Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

А. С. КОВАНЬКО

# О НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ И МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

## Введение

Вопрос о мероопределении поверхности весьма сложен и в последнее время является предметом многочисленных исследований со стороны многих ученых. Одно из определений меры поверхности принадлежит польскому математику Банаху[1], но, к сожалению, это определение не свободно от системы координат, так что сам Банах не смог доказать независимость этой меры от выбранной системы координат. Следуя примерно аналогичной идее, нам удалось несколько видоизменить определение меры поверхности по Банаху и дать такое определение, из свойств которого доказывается его инвариантность относительно операции преобразования координат.

Мы ограничиваем также класс функций $\varphi$, $\psi$, $\chi$, определяющих данную поверхность в параметрической форме:

$$[x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v)].$$

Некоторые, более частные, результаты по этому вопросу были получены нами в двух наших статьях („Интеграл Стильтьеса Риммана от функций двух переменных с двумя добавочными функциями", Изв. НИИММ, ТГУ, т. II, 1938 г. и „Интеграл Стильтьеса Лебега от функций двух переменных с двумя добавочными функциями", Ученые Записки Ивановского Пединститута, т. I, 1941 г.).

## § 1. ГОМЕОМОРФНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Пусть мы имеем в плоскости переменных $(u, v)$ некоторую односвязную область $\Omega$ и пару непрерывных функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ таких, что преобразование

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u, v) \\ y=\psi(u, v) \end{array}\right\} (T)$$

осуществляет гомеоморфное[2] преобразование $\Omega$ в область $S$ в плоскости переменных $(x, y)$. Предположим еще, что $T$ есть прямое соответствие, т. е. соответственные контуры в $S$ и $\Omega$ описываются в одном направлении (против или по часовой стрелке). Будем называть пару функций $\varphi$ и $\psi$ прямой гомеоморфной парой. Рассмотрим в $(u,v)$

[1] Fundamenta Math., t. VII.

[2] Взаимнооднозначное и взаимнонепрерывное.

бесконечно убывающую (несчетную) систему областей $\{\Omega'\}$, определяющих данную предельную точку и соответствующую им систему областей в $(x, y)$ $\{S'\}$. Она также определяет предельную точку, соответственную с первой. Пусть области $\{\Omega'\}$ все квадрируемы. Тогда среди областей $\{S'\}$ могут быть квадрируемые и неквадрируемые. Легко доказать, что множество неквадрируемых областей $\{S'\}$ самое большое счетное. Мы скажем, что такая область $\Omega'$, которой соответствует квадрируемая область $S'$, принадлежит к классу $K$.

Из сказанного следует, что любая точка области $\Omega$ может быть покрыта бесконечно убывающей последовательностью областей $\Omega_1 \supset \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \ldots\ldots\ldots\ldots$ класса $K$.

Пусть $E$ любое $B$ — множество в $\Omega$ и $\mathcal{E}$ — его образ в $S$. Как известно из теории гомеоморфного соответствия, $\mathcal{E}$ также некоторое $B$ множество и одного класса с $E$. Введем следующее обозначение:

$$[\varphi, \psi]_E = |\mathcal{E}|^{1)}.$$

Отсюда следует, что $[\varphi, \psi]_\Omega = |S|$.

В частности $[u, v]_E = |E|$.

Рассмотрим теперь два прямых гомеоморфных соответствия

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\} (T_1) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \varphi_2(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\} (T_2).$$

Составим третье непрерывное соответствие

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\} (T_3).$$

Легко проверить, что $(T_3)$ есть также гомеоморфное соответствие и что

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E. \tag{1}$$

Рассмотрим преобразование, обратное $T_1$. Обозначим его через $T_1^{-1}$, тогда преобразование $T_2T_1^{-1}$ переводит $S_1$ в $S_2$ и, будучи произведением двух прямых гомеоморфных преобразований, оно само является прямым и геоморфным преобразованием. Причем значения ординат $Y$ при этом преобразовании не меняются. Пусть точке $(x_1, y) \in S_1$ соответствует точка $(x_2, y) \in S_2$. Очевидно, $x_2 = f(x_1, y)$, где $f$ есть символ непрерывной возрастающей функции. Это легко усмотреть, если мы заставим точку в $S_1$ описывать против часовой стрелки прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Пусть $S_2$ есть область, в которую преобразовывается $\Omega$ через $T_3$.

Очевидно, что преобразование $T_3T_1^{-1}$ переводят точку $(x_1, y) \in S_1$ в точку $(x_1 + f(x_1, y)), \in S_3$ и так как $x_1 + f(x_1, y)$ есть возрастающая функция $x_1$, то отсюда легко заключить, что соответствие между $S_1$ и $S_3$ прямое и гомеоморфное.

Следовательно, соответствие $T_3$ также гомеоморфное. Покажем теперь справедливость (1).

---

1) $|E|$ означает меру $E$.

