Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

Г. М. САВІН О. С. ПАРАСЮК

ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ ДОВКОЛА КРУГОРОГО ОТВОРУ В ПЛОСКОМУ НЕРІВНОМІРНО НАПРУЖЕНОМУ ПОЛІ[1]

Пружний стан в нескінченній пластинці, ослабленій круговим отвором, яка розтягується на безконечності зусиллями

$$\sigma_x^\infty = p,$$
$$\sigma_y^\infty = 0 \quad \tau_{xy}^\infty = 0, \tag{1}$$

визначається, як відомо [7], формулами для компонентів напружень:

$$\sigma_\varrho = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right) + \frac{p}{2}\left(1 - \frac{4R^2}{\varrho^2} + \frac{3R^4}{\varrho^4}\right)\cos 2\Theta$$
$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{R^2}{\varrho^2}\right) - \frac{p}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{\varrho^4}\right)\cos 2\Theta \tag{2}$$
$$\tau_{\varrho\Theta} = -\frac{p}{2}\left(1 + \frac{2R^2}{\varrho^2} - \frac{3R^4}{\varrho^4}\right)\sin 2\Theta,$$

де ϱ, Θ — полярні координати, R — радіус отвору.

З цих формул видно, що при $\varrho = R$ маємо

$$\tau_{\max} = \sigma_{\theta\max} = 3p, \tag{3}$$

тобто максимальне напруження σ_θ дорівнює потроєному значенню розтягуючого зусилля.

Таким чином, ця задача дає теоретичну базу під давно відомий з практики факт, що коло отворів виникає концентрація напружень.

Інтуїтивно зовсім ясно, що коли концентрація досягне певної межі, що визначається якістю матеріалу, з якого зроблена пластинка, матеріал в області довкола отвору перестане бути пружним.

Якщо припустити, що матеріал в області довкола отвору буде вести себе, як ідеально пластичне тіло, то можна поставити таку так звану пружно-пластичну задачу для випадку плоскої деформації.

Розглянемо площину xoy з коловим отвором радіуса R з центром в початку координат, по контуру γ якого прикладені зусилля

$$\sigma_n = f_1(s)$$
$$\tau_{ns} = f_2(s), \tag{4}$$

[1] В цій статті ми даємо розгорнутий виклад результатів, раніше опублікованих в [1] [2] [3] [4] і [5].

Функції $U_1(x,y)$ і $U_2(x,y)$ є бігармонічні; отже, функція $U_3(x_1y) = U_2 - U_1$ також бігармонічна і, значить, її можна записати, за формулою Гурса, в такому виді:

$$U_3(x,y) = Re\,[\bar{z}\varphi_3^*(z) + \chi_3^*(z)], \tag{16}$$

де $\varphi_3^*(z)$ і $\chi_3^*(z)$ є функції голоморфні в області існування функції $U_3(x,y)$.

Покладемо:

$$\varphi_3^{*\prime}(z) = \Phi_3^*(z) \qquad \chi_3^{*\prime\prime}(z) = \psi_3^*(z). \tag{17}$$

Поставлена вище задача формулюватиметься в нових позначеннях таким способом.

Знайти дві голоморфні назовні контура L функції $\Phi_3^*(z)$ і $\psi_3^*(z)$ за такими умовами

$$Re\Phi_3^*(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } L \\ Re\Phi_2^*(z) - \dfrac{p}{2} - \dfrac{k}{2} - kln\dfrac{\varrho}{R} & \text{при } z \to \infty \end{cases} \tag{18}$$

$$[\bar{z}\Phi_3^{*\prime}(z) + \psi_3^*(z)] = \begin{cases} 0 & \text{на } L \\ [\bar{z}\Phi_3^{*\prime}(z) + \psi_2^*(z)] - ke^{-2i\Theta}, & \text{при } z \to \infty \end{cases} \tag{19}$$

де $\Theta = arg\,z$.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод Л. А. Галіна [6], тобто відобразимо область S_2 площини xoy зовнішню у відношенні до L, на зовнішність одиночного кола Γ площини $\zeta o \eta$ за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + g(\zeta), \tag{20}$$

де $g(\zeta)$ — функція голоморфна назовні Γ і $g(\infty) = 0$; c — довільна константа.

