R_x dx + R_y dy$,* причому z вважаємо постійним параметром. Такий множник завжди існує для диференціалів двох змінних.

Хай $V(x, y, z)$ є та функція (z входить як параметр), для якої

$$d\,V_{(x,\,y)} = \varrho\,R_x\,dx + \varrho\,R_y\,dy, \tag{9}$$

звідки

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varrho\,R_x\,;\ \frac{\partial V}{\partial y} = \varrho\,R_y\,; \tag{10}$$

* Rx, Ry, Rz — проекції R на осі координат.

тоді

$$\operatorname{rot}(R\,\varrho_1) = \left(\frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial y} - \frac{\partial(R_y\,\varrho_1)}{\partial z}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial(R_x\varrho_1)}{\partial z} - \frac{\partial(R_z\,\varrho_1)}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\underbrace{\frac{\partial(R_y\,\varrho_1)}{\partial x} - \frac{\partial(R_x\,\varrho_1)}{\partial y}}_{o}\right)\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial z} - \frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial x}\right)\bar{j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\bar{i} + \frac{\partial}{\partial x}\left[R_z\,\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\bar{j}\,,$$

звідси

$$\bar{R}.\operatorname{rot}(\bar{R}\,\varrho_1) = R_x\,\frac{\partial}{\partial y}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right] - R_y\,\frac{\partial}{\partial x}\left[R_z\,\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right] =$$

$$= \left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\varrho_1 R_z - \frac{\partial V}{\partial z}\right] - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\varrho_1 R_z - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\right\}\frac{1}{\varrho_1} =$$

$$= \frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{D\left[V, \left(R_z\,\varrho_1 - \dfrac{\partial V}{\partial z}\right)\right]}{D(x,\,y)} = o.$$

А тому з відомих властивостей якобіану $R_z\varrho_1 - \dfrac{\partial V}{\partial z} = \varphi(V,\,z)$, де φ — символ довільної функції (z входить під символ φ як параметр)

$$\bar{R}\,\varrho_1 = \varrho_1\,R_x\bar{i} + \varrho_1 R y\,\bar{j} + \varrho_1\,R_z\,\bar{k} = \frac{\partial V}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\bar{j} +$$

$$+\left[\frac{\partial V}{\partial z} + \varphi(V,\,z)\right]\bar{k} = \operatorname{grad} V + \varphi(V,\,z)\,k\,.$$

(Тут z входить як рівноправне з x та y змінне). Звідси:

$$\operatorname{rot}(\bar{R}\,\varrho_1) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} V) + \operatorname{rot}[\varphi(V,\,z)\cdot\bar{k}] =$$

$$= \operatorname{rot}[\varphi(V,\,z)\cdot\bar{k}] = \varphi(V,\,z)\,\underbrace{\operatorname{rot}\bar{k}}_{o} + [\operatorname{grad}\,\varphi\,(V,\,z \times \bar{k}] =$$

$$= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial V}\operatorname{grad} V + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\operatorname{grad} z\right]\times\bar{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial V}(\operatorname{grad} V\times\bar{k}) +$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\mathrm{grad}\, z\times\bar{k}) = \frac{\partial\varphi}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}[\bar{i}\times\bar{k}] + \frac{\partial V}{\partial y}[\bar{j}\times\bar{k}]\right) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial V}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{i}\right).$$

Отже

$$\mathrm{rot}\,(R\,\varrho_1) = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{i}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial V}. \qquad (11)$$

Візьмемо тепер деякий скаляр $\varrho_2 = \Phi(V, z)$ і розглянемо **величину**

$$\mathrm{rot}\,(\bar{R}\,\varrho_1\,\varrho_2);$$

$$\mathrm{rot}\,(R\,\varrho_1\,\varrho_2)\,\varrho_2\,\mathrm{rot}\,(\bar{R}\,\varrho_1) + (\mathrm{grad}\,\varrho_2\times R\,\varrho_1). \qquad (12)$$

Але

$$\mathrm{grad}\,\varrho_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\mathrm{grad}\,V + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\mathrm{grad}\,z =$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\mathrm{grad}\,V + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{k}.$$

Звідси $\mathrm{grad}\,\varrho_2\times R\varrho_1$ вираховується так:

Беремо значення $\mathrm{grad}\,\varrho_2$ і $\bar{R}\varrho_1$

$$\mathrm{grad}\,\varrho_2\times R\,\varrho_1 = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\mathrm{grad}\,V + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{k}\right]\times[\mathrm{grad}\,V + \varphi(V, z)\,\bar{k}] =$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial z}(k\times\mathrm{grad}\,V) + \frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\varphi(V, z)\cdot(\mathrm{grad}\,V\times\bar{k}) =$$

$$= \left[\frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\varphi(V, z) - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\cdot\left[\mathrm{grad}\,V\times\bar{k}\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\,\varphi(V, z) - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\cdot\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{i}\right).$$

Вставляючи одержане значення $(\mathrm{grad}\,\varrho_2\times\bar{R}\,\varrho_1)$, а також значення $\mathrm{rot}\,(\bar{R}\,\varrho_1)$ з формули (11) в формулу (12), знаходимо:

$$\mathrm{rot}\,(R\,\varrho_1\,\varrho_2) = \Phi(V, z)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{i}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial V} +$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\cdot\varphi(V, z) - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{i}\right] =$$

$$= \left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial V} + \frac{\partial\Phi}{\partial V}\varphi - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial y}i\right].$$

Виберемо Φ так, щоб

$$\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial V} + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial V} \varphi - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial V} = 0. \tag{13}$$

Ми прийшли до лінійного рівняння (13).

Розв'язавши його, знаходимо функцію $\Phi = \Phi\,(V,\ z)$, а тоді

$$\mathrm{Rot}\,(\overline{R}\,\varrho_1\,\varrho_2) = 0.$$

Поклавши $\varrho = \varrho_1\,\varrho_2$, ми бачимо, що ϱ являється шуканим множником, тому що, якщо

$$\mathrm{Rot}\,(R\,\varrho) = 0,$$

значить існує така функція $U(x,\ y,\ z)$, що $R\,\varrho = \mathrm{grad}\,U$.

Достатність умови доведена.

Отже, теорема доведена повністю.

А. С. КОВАНЬКО. О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме

В этой работе автор даёт необходимое и достаточное условие существования интегрирующего множителя для уравнения вида $Adx + Bdy + Cdr = 0$. Это условие даётся в векторной форме, а именно, в поле векторов R имеется такой скаляр ϱ, чтобы $\overline{R}\,\varrho$ был бы градиентом некоторой функции.

Это условие выражается так: $\overline{R} \perp \mathrm{rot}\,R$.