Предположим, что в качестве $E$ выбрана такая область, что ее образы через преобразования $T_1$, $T_2$ и $T_3$ будут $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{S}_3$, причем хотя бы одна из них, например $\widetilde{S}_1$, пересекается всякой прямой $\parallel ox$ по одному отрезку, концы которого суть $x_1'$ и $x_2'$. Легко видеть, что $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{S}_3$ обладают тем же свойством. Пусть соответствующие концы суть $x_1''$, $x_2''$ и $x_1'''$, $x_2'''$. Совершенно ясно, что $x_2'''-x_1'''=(x_2'-$ $-x_1')+(x_2''-x_1'')$. Интегрируя это равенство по всем значениям $y$, получим

$$|\widetilde{S}_3|=|\widetilde{S}_1|+|\widetilde{S}_2|.$$

Доказав такое соотношение, мы легко переходим к случаю любой области (путем сложения и вычитания областей) и вообще к любому открытому множеству. Используя метод дополнительных множеств, мы придем к справедливости (1) для замкнутого множества. Затем мы переходим к множествам $B$ типа $F_\sigma$, их дополнениям и т. д. Вообще, путем рекуренции мы доказываем его справедливость для любого $B$ множества.

Совершенно аналогично имеем:

$$[\varphi,\ \psi_1+\psi_2]_E=[\varphi,\ \psi_1]_E+[\varphi,\ \psi_2]_E, \tag{2}$$

где $(\varphi,\ \psi_1)$ и $(\varphi,\ \psi_2)$ гомеоморфные пары. Вообще мы можем высказать более общее предложение.

Теорема 1. Если $(\varphi_i,\ \psi_j)$ $\begin{pmatrix} i=1,2,\dots n \\ j=1,2,\dots m\end{pmatrix}$ прямые гомеоморфные пары, тогда $\left(\sum\limits_1^n\varphi_i,\ \sum\limits_1^m\psi_j\right)$ также гомеоморфная пара и $\left[\sum\limits_1^n\varphi_i,\ \sum\limits_1^m\psi_j\right]_E=$ $=\sum\limits_1^n\sum\limits_1^m[\varphi_i,\ \psi_j]_E$ где $E$ — любое, $B$ — множество $\subset\Omega$.

Теорема 2. Пусть $(\varphi_i,\ \psi_j)$, $\begin{pmatrix} i=1,2\dots \\ j=1,2\dots\end{pmatrix}$ прямые гомеоморфные пары. Тогда, если $\sum\limits_1^\infty\sum\limits_1^\infty[\varphi_i\ \psi_j]_\Omega$ сходятся, а также сходятся $\sum\limits_1^\infty\varphi_i$ и $\sum\limits_1^\infty\psi_j$, то пара $\left(\sum\limits_1^\infty\varphi_i,\ \sum\limits_1^\infty\psi_j\right)$ гомеоморфная и, кроме того, $\left[\sum\limits_1^\infty\varphi_i,\ \sum\limits_1^\infty\psi_j\right]_E=$ $=\sum\limits_1^\infty\sum\limits_1^\infty[\varphi_i,\ \psi_j]_E$, где $E$ — любое, $B$ — множество $\subset\Omega$.

Очевидны также следующие свойства символа $[\varphi,\ \psi]_E$:

$$(\alpha)\quad [a\varphi,\ b\psi]_E=ab[\varphi,\ \psi]_E,$$

где $a$ и $b$ — положительные постоянные числа.

$$(\beta)\quad [\varphi,\ \psi]_{E_1+E_2}=[\varphi,\ \psi]_{E_1}+[\varphi,\ \psi]_{E_2},$$

если $E_1E_2=0$.

Ясно, что если $(\varphi,\ \psi)$ прямая гомеоморфная пара, то $(-\varphi,\ \psi)$ или $(\varphi,\ -\psi)$ обратные гомеоморфные пары, также $(\psi,\ \varphi)$ обратная гомеоморфная пара.

Условимся писать $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$; тогда соотношение ($\alpha$) обобщается на любые постоянные $a$ и $b$. Рассмотрим теперь пару $(\varphi, \varphi)$; очевидно, что преобразование $\left.\begin{matrix} x=\varphi(u,v) \\ y=\varphi(u,v) \end{matrix}\right\}$ переводит $E$ в некоторое линейное множество, лежащее на прямой $y=x$. Следовательно, плоская мера этого множества равна 0. Поэтому мы условимся считать, что $[\varphi, \varphi]_E = 0$.

## § 2. ОГРАНИЧЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВ

Пусть нам даны две прямые гомеоморфные пары $(\varphi_1, \psi)$ и $(\varphi_2, \psi)$ на области $\Omega$. Тогда ясно, что $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$ вообще негомеоморфная пара, но мы для нее определим символ $[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E$ следующим образом:

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E. \tag{3}$$

Легко показать, что величина (2) зависит только от разности $(\varphi_1 - \varphi_2)$, но не от $\varphi_1$ и $\varphi_2$. В самом деле, предположим, что функцию $\varphi_1 - \varphi_2$ можно еще представить иным способом, как $\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2$, где $(\overline{\varphi}_1, \psi)$ и $(\overline{\varphi}_2, \psi)$ прямые гомеоморфные пары.

Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = \overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2$, откуда $\varphi_1 + \overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_1 + \varphi_2$; и тогда, согласно (2), имеем $[\varphi_1 + \overline{\varphi}_2, \psi]_E = [\overline{\varphi}_1 + \varphi_2, \psi]_E$, но $[\varphi_1 + \overline{\varphi}_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E + [\overline{\varphi}_2, \psi]_E$, а $[\overline{\varphi}_1 + \varphi_2, \psi]_E = [\overline{\varphi}_1 \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E$. Откуда следует, что $[\varphi_1, \psi]_E + [\overline{\varphi}_2, \psi]_E = [\overline{\varphi}_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E$ или $[\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E = [\overline{\varphi}_1, \psi]_E - [\overline{\varphi}_2, \psi]_E$, что и требуется доказать.

Совершенно аналогично полагаем, если $(\varphi, \psi_1)$ и $(\varphi, \psi_2)$ прямые гомеоморфные пары, что

$$[\varphi, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi, \psi_1]_E - [\varphi, \psi_2]_E \tag{3$^1$}$$

Рассмотрим дальнейшее расширение нашего символа. Пусть имеются четыре прямые гомеоморфные пары $(\varphi_i, \psi_j)$ $\begin{pmatrix} i=1,2\ldots \\ j=1,2\ldots \end{pmatrix}$.

На основании (2) имеем:

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1]_E = [\varphi_1, \psi_1]_E + [\varphi_2, \psi_1]_E,$$
$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_2]_E + [\varphi_2, \psi_2]_E.$$

Вычитая одно из другого, на основании (3′) и ранее выведенного мы можем написать

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E. \tag{4}$$

Установив это, расширим символ для пары $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E. \tag{5}$$

Следует показать, что эта величина зависит только от разности $(\varphi_1 - \varphi_2)$, а не от $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Оба члена правой части (5) зависят, как мы видели выше, только от $\psi_1-\psi_2$. Пусть $\bar{\varphi}_1-\bar{\varphi}_2=\varphi_1-\varphi_2$, где $(\bar{\varphi}_1, \psi_1)$, $(\bar{\varphi}_1, \psi_2)$, $(\bar{\varphi}_2, \psi_1)$, $(\bar{\varphi}_2, \psi_2)$ прямые гомеоморфные пары. Имеем $\bar{\varphi}_1+\varphi_2=\varphi_1+\bar{\varphi}_2$.

Согласно (4) имеем

$$[\bar{\varphi}_1+\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E=[\bar{\varphi}_1, \psi_1-\psi_2]_E+[\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E,$$

$$[\varphi_1+\bar{\varphi}_2, \psi_1-\psi_2]_E=[\varphi_1, \psi_1-\psi_2]_E+[\bar{\varphi}_2, \psi_1-\psi_2]_E.$$

Но левые части одинаковы, а поэтому

$$[\bar{\varphi}_1, \psi_1-\psi_2]_E+[\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E=[\varphi_1, \psi_1-\psi_2]_E+[\bar{\varphi}_2, \psi_1-\psi_2]_E.$$

Откуда

$$[\bar{\varphi}_1, \psi_1-\psi_2]_E-[\bar{\varphi}_2, \psi_1-\psi_2]_E=[\varphi_1, \psi_1-\psi_2]_E-[\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E,$$

что и требовалось доказать.

Разворачивая правую часть (5) дальше, получим

$$[\varphi_1-\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E=[\varphi_1, \psi_1]_E-[\varphi_1, \psi_2]_E-[\varphi_2, \psi_1]_E+[\varphi_2, \psi_2]_E. \quad (6)$$

В этом смысле пара $(\varphi_1-\varphi_2, \psi_1-\psi_2)$ называется ограниченной, так как

$$|[\varphi_1-\varphi_2, \psi_1-\psi_2]_E|\leqslant|[\varphi_1, \psi_1]_E|+|[\varphi_1, \psi_2]_E|+|[\varphi_2, \psi_1]_E|+|[\varphi_2, \psi_2]_E|$$

для всякого $E\subset\Omega$.

Аналогично и пары $(\varphi, \psi_1-\psi_2)$ и $(\varphi_1-\varphi_2, \psi)$ называются ограниченными.

Отметим, что если $(\varphi, \psi)$ ограниченная пара, то преобразование $\left.\begin{matrix}x=a+\varphi\\ y=\psi\end{matrix}\right\}$ (где $a$ постоянное) переводит $E$ в тот же образ, что и преобразование $\left.\begin{matrix}x=\varphi\\ y=\psi\end{matrix}\right\}$, только смещенный на отрезок $a$, а поэтому

$$[a+\varphi, \psi]_E=[\varphi, \psi]_E.$$

Откуда, на основании (6), имеем

$$[a, \psi]_E=[a+\varphi, \psi]_E-[\varphi, \psi]_E=0.$$

Совершенно так же имеем, что $[\varphi, a]_E=0$.