Введемо, нарешті, такі позначення:

$$\begin{aligned} \Phi_3^*(\omega(\zeta)) &= \Phi_3(\zeta) \\ \psi_3^*(\omega(\zeta)) &= \psi_3(\zeta). \end{aligned} \tag{21}$$

Тоді на основі (18) (19) будемо мати

$$Re[\Phi_3(\zeta)] = \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma \\ Rea_0 + Re\,[a_1 c\,\zeta + a_2 c^2\zeta^2 + \quad + a_n c^n \zeta^n] + \\ + klnR + \dfrac{p}{2} - \dfrac{k}{2} - kln|\zeta| - klnc & \text{при } \zeta \to \infty \end{cases} \tag{22}$$

$$\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\Phi_3'(\zeta) + \psi_3(\zeta)\right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma \\ \dfrac{1}{c}\bar{\zeta}\,\Phi_2^{*\prime}(c\zeta) + \psi_2^*(c\zeta) - ke^{-2i\theta_1}, & \text{при } \zeta \to \infty \end{cases} \tag{23}$$

де $\Theta_1 = arg\zeta$.

Покажемо, як із співвідношень (22), (23) можна, взагалі кажучи визначити функції $\Phi_3(\zeta)$, $\psi_3(\zeta)$, $\omega(\zeta)$.

Зауважимо, що найважливіше знайти функцію $\omega(\zeta)$, бо, знаючи її, ми будемо знати границю пластичної зони, тобто контур L.

Для визначення цих функцій з умов (22), (23) візьмемо константу „c" так, щоб

$$Rea_0 + k\ln R + \frac{p}{2} - \frac{k}{2} k\ln c = O,$$

тобто

$$c = Re^{\frac{1}{k}\left(Rea_0 - \frac{k+p}{2}\right)}$$

Умова (22) буде задовольнятися, якщо $\Phi_3(\zeta)$ взяти в такому виді:

$$\Phi_3(\zeta) = a_1 c\zeta - \overline{a}_1 c\frac{1}{\zeta} + a_2 c^2\zeta^2 - \overline{a}_2 c^2\frac{1}{\zeta^2} + \ldots + a_n c^n\zeta^n - \overline{a}_n c^n\frac{1}{\zeta^n} - k\ln\zeta. \quad (24)$$

Легко переконатися, що при $\zeta \to \infty$

$$\left[\frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta)\right] = c\overline{\zeta}\,\Phi_2^{*\prime}(c\zeta) - ke^{-2i\theta}, \quad (25)$$

тому на основі (23)

$$\psi_3(\zeta) = \psi_2^*(c\zeta) + M(\zeta),$$

де $M(\zeta)$ — функція регулярна назовні Γ і $M(\infty) = 0$.

Тепер, коли функція $\Phi_3(\zeta)$ відома повністю, і, крім того, відомий вид функції $\psi_3(\zeta)$, перша умова (23) перепишеться так:

$$[\overline{\omega}(\overline{\zeta})\,\Phi_3'(\zeta)]_\Gamma = -[\omega'(\zeta)\,\psi_3(\zeta)]_\Gamma \quad (26)$$

Це і є основне функціональне рівняння, за допомогою якого в кожному конкретному випадку будемо визначати функцію $z = \omega(\zeta)$.

При цьому ми будемо діяти таким способом:

Припускаючи можливість розкладу $\omega(\zeta)$ в ряд виду

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \quad + \frac{c_n}{\zeta^n} + \ldots, \quad (27)$$

будемо мати на основі (26)

$$\left[\left(c\frac{1}{\zeta} + \overline{c}_1\zeta + \overline{c}_2\zeta^2 + \qquad + \overline{c}_n\zeta^n\right)\Phi_3'(\zeta)\right]_\Gamma =$$

$$= -\left[c - c_1\frac{1}{\zeta^2} - c_2\frac{2}{\zeta^3} - c_3\frac{3}{\zeta^4} - \ldots\right][\psi_3(\zeta)]_\Gamma \quad (28)$$

Тому що $\Phi_3(\zeta)$ нам відома повністю, а функція $\psi_3(\zeta)$ відома з точністю до регулярної частини назовні Γ, то для визначення коефіцієнтів функції $\omega(\zeta)$ із співвідношень (28) досить порівняти коефіцієнти при додатніх степенях ζ. Тоді ми одержимо безконечну систему рівнянь, з якої треба буде визначити коефіцієнти функції $\omega(\zeta)$ так, щоб ряд (27) сходився всюди назовні Γ.

Вибираючи поліноми $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(z)$ (14) відповідного виду, одержимо розв'язання ряду практично важливих задач.

ЧИСТИЙ ЗГИН БАЛКИ[1]

У цьому випадку, як відомо, поліноми (14) мають вид

$$\Phi_2^*(z) = \frac{iM}{4I} z \qquad \psi_2^*(z) = -\frac{iM}{4I} z, \tag{29}$$

де M — величина згинаючого моменту;

I — момент інерції поперечного перерізу балки ширини 1 (рис. 1).