Из данного нами определения символа $[\varphi, \psi]_E$ вытекают следующие очевидные его свойства:

1) $[\varphi, \psi]_{E_1}+[\varphi, \psi]_{E_2}=[\varphi, \psi]_{E_1+E_2}$, если $E_1E_2=0$;

2) $[a\varphi, b\psi]_E=ab[\varphi, \psi]_E$ (где $a$ и $b$ постоянные);

3) $[\sum\limits_1^n a_k\varphi_k, \sum\limits_1^m b_i\psi_i]_E=\sum\limits_1^n\sum\limits_1^m a_k b_i[\varphi_k, \psi_i]_E$; (где $a_k$ и $b_i$ постоянные).

4) $[a,\psi]_E=[\varphi, a]_E=0$, где $a$ постоянное;

5) $[\varphi, \varphi]_E = 0$;

6) $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$;

7) $[u, v]_E = |E|$.

## § 3. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ, ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ВАРИАЦИИ

Пусть $E$ некоторое фиксированное $B$ множество в $\Omega$. И пусть $\widetilde{E}$ переменное $B$ множество такое, что $\widetilde{E} \subset E$.

Положим $\overline{V}[\varphi, \psi]_E = \sup\limits_{\widetilde{E} \subseteq E} [\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}$ $\quad -\underline{V}[\varphi, \psi]_E = \inf\limits_{\widetilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}$

$$V[\varphi, \psi]_E = \overline{V}[\varphi, \psi]_E + \underline{V}[\varphi, \psi]_E.$$

$\overline{V}$ назовем положительной вариацией $[\varphi,\psi]_E$, $-\underline{V}$ отрицательной вариацией и $V$ полной вариацией. Эти названия даны потому, что $\overline{V} \geqslant 0$, а $-\underline{V} \leqslant 0$, что легко проверить. Отметим ряд свойств $\overline{V}, \underline{V}$ и $V$, не приводя их доказательств[1].

1) $[\varphi, \psi]_{E_1} = \overline{V}[\varphi, \psi]_E - \underline{V}[\varphi, \psi]_E$.

2) $\overline{V}$ и $\underline{V}$ — неотрицательные величины.

3) $$\left.\begin{aligned} \overline{V}[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= \overline{V}[\varphi, \psi]_{E_1} + \overline{V}[\varphi, \psi]_{E_2} \\ \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_1} + \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_2} \\ V[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= V[\varphi, \psi]_{E_1} + V[\varphi, \psi]_{E_2} \end{aligned}\right\} \text{ если } E_1E_2 = 0$$

4) $$\overline{V}\left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i\right]_E \leqslant \sum_1^n \sum_1^m \overline{V}[\varphi_k, \psi_i]_E$$
$$\underline{V}\left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i\right]_E \leqslant \sum_1^n \sum_1^m \underline{V}[\varphi_k, \psi_i]_E$$
$$V\left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i\right]_E \leqslant \sum_1^n \sum_1^m V[\varphi_k, \psi_i]_E.$$

Определение. Выделим в области $\Omega$ точку $(u, v)$ и опишем около нее как центра круг $\Gamma_\varrho$ радиуса $\varrho$.

Возьмем $[\varphi, \psi]_E$, где $|E| > 0$ и имеет $(u, v)$ как точку плотности $E$, и рассмотрим отношение

$$\frac{[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \frac{[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{[u, v]_{\Gamma_\varrho}}$$

Рассмотрим две величины

$$\overline{\lim_{\varrho\to 0}} \frac{[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} \text{ и } \underline{\lim_{\varrho\to 0}} \frac{[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|}.$$

[1] См. Saks. Thèorie de l'intègrale.

Если эти две величины совпадают, то мы скажем, что $[\varphi, \psi]_E$ диференцируемая функция в данной точке и общее значение этих величин обозначим через $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$, назвав его обобщенным Якобианом функций $\varphi$ и $\psi$.

5) $[\varphi, \psi]_E$ диференцируема почти в каждой точке $E$ и $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$ почти в каждой точке плотности $E$ зависит только от свойств $\varphi$ и $\psi$ и не зависит от $E$.

6) $\overline{\lim\limits_{\varrho\to 0}} \frac{\overline{V}[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \underline{\lim\limits_{\varrho\to 0}} \frac{\overline{V}[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \left|\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}\right|$

почти всюду в $E$.

7) $[\varphi, \psi]_E = \iint_E \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du\, dv + I(E)$,

где $\lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{I(E\Gamma_\varrho)}{|\Gamma_\varrho|} = 0$ почти всюду в $E$.

Примечание. Вместо круга $\Gamma_\varrho$ можно взять прямоугольник[1].

Определение. $[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}$ называется абсолютно непрерывной функцией $\widetilde{E} \subset E$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $\left|[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}\right| < \varepsilon$, если $|\widetilde{E}| < \delta$.

Мы скажем в этом случае, что пара $(\varphi, \psi)$ абсолютно непрерывна.

8) Если $[\varphi,\psi]_{\widetilde{E}}$ абсолютно непрерывна, то и $\overline{V}$, $\underline{V}$ и $V$ абсолютно непре ывны.

9) Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности $[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}$ состоит в том, что

$$[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}} = \iint_{\widetilde{E}} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du\, dv.$$

10) Если $[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}}$ абсолютно непрерывная функция $\widetilde{E} \subset E$,

то
$$\overline{V}[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}} = \iint_{E+} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du\, dv$$

и
$$\underline{V}[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}} = \iint_{E-} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du\, dv,$$

где
$$E^+ = E^+\left\{\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} > 0\right\} \qquad E^- = E^-\left\{\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} < 0\right\}.$$

$$V[\varphi, \psi]_{\widetilde{E}} = \iint_{\widetilde{E}} \left|\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}\right| du\, dv.$$

[1] С постоянным отношением сторон.

## § 4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ СИМВОЛА $[\varphi, \psi]_E$

Пусть $\Omega$ разбивается на счетное множество областей $\Omega_1\, \Omega_2\, \Omega_3 \ldots$,[1] на каждой из которых $(\varphi, \psi)$ ограниченная пара простейшего типа, и пусть ряды $\sum\limits_1^\infty \overline{V}[\varphi, \psi]_{\Omega_k}$ и $\sum\limits_1^\infty \underline{V}[\varphi, \psi]_{\Omega_k}$ сходятся. Тогда мы полагаем

$$[\varphi, \psi]_E = \sum_1^\infty [\varphi, \psi]_{\Omega_k E}.$$

Легко проверить, что все свойства (1—7) § 2 сохраняются для этого обобщения; кроме того, очевидно, что это новое обобщение не содержит противоречий. В самом деле, для этого нам нужно предположить возможность другого разбиения $\Omega$ на области $\Omega_1'\, \Omega_2'\, \Omega_3' \ldots$ и проверить совпадение указанных сумм наложением одной сетки делений на другую.

Если идет речь о расширении понятия символа $[\varphi, \psi]_{\widetilde{\Omega}}$ для области $\widetilde{\Omega}$, то здесь можно высказать следующее. Разобьем контур $\widetilde{C}$ области $\widetilde{\Omega}$ на $n$ частей точками $(u_i, v_i)$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$ $(u_n = u_0,\ v_n = v_0)$ и рассмотрим сумму

$$\sum_1^n \varphi(u_i, v_i)\,[\psi(u_i, v_i) - \psi(u_{i-1}, v_{i-1})].$$

Если эта сумма стремится к определенному пределу, когда $n \to \infty$ и максимум $\sqrt{(u_i - u_{i-1})^2 + (v_i - v_{i-1})^2}$ стремится к 0, независимо от выбора точек деления, то мы его обозначим так:

$$\int\limits_{\widetilde{c}} \varphi(u, v)\, d\, \psi(u, v)$$

и положим

$$[\varphi, \psi]_{\widetilde{\Omega}} = \int\limits_{\widetilde{c}} \varphi\, d\psi,$$

мы скажем, что пара $(\varphi, \psi)$ локально ограничена на $\widetilde{\Omega}$. Потребуем еще, чтобы $\left|[\varphi, \psi]_{\widetilde{\Omega}}\right|$ было ограничено при всевозможных выборах $\widetilde{\Omega}$ внутри $\Omega$. Тогда легко проверить, что $[\varphi, \psi]_{\widetilde{\Omega}}$ удовлетворяет всем свойствам (1—7), где $E$ заменено через $\widetilde{\Omega}$; пару $(\varphi, \psi)$ мы опять назовем ограниченной.

Пусть существует две последовательности непрерывных функций $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, которые сходятся равномерно соответственно к $\varphi$ и $\psi$. Причем $(\varphi_n, \psi_n)$ — ограниченные пары. Пусть $(\varphi, \psi)$ также ограниченная пара и пусть

$$\lim_{n \to \infty} [\varphi_n, \psi_n]_E = [\varphi, \psi]_E.$$

Эта формула может служить для вычисления $[\varphi, \psi]_E$, когда мы умеем вычислять $[\varphi_n, \psi_n]_E$. Всякое множество E, для которого $[\varphi_n, \psi_n]_E$ существует, мы назовем допустимым множеством.

[1] Класса К.

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть нам дана поверхность $S$, заданная уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned}\right\} (S), \text{ где } (u, v) \in \Omega$$

и где $\varphi$, $\psi_n$ и $\chi$ — непрерывные и однозначные функции $u$, $v$. Здесь могут быть и двойные точки, так что под куском поверхности мы будем понимать множество всех точек $(x, y, z)$, определенных для всех $(u, v) \in \Omega$, и если среди них будут совпадающие, то мы их дублируем соответствующим образом. Предположим, что пары $(\psi, \chi)$, $(\chi, \varphi)$ и $(\varphi, \psi)$ локально ограниченные не $E$. Возьмем допустимое множество $E \subset \Omega$ и рассмотрим вектор:

$$\overline{R}_E = [\psi, \chi]_E\, \overline{i} + [\chi, \varphi]_E\, \overline{j} + [\varphi, \psi]_E\, \overline{K}.$$