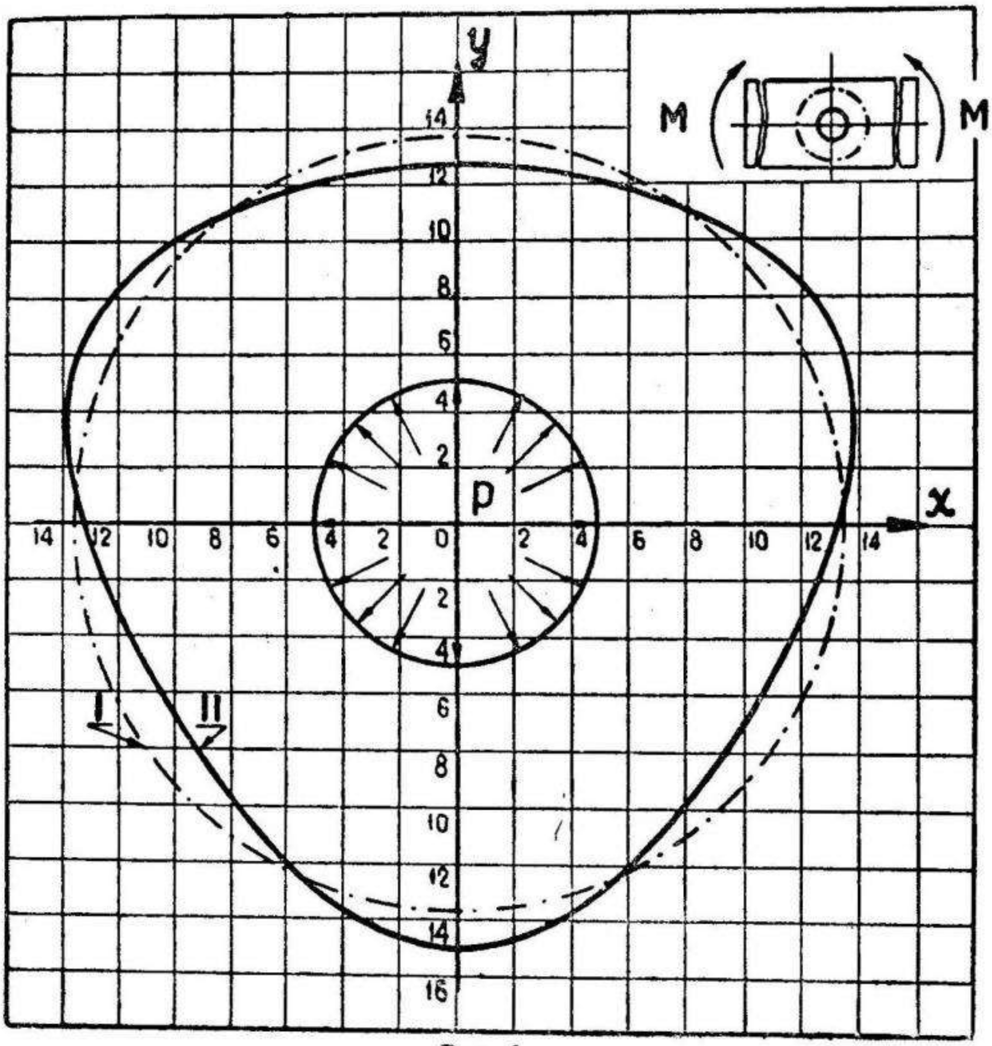

Рис. 1

На основі (24) будемо мати

$$\Phi_3(\zeta) = \frac{iM}{4I} c\zeta + \frac{iM}{4I} c \frac{1}{\zeta} - k \ln \zeta$$

$$\Phi_3'(\zeta) = \frac{iM}{4I} c - \frac{iM}{4I} \frac{c}{\zeta^2} - \frac{k}{\zeta} \tag{30}$$

$$\psi_3(\zeta) = -\frac{iM}{4I} c\zeta + M(\zeta),$$

[1] Цей випадок вперше був розглянутий Л. А. Галіним [6].

де $M(\zeta)$ — функція голоморфна назовні Γ і $M(\infty)=0$.