Легко проверить, что этот вектор не зависит от системы координат, а зависит только от множества $E$. В самом деле, возьмем другую систему орт $\overline{i}'$, $\overline{j}'$, $\overline{K}'$.

$$\left.\begin{aligned} \overline{i}' &= \alpha_{11}\overline{i}' + \alpha_{21}\overline{j}' + \alpha_{31} K' \\ \overline{j} &= \alpha_{12}\overline{i}' + \alpha_{22}\overline{j}' + \alpha_{32} K' \\ \overline{K} &= \alpha_{13}\overline{i}' + \alpha_{23}\overline{j}' + \alpha_{33} K' \end{aligned}\right\}$$

(1) $\alpha_{m,n}$ девять косинусов преобразования координат.

Формулы преобразования координат будут следующие:

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi.\alpha_{11} + \psi.\alpha_{12} + \chi.\alpha_{13} \\ \psi' &= \varphi.\alpha_{21} + \psi.\alpha_{22} + \chi.\alpha_{23} \\ \chi' &= \varphi.\alpha_{31} + \psi.\alpha_{32} + \chi.\alpha_{33} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В новых координатах проекциями $\overline{R}_E$ на $\overline{i}', \overline{j}', K'$ будут

$$[\psi', \chi']_E, \ [\chi', \varphi']_E \ \text{ и } \ [\varphi', \psi']_E.$$

В самом деле, для этого достаточно показать, что

$$\left.\begin{aligned} [\psi', \chi']_E &= [\psi, \chi]_E\,\alpha_{11} + [\chi, \varphi]\,\alpha_{12} + [\varphi, \psi]_E\,\alpha_{13} \\ [\chi', \varphi']_E &= [\psi, \chi]_E\,\alpha_{21} + [\chi, \varphi]_E\,\alpha_{22} + [\varphi, \psi]_E\,\alpha_{23} \\ [\varphi', \psi']_E &= [\psi, \chi]_E\,\alpha_{31} + [\chi, \varphi]_E\,\alpha_{32} + [\varphi, \psi]_E\,\alpha_{33} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Действительно:

$$[\varphi', \chi']_E = [\varphi\,\alpha_{21} + \psi\,\alpha_{22} + \chi\,\alpha_{23},\ \varphi\,\alpha_{31} + \psi\,\alpha_{32} + \chi\,\alpha_{33}]_E =$$
$$= [\varphi, \varphi]\,\alpha_{21}\alpha_{31} + [\psi, \varphi]_E\,\alpha_{12}\alpha_{31} + [\chi, \varphi]\,\alpha_{13}\alpha_{31} + [\varphi, \psi]\,\alpha_{21}\alpha_{32} +$$
$$+ [\psi, \psi]_E\,\alpha_{22}\alpha_{32} + [\chi, \psi]_E\,\alpha_{22}\alpha_{33} + [\varphi, \psi]\,\alpha_{21}\alpha_{33} + [\psi, \chi]_E\,\alpha_{23}\alpha_{32} +$$
$$+ [\chi, \chi]\,\alpha_{23}\alpha_{33} = [\psi, \chi]_E(\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{33}) + [\chi, \varphi]_E(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}) +$$
$$+ \varphi, \psi]_E(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}) = [\psi, \chi]_E\,\alpha_{11} + [\chi, \varphi]_E\,\alpha_{12} + [\varphi, \psi]_E\,\alpha_{13}.$$

Совершенно аналогично проверяются 2-е и 3-е равенства (3). Рассмотрим теперь следующую величину:

$$\{\varphi,\ \psi,\ \chi\}_E = +\sqrt{\overline{R}_E^2} = \sqrt{[\psi,\ \chi]_E^2 + [\chi,\ \varphi]_E^2 + [\varphi,\ \psi]_E^2}.$$

Разобьем теперь $E \subset \Omega$ на $n$ допустимых множеств $E_1, E_2 \ldots E_n$ и рассмотрим точную верхнюю границу $\sum_{k=1}^{n} \{\varphi,\ \psi,\ \chi\}_{E_k}$ при всевозможных выборах числа $n$ и множеств $E_1, E_2, \ldots E_n$. Обозначим ее через $W\{\varphi, \psi,\ \chi\}_E$. Это будет, по нашему определению, мера части поверхности $S$, соответствующая множеству $E$. Обозначим ее через $S_E$. Таким образом, $|S_E| = W\{\varphi,\ \psi,\ \chi\}_E$.

Может случиться, что $W = +\infty$, тогда поверхность будет называться неквадрируемой. В противном случае она квадрируема.

Приведем ряд свойств меры поверхности без доказательства[1].

$$1)\ |S_{E_1+E_2}| = |S_{E_1}| + |S_{E_2}|, \quad \text{если } E_1E_2 = 0.$$

$$2)\ \lim_{\varrho\to 0}\frac{|S_{\Gamma_\varrho}|}{|\Gamma_\varrho|} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\{\varphi,\ \psi,\ \chi\}_{\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \frac{D|S|}{D[u, v]}\ \text{существует почти всюду в } \Omega.$$

($\Gamma_\varrho$ означает круг радиуса $\varrho$, описанный из точки $(u,\ v)$ радиусом $\varrho$).

$$3)\ \frac{D|S|}{D[u, v]} = \sqrt{\left\{\frac{D[\psi,\ \chi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi,\ \varphi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi,\ \psi]}{D[u,\ v]}\right\}^2}$$

почти всюду в $\Omega$.

Определение. $|S_E|$ называется абсолютно непрерывной функцией $E$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что $|S_E| < \varepsilon$, коль скоро $|E| < \delta$.

4) Если $|S_E|$ абсолютно непрерывные, то

$$|S_E| = \iint_E \sqrt{\left\{\frac{D[\psi,\ \chi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi,\ \varphi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi,\ \psi]}{D[u,\ v]}\right\}^2}\, du\, dv.$$

5) В общем случае:

$$|S_E| \geqslant \iint_E \sqrt{\left\{\frac{D[\psi,\ \chi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\chi,\ \varphi]}{D[u,\ v]}\right\}^2 + \left\{\frac{D[\varphi,\ \psi]}{D[u,\ v]}\right\}^2}\, du\, dv.$$

Теорема. а) Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности $S\left|\begin{matrix} x = \varphi \\ y = \psi \\ z = \chi \end{matrix}\right|$ состоит в том, что пары $(\psi,\ \chi)$, $(\chi,\ \varphi)$ и $(\varphi,\ \psi)$ ограничены.

в) Необходимое и достаточное условие представимости $|S_E|$ двойным интегралом (см. свойство 4-е) состоит в абсолютной непрерывности пар $(\psi,\ \chi)$, $(\chi,\ \varphi)$ и $(\varphi, \psi)$.

[1] См. нашу статью Изв. НИИММ, Томск, том II, вып. II.

Доказательство. Справедливость теорем вытекает, очевидно из следующего соотношения.

$$\left.\begin{array}{l}\left|[\psi, \chi]_E\right| \\ \left|[\chi, \varphi]_E\right| \\ \left|[\varphi, \psi]_E\right|\end{array}\right\} \leqslant \sqrt{[\psi, \chi]_E^2+[\chi, \varphi]_E^2+[\varphi, \psi]_E^2} \leqslant \left|[\psi, \chi]_E\right| + \left|[\chi, \varphi]_E\right| + \left|[\varphi, \psi]_E\right|.$$

## § 6. РАССМОТРЕНИЕ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

1. $\left.\begin{array}{l}x=u \\ y=f(u, v)\end{array}\right\}$ (T) $(u, v) \in \Omega$ $f(u, v)$ непрерывная функция.

Если $f(u, v)$ возрастающая функция $v$ при любом $u$, то очевидно, что $(T)$ — гомеоморфное прямое преобразование. Пусть $f(u, v)$ есть функция ограниченной вариации по отношению к переменному $v$ для почти каждого значения $u$. Тогда $f(u, v)=f_1(u, v)-f_2(u, v)$, где $f_1$ и $f_2$ — — две возрастающие функции для почти каждого значения $u$. Пусть $E$ некоторое $B$ множество в области $\Omega$ и соответствующее ему множество $\mathcal{E}$ через преобразование $(T)$ такое, что абсцисса $E$ и $\mathcal{E}$ одинаковы (поскольку $x=u$).

Зафиксируем $x$ и будем рассматривать соответствующую этому значению $x$ часть $\mathcal{E}$. Обозначим ее через $\mathcal{E}_x$. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — образы $E$ через преобразования:

$$\left.\begin{array}{l}x=u \\ y=f_1(u, v)\end{array}\right\} (T_1) \qquad \left.\begin{array}{l}x=u \\ y=f_2(u, v)\end{array}\right\} (T_2).$$

Их части, соответствующие данному $x$, пусть будут $\mathcal{E}_{1x}$ и $\mathcal{E}_{2x}$. Тогда, ясно, что

$$[u, f_1(u, v)]_E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{E}_{1x}\right| dx$$

$$[u, f_2(u, v)]_E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{E}_{2x}\right| dx.$$

Откуда:

$$[u, f(u, v)]_E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{E}_{1x}\right|-\left|\mathcal{E}_{2x}\right| dx.$$

Но $\left|\mathcal{E}_{1x}\right|-\left|\mathcal{E}_{2x}\right|$ почти для каждого $x$ есть обыкновенная вариация $f(x, v)$ по переменному $v$ на множестве $E_u$, где $E_u$ есть часть $E$, соответствующая данному значению $u$.

Обозначим ее через $\omega_v^{E_u} f(x, v)$.

Отсюда $[u, f(u, v)]_E=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_v^{(E_u)} f(x, v)\, du.$

Пусть $\overline{V}_v^E f$ есть положительная вариация $f(u,v)$, а $\underline{V}_v^E f$ — отрицательная вариация $f(u,v)$ по переменному $v$ на множестве $E_u$.