Основне співвідношення (26) матиме вид:

$$\left[\left(c\frac{1}{\zeta}+\bar{c}_1\zeta+\bar{c}_2\zeta^2+\quad+\bar{c}_n\zeta^n\right)\left(i\frac{Mc}{4I}-\frac{k}{\zeta}-\frac{iM}{4I}\frac{c}{\zeta^2}\right)\right]=$$

$$=\left\{\left(c-c_1\frac{1}{\zeta^2}-c_2\frac{2}{\zeta^3}-c_3\frac{3}{\zeta^4}-\dots\right)\left(i\frac{M}{4I}c\zeta-M(\zeta)\right)\right\}. \tag{31}$$

Введемо позначення

$$\alpha=\frac{iMc}{4I}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при додатніх степенях ζ, одержуємо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів c_k функції $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned} k\bar{c}_1+\alpha\bar{c}_2&=0\\ \alpha\bar{c}_1-kc^2-\alpha\bar{c}_3&=c\alpha\\ \alpha\bar{c}_2-k\bar{c}_3-\alpha\bar{c}_4&=0\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \alpha\bar{c}_n-k\bar{c}_{n+1}-\alpha\bar{c}_{n+2}&=0.\end{aligned} \tag{32}$$

Для розв'язання цієї системи зауважимо, що, починаючи з третього рівняння, ми маємо однорідне рівняння в скінченних різницях

$$\bar{c}_{n+2}+\frac{k}{\alpha}\bar{c}_{n+1}-\bar{c}_n=0, \tag{33}$$

загальне розв'язання якого має вид:

$$\bar{c}_n=Av_1^n+Bv_2^n,$$

де v_1, v_2 — корені характеристичного рівняння:

$$v^2+\frac{k}{\alpha}v-1=0$$

$$v_{1,2}=-\frac{k}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{k^2}{4\alpha^2}+1}.$$

Корінь v_2 по модулю більший від одиниці і тому його треба відкинути; тоді

$$\bar{c}_n=Av^n \qquad n\geqslant 2.$$

Тепер з перших двох рівнянь нашої системи визначимо $\bar{c}_1$ і A

$$\bar{c}_1=\frac{c\alpha^2}{\alpha^2+k^2+\alpha kv_1}$$

$$A=-\frac{c\alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{k}+k\right)v_1^2+\alpha v_1^3}.$$

Остаточно для $\omega(\zeta)$ одержуємо:

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{\overline{A}\,\overline{\nu}_1{}^3}{\zeta(\zeta - \overline{\nu}_1)}. \tag{34}$$

2. ЗГИН СМУГИ СТАЛОЮ ПЕРЕРІЗУЮЧОЮ СИЛОЮ Q.

Якщо поліноми $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(\zeta)$ (14) взяти у виді:

$$\Phi_2^*(z) = \frac{iQ}{8I} z^2 - iQ\frac{(l-a)}{4I} z$$
$$\psi_2^*(z) = -\frac{iQ}{4I} z^2 + \frac{iQ}{4I}(l-a)z - \frac{Qh^2}{2I} i, \tag{35}$$

то пружний стан на безконечності буде відповідати згину консолі сталою перерізуючою силою Q [8]:

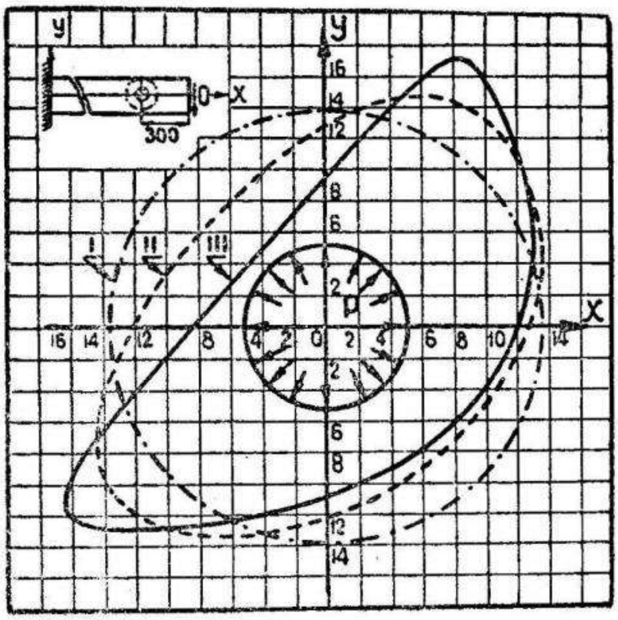

Рис. 2.

де Q — величина перерізуючої сили,
I — момент інерції поперечного перерізу смуги товщини одиниці.
Введемо позначення:

$$\alpha = \frac{iQh^2}{2I} \qquad \beta = -i\frac{Qc(l-a)}{4I} \qquad \gamma = \frac{iQc^2}{4I}.$$

Тоді система рівнянь, одержана з (28), матиме вид

$$c\gamma - k\overline{c}_1 - \beta\overline{c}_2 - \gamma\overline{c}_3 = \alpha c - c_1\gamma$$
$$\beta\overline{c}_1 - k\overline{c}_2 - \beta\overline{c}_3 - \gamma\overline{c}_4 = \beta c \tag{36}$$

$$\gamma\bar{c}_1+\beta\bar{c}_2-k\bar{c}_3-\beta\bar{c}_4-\gamma\bar{c}_5=\gamma c$$
$$\gamma\bar{c}_2+\beta\bar{c}_3-k\bar{c}_4-\beta\bar{c}_5-\gamma\bar{c}_6=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma\bar{c}_n+\beta\bar{c}_{n+1}-k\bar{c}_{n+2}-\beta\bar{c}_{n+3}-\gamma\bar{c}_{n+4}=0$$

Для розв'язання цієї системи знову розглядаємо рівняння в скінченних різницях

$$\gamma\bar{c}_{n+4}+\beta\bar{c}_{n+3}+k\bar{c}_{n+2}-\beta\bar{c}_{n+1}-\gamma\bar{c}_n=0. \tag{37}$$

Загальне розв'язання цього рівняння має вигляд

$$\bar{c}_n=K_1\nu_1^n+K_2\nu_2^n+K_3\nu_3^n+K_4\nu_4^n,$$

де $K_i\,(i=1,2,3,4)$ — довільні константи,
а $\nu_i\,(i=1,2,3,4)$ — корені характеристичного рівняння

$$\gamma\nu^4+\beta\nu^3+k\nu^2-\beta\nu-\gamma=0. \tag{38}$$

Покажемо, що при відповідних обмеженнях, накладених на коефіцієнти рівняння (38), воно матиме корені, що задовольняють такі умови

$$|\nu_1|<1 \qquad |\nu_2|<1$$
$$|\nu_3|>1 \qquad |\nu_4|>1.$$

Дійсно, запишемо рівняння (38) у виді:

$$\nu^4+\frac{\beta}{\gamma}\nu^3+\frac{k}{\gamma}\nu^2-\frac{\beta}{\gamma}\nu-1=0$$

або, поклавши $\frac{\beta}{\gamma}=a$, $\frac{k}{\gamma}=bi$, будемо мати:

$$\nu^4+a\nu^3+bi\nu^2-a\nu-1=0.$$

Напишемо тепер розклад

$$\nu^4+a\nu^3+bi\nu^2-a\nu-1=(\nu^2+p\nu+q)(\nu^2+p_1\nu+q_1).$$

Після легких обчислень одержимо таке рівняння для q:

$$\left(q-\frac{1}{q}\right)\left(q^2+2+\frac{1}{q}\right)-a^2\left(q-\frac{1}{q}\right)=bi\left(q^2+\frac{1}{q^2}+2\right).$$

Поклавши

$$yi=q-\frac{1}{q},$$

одержимо

$$-y^3+by^2+(4-a^2)y-4b=0. \tag{39}$$

Позначимо через y_0 дійсний корень рівняння (39), тоді легко знайти, що

$$\nu_{1,2} = \frac{-a\left(1+\frac{y_0}{2}i+\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)}{4\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{a^2\left(1+y_0\frac{i}{2}+\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)^2}{16\left(1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2\right)}-\frac{y_0}{2}i-\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}},$$

$$\nu_{3,4} = \frac{a\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}+\frac{y_0}{2}i\right)}{4\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{a^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}+\frac{y_0}{2}i\right)^2}{16\left(1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2\right)}-\frac{y_0}{2}i+\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}}.$$

Тому що, підбираючи коефіцієнти в (39), можемо зробити y_0 досить великим по модулю, то легко бачити, що $\nu_{1,2}$ попаде в середину, а $\nu_{3,4}$ — назовні одиничного кола.

Покладаючи $K_3 = K_4 = 0$ (бо інакше ряд для $\omega(\zeta)$ був би розбіжний), будемо мати

$$\begin{aligned}\bar{c}_2 &= K_1\nu_1^2 + K_2\nu_2^2\\ \bar{c}_n &= K_1\nu_1^n + K_2\nu_2^n.\end{aligned} \tag{40}$$

Підставляючи в друге і трете рівняння системи (36), одержуємо

$$K_1 = -\frac{\bar{c}_1 - c}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$K_2 = \frac{\bar{c}_1 - c}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Підставляючи в перше рівняння системи (36), знайдемо

$$c_1\gamma - \bar{c}_1[k+\beta(\nu_1+\nu_2)+\gamma(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)] =$$
$$= c\{\alpha-\gamma-[\beta(\nu_1+\nu_2)+\gamma(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)]\}.$$

Функція $z=\omega(\zeta)$ буде мати вид:

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{\overline{K_1}\bar{\nu}_1^2}{\zeta(\zeta-\bar{\nu}_1)} + \frac{\overline{K_2}\bar{\nu}_2^2}{\zeta(\zeta-\bar{\nu}_2)}, \tag{41}$$

Для порівняння наводимо деякі графіки і числові приклади.