Ясно, что $\overline{V}[u,f(u,v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V}_v^{(E_u)} f(u,v)\,du$,

$$\underline{V}[u,f(u,v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{V}_v^{(E_u)} f(u,v)\,du.$$

Тогда полная вариация $V[u,f(u,v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} V_v^{(E_u)} f(u,v)\,du$ получается

как результат сложения двух предыдущих величин. Предположим в частности, что $E$ есть прямоугольник $\Gamma$ с вершинами $(u,v)$ $(u+\Delta u, v)$ $(u,v+\Delta v)$ $(u+\Delta u, v+\Delta v)$. Тогда

$$[u,f(u,v)]_\Gamma = \int_u^{u+\Delta u} [f(u,v+\Delta v)-f(u,v)]\,du = [f(u+\Theta\Delta u, v+\Delta v) - f(u,+\Theta\Delta u,v)]\,\Delta u$$

$(0<\Theta<1)$ (теорема о среднем),

но выражение в скобках можно представить так:

$$\left\{\frac{\partial f(u+\Theta\Delta u,v)}{\partial v} + \varepsilon\right\}\Delta v,$$

где $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\varepsilon = 0$, отсюда

$$\frac{D[u,f]}{D[u,v]} = \lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \frac{[u,f(u,v)]_\Gamma}{\Delta u\Delta v} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\partial f(u+\Theta\Delta u,v)}{\partial v}.$$

Но по теореме Н. Лузина ($C$ — свойство) можно определить такое совершенное множество $P\subset\Omega$, что $|\Omega P|$ как угодно мало и что на нем $\frac{\partial f}{\partial v}$ непрерывна. Поэтому, переходя ассимптотически к пределу, так что

$$(u+\Theta\Delta u, v)\in P,$$

мы получим, что

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\partial f(u+\Theta\Delta u,v)}{\partial v} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial v},$$

но так как по свойству ограниченности вариации $\frac{\partial f}{\partial v}$ существует почти всюду в $\Omega$, а следовательно и в $P$, а потому ассимптотический предел существует и почти всюду в $P$ равен $\frac{\partial f}{\partial v}$, т. е. почти всюду в $\Omega$.

Итак, $\frac{D[u,f]}{D[u,v]}=\frac{\partial f}{\partial v}$.

Если $f(u,v)$ абсолютно непрерывная функция $v$ для почти каждого значения $u$, то очевидно, что

$$\omega_v^{E_u} f=\int_{E_u}\frac{\partial f}{\partial u}dv.$$

Отсюда

$$[u,f(u,v)]_E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{E_u}\frac{\partial f}{\partial v}dv\right\}du.$$

2. Аналогично трактуется пара $(f(u,v), v)$.

$\left.\begin{matrix} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v)\end{matrix}\right\}$(T), где $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial v}$ —непрерывные функции $u$ и $v$.

Воспользуемся определением $[\varphi,\psi]\,\widehat{\Omega}$, данным в § 4.

$[u,\psi]_{\widehat{\Omega}}=\int_{\widehat{C}}\varphi d\psi$, где $\widehat{C}$ граница $\widehat{\Omega}$.

Но $\int_{\widehat{C}} d\psi=\int_{\widehat{C}}\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)=\iint_{\widehat{\Omega}}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}dudv.$

Отсюда видно, что $[\varphi,\psi]_{\widehat{\Omega}}$ есть абсолютно непрерывная функция области. Откуда $[\varphi,]\psi_{\widehat{E}}=\iint_{\widehat{E}}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}dudv.$

Отсюда также следует, что $\frac{D[\varphi,\psi]}{D[u,v]}=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$.

В частности, $\varphi$ и $\psi$ могут быть полиномами.

3. $\left.\begin{matrix} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v)\end{matrix}\right\}$ где $\varphi$ и $\psi$ обладают условием Липшица. Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial v}$ существуют почти всюду и являются ограниченными.

Не приводя доказательства, мы лишь укажем, что в этом случае

$$[\varphi,\psi]_E=\iint_E\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}dudv.$$

При определении величины площади поверхности мы заключаем легко в силу результатов § 5, что если поверхность выражается уравнениями

$$x=\varphi(u,v)$$
$$y=\psi(u,v)$$
$$z=\chi(u,v),$$

где $\varphi, \psi$ и $\chi$ удовлетворяют условию Липшица, то мера поверхности определяется классической формулой, т. е. двойным интегралом. Если же поверхность выражается уравнением $z=f(x,y)$, то пары $(x, f(x,y)$ и $(f(x,y), y)$ должны быть ограниченными. Это последнее условие равносильно тому, что $f(x,y)$ есть функция ограниченной вариации для каждого из переменных при почти всяком значении другого переменного и интегрируемы по этому второму переменному и полные вариации интегрируемы.

Если кроме этого $f(x,y)$ абсолютно непрерывная функция каждого из переменных для почти каждого значения другого переменного, то мера поверхности выражается классической формулой, то есть двойным интегралом.