1. Чистий згин (рис 1). Дано $\frac{M}{I}=28{,}8$, $R=5$ см, $2h=100$ см, $p=3k$. Функція $z=\omega(\zeta)$ буде

$$z=13{,}6\zeta-\frac{0{,}133}{\zeta}+\frac{1{,}357i}{\zeta(\zeta+0{,}100i)}.$$

2. Згин сталою перерізуючою силою (рис. 2.) Q.

$$l-a=300 \text{ см}, \quad 2h=100 \text{ см}, \quad p=3k,$$

при $Q=4000$ кг рівняння контура буде

$$x=13{,}56\cos\Theta+3{,}26\sin\Theta-\frac{0{,}16\alpha+0{,}68\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$y=13{,}64\sin\Theta+3{,}26\cos\Theta-\frac{0{,}68\alpha-0{,}16\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

де $\alpha=\cos 2\Theta+0{,}05\sin\Theta$,

$\beta=\sin 2\Theta-0{,}05\cos,\Theta$.

При $Q=6000$ кг

$$x=13{,}45\cos\Theta+5{,}23\sin\Theta-\frac{0{,}73\alpha+1{,}92\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$y=13{,}75\sin\Theta+5{,}23\cos\Theta-\frac{1{,}92\alpha-0{,}73\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

де $\alpha=\cos 2\Theta+0{,}14\sin\Theta$,

$\beta=\sin 2\Theta-0{,}14\cos\Theta$.

На рис. 1 і 2 крива I є круг радіуса $c_0=Re^{\frac{p-k}{2k}}$ і являє собою границю пластичної області навколо кругового отвору радіуса R, коли по контуру цього отвору прикладено тиск $p=3k$, при нулевому напруженому стані на безконечності.

Крива II на рис. 1 являє собою границю пластичної зони навколо отвору, по контуру якого прикладений тиск $p=3k$, при напруженому стані на безконечності, що відповідає чистому згину з моментом M. Криві II та III на рис. 2 є границі пластичної зони навколо кругового отвору, коли по контуру цього отвору діє тиск $p=3k$, а напруження на безконечності відповідні згину консолі (плоска деформація) із сталою перерізуючою силою Q. Для кривої II $Q=4000$ кг, а для кривої III $Q=6000$ кг.

Розглянемо тепер випадок, коли по контуру кругового отвору прикладені як нормальні, так і дотичні зусилля.

$$\sigma_\varrho=a$$

$$\tau_{\varrho\theta}=b, \tag{42}$$

а на безконечності

$$\sigma_x^\infty=A$$

$$\sigma_y^\infty=B. \tag{43}$$

Розв'язання рівнянь (7) при умовах (42) на контурі будуть

$$\sigma_\varrho^{(1)} = k\left[2lg(\sqrt{\varrho^2 - C} + \sqrt{\varrho^2 + C}) - \frac{\sqrt{\varrho^4 - C^2}}{\varrho^2}\right] + Dk$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = k\left[2lg(\sqrt{\varrho^2 - C} + \sqrt{\varrho^2 + C} + \frac{\sqrt{\varrho^4 - C^2}}{\varrho^2}\right] + Dk \qquad (44)$$

$$\tau_{\varrho\theta} = \frac{Ck}{\varrho^2}$$

де $C = \frac{bR^2}{k}$

$$D = \frac{a}{k} - \left[2lg(\sqrt{R^2 + C} + \sqrt{R^2 - C}) - \frac{\sqrt{R^4 - C^2}}{R^2}\right]$$

ϱ, Θ — полярні координати.

Перейдемо до компонент напружень в декартових координатах і запишемо їх в таких комбінаціях:

$$\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} = 2k\left[2lg(\sqrt{\varrho^2 - C} + \sqrt{\varrho^2 + C})\right] + 2Dk$$

$$\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2\tau_{xy}^{(1)}i = (\sigma_\theta - \sigma_\varrho + 2i\tau_{\varrho\theta})\, e^{-2i\theta} = \qquad (45)$$

$$= 2k\left[\frac{\sqrt{\varrho^4 - C^2}}{\varrho^2} + \frac{Ci}{\varrho^2}\right]e^{-2i\Theta}$$

Наша задача полягає в тому, щоб знайти контур L, дві функції $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(z)$ голоморфні назовні L, щоб задовольнялися такі співвідношення:

$$4Re\Phi_2^*(z) = 2k\left[2lg[\sqrt{\varrho^2 - C} + \sqrt{\varrho^2 + C}\right] + 2Dk \text{ на } L \qquad (46)$$

$$= A + B \quad \text{при } z \to \infty$$

$$2\left[\bar{z}\Phi_2^{*\prime}(z) + \psi_2^*(z)\right] = 2k\left[\frac{\sqrt{\varrho^4 - C^2}}{\varrho^2} + \frac{Ci}{\varrho^2}\right]e^{-2i\theta} \text{ на } L \qquad (47)$$

$$= B - A \quad \text{при } z \leftarrow \infty.$$

В такій постанозці знайти точне розв'язання було б досить важко і тому ми замінимо умову (47) наближеною:

$$2\left[\bar{z}\Phi_2^*(z) + \psi_2^*(z)\right] = 2ke^{-2i\theta} \text{ на } L. \qquad (47a)$$

Якщо $C = 0$, то умова (47a) є зовсім точна.

Для розв'язання цієї задачі відобразимо область зовнішню до контура L на область, зовнішню до одиничного кола Γ площини, за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \quad + \frac{c_n}{\zeta^n} \qquad (48)$$

і покладемо

$$\Phi_2^*(\omega(\zeta)) = \Phi_2(\zeta) \qquad (49)$$

$$\psi_2^*(\omega(\zeta)) = \psi_2(\zeta).$$

Тоді співвідношення (46) (47а) дадуть

$$4Re\Phi_2(\zeta)=\begin{cases}2k\left[2lg\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega}(\overline{\zeta})-C}+\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}+C}\right]+2Dk \text{ — на } \Gamma\\ A+B \text{ при } z\to\infty\end{cases} \tag{50}$$

$$2\left[\frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)}\Phi_2'(\zeta)+\psi_2(\zeta)\right]=\begin{cases}2k\dfrac{\overline{\omega}(\overline{\zeta})}{\omega(\zeta)} & \text{на } \Gamma\\ B-A & \text{при } z\to\infty.\end{cases} \tag{51}$$

Функції $\Phi_2(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ будемо шукати в виді

$$\Phi_2(\zeta)=a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots$$
$$\psi_2(\zeta)=b_0+\frac{b_1}{\zeta}+\frac{b_2}{\zeta^2}+\cdots \tag{52}$$

Враховуючи, що на γ $\overline{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$, помножимо перше рівняння (51) на $\frac{1}{2\pi i}\ \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, де ζ — точка в середині кола Γ і проінтегруємо по Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\dfrac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\Phi_2'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\psi_2(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{k\dfrac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma. \tag{53}$$

На основі теореми Харнака [7] умова (53) еквівалентна умові (51). Простим підрахунком можна переконатися, що

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)}=\frac{\overline{c}\,\frac{1}{\sigma}+\overline{c}_1\sigma+\overline{c}_2\sigma^2}{c\sigma+\frac{c_1}{\sigma}+\frac{c_2}{\sigma^2}}=\frac{\overline{c}_1}{c}\sigma+\frac{\overline{c}_2}{c}+M(\sigma), \tag{54}$$

де $M(\sigma)$ функція голоморфна назовні Γ і $M(\infty)=0$.
Точно так само

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\Phi_2'(\sigma)=-\frac{\overline{c}_2}{c}a_1+N(\sigma),\ \text{де } N(\sigma) \tag{55}$$

голоморфна назовні Γ і $N(\infty)=0$.

Внаслідок (54), (55) із (53) одержуємо

$$-\frac{\overline{c}_2}{c}a_1+\frac{B-A}{2}=k\left[\frac{\overline{c}_2}{c}\zeta+\frac{\overline{c}_1}{c}\right], \tag{56}$$

якщо покласти, що

$$z=\omega(\sigma)=c\sigma+\frac{c_1}{\sigma}+\frac{c_2}{\sigma^2}, \tag{57}$$

Із (56) маємо $\bar{c}_2=0$, $\bar{c}_1=c_1=\frac{D-C}{2k}c=\beta c$,

де покладено $\beta=\frac{D-C}{2k}$.

Отже,

$$z=\omega(\zeta)=c\left(\zeta+\frac{\beta}{\zeta}\right). \tag{58}$$

Залишається визначити константу c так, щоб задовольнити першу умову (50). Легко бачити, що при достатньо малому C це завжди можна зробити.

Якщо $C=0$, то із (50) маємо

$$\Phi_2(\zeta)=klg\frac{c\left(\zeta+\frac{\beta}{\zeta}\right)}{R}+\frac{p}{2}+\frac{k}{2}-klg\zeta=$$

$$=klgc-klgR+klg\left(\zeta+\frac{\beta}{\zeta}\right)+\frac{p}{2}+\frac{k}{2}-klg\zeta. \tag{59}$$

Щоб задовольнити другу умову (50), треба взяти c так, щоб

$$A+B=4\left(klgc-klgR+\frac{p}{2}+\frac{k}{2}\right), \tag{60}$$

звідки

$$c=Rexp\left[\frac{B+A}{4k}-\frac{1}{2}-\frac{p}{2k}\right] \tag{61}$$

Дальше з першої умови (51)

$$\psi_2(\zeta)=k\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)}-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi_2'(\zeta)=k\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)}-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\left[k\frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)}-\frac{k}{\zeta}\right]=$$

$$=k\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\frac{1}{\zeta},$$

тобто ми одержуємо розв'язання Л. А. Галіна [6].

Дана таблиця ілюструє наведені розв'язання для $R=1$:

	Напруження на безконечності		Напруження по контуру отвору			
	$\sigma_x^\infty = A$	$\sigma_y^\infty = B$	$\tau_{\varrho\theta}$	σ_ϱ	c	$\beta = \frac{B-A}{2k}$
1	$-1{,}23769\ k$	$-0{,}57102\ k$	$0{,}5\ k$	$-4\ k$	3	$\frac{1}{3}$
2	$-1{,}23769\ k$	$-0{,}57102\ k$	0	$-4\ k$	2,8514	$\frac{1}{3}$
3	$1{,}4965\ k$	$1{,}8965\ k$	$0{,}5\ k$	0	1,5	0,2
4	$0{,}4965\ k$	$0{,}8965\ k$	$0{,}5\ k$	$-k$	1,5	0,2
5	$0{,}45299\ k$	$1{,}11965\ k$	$0{,}5\ k$	$-k$	1,5	$\frac{1}{3}$
6	$0{,}47759\ k$	$1{,}14425\ k$	0	$-k$	1,5	1/3

З цих прикладів видно, що величина пластичної зони збільшується від того, що по контуру отвору, крім нормальних, прикладені ще й дотичні зусилля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Бігармонічні розв'язання рівняння $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2$. Доповіді АН УРСР, № 3, 1947.

2. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Характеристики бігармонічного пластичного стану. Доповіді АН УРСР, № 4, 1947.

3. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Пружно-пластичні задачі з бігармонічним пластичним станом. Доповіді АН УРСР, № 4, 1947.

4. Г. М. Савін та О. С Парасюк. — Вплив нерівномірно напруженого поля на пластичну зону навколо отвору. Доповіді АН УРСР, № 3, 1948.

5. О. С. Парасюк. — Упруго-пластическая задача с небигармоническим состоянием. Доклады АН СССР, том LXIII, № 4, 1948.

6. Л. А. Галин. — Плоская упруго-пластическая задача. Прикл. мат. и мех. т. X, вып. 3, 1946.

7. Н. И. Мусхелишвили. — Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, стр. 158, 1935.

8. Г. Н. Савин. — Концентрация напряжений возле отверстий в неоднородно-напряженном плоском поле. Труды ДИСИ., вып. 20, 1937.

9. С. Г. Михлин. — Математическая теория пластичности — в книге „Некоторые новые вопросы механики сплошной среды", Из-во АН СССР, 1938.

Г. Н. САВИН и О. С. ПАРАСЮК. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ В НЕОДНОРОДНО НАПРЯЖЕННОМ ПЛОСКОМ ПОЛЕ

Резюме

В этой статье дано изложение результатов, опубликованных ранее в наших работах [1—5]. Принимая функцию напряжений в пластической области в виде (12), рассмотрен вопрос о влиянии неоднородно напряженного упругого поля на пластическую зону

возле отверстия для случая, когда напряжения этого неоднородно напряженного упругого поля заданы полиномами (14).

Для случая, когда полиномы (14) второй и первой степени, приведено подробное решение: характер влияния изгибающего момента M и перерезывающей силы Q на пластическую зону возле отверстия для некоторых частных случаев ясно виден из приведенных графиков на рисунках 1-м и 2-м. Кривая I на рис. 1-м и 2-м есть круг радиуса $R=ce^{\frac{p-k}{2k}}$ и представляет собою границу пластической области возле кругового отверстия радиуса R, когда к контуру этого отверстия приложено давление $p=3k$ при нулевом напряженном состоянии на бесконечности.

Кривые II и III на рисунках 1-м и 2-м представляют собой границы пластических зон возле отверстия при одновременном действии давления $p=3k$ по контуру кругового отверстия и напряженного состояния на бесконечности, соответствующего как чистому изгибу моментом M (рис. 1-й), так и изгибу консоли постоянной перерезывающей силой Q (рис. 2-й).

Далее дано решение задачи об определении пластической области возле кругового отверстия, по контуру которого действуют усилия (42), а на бесконечности (43). Как частный случай, получается при этом решение задачи Л. А. Галина [6].