Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ

ПРО ОДНУ ОПЕРАЦІЮ В ТЕОРІЇ ТОЧКОВИХ МНОЖИН

I. ПОНЯТТЯ ОПЕРАЦІЇ A^m

1. Буквою C позначимо простір, а буквами A, B підмножини цього простору. Буквою O позначимо пусту множину, знаком A^c — різницю $C-A$ (доповнення множини A).

Нехай в просторі, що нами розглядається, кожній множині $A \subset C$ буде припорядкована однозначно якась множина цього простору, яку позначатимемо знаком A^d і яку назвемо похідною множини A.

2. Розглядатимемо такі простори, в яких поняття похідної задовольняє такі, незалежні одна від одної [5][1], аксіоми:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}\ d &: (A \subset C) \cdot \supset \cdot (A^d \subset B^d) \\
\mathrm{II}\ d &: (A+B)^d \subset A^d + B^d \\
\mathrm{III}\ d &: C^d = C \\
\mathrm{IV}\ d &: A^{dd} \subset A^d \\
\mathrm{V}\ d &: O^d = O.
\end{aligned}$$

Позначимо тепер операцію A^m формулою:

$$A^m = A^{dcd} = \{(A^d)^c\}^d,$$

і, користуючись законами алгебри множин, виведемо деякі топологічні властивості цієї операції.

II. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНОЇ МНОЖИНИ

1. Для виясненная топологічного значення операції A^m будуть необхідні такі властивості поняття похідної, що їх можна вивести з аксіом $\mathrm{I}\,d$ — $\mathrm{IV}\,d$:

$$\begin{aligned}
&1d : (A+B)^d = A^d + B^d && 5d : A^{dcdcdcd} = A^{dcd} \\
&2d : (AB)^d \subset A^d B^d && 6d : A^{dcdd} = A^{dcd} \\
&3d : A^d - B^d \subset (A-B)^d && 7d : A^{dcdc} = A^{dcd} \\
&4d : A^{dc} \subset A^{cd} && 8d : A^{cdcd} \subset A^{dcdcd}
\end{aligned}$$

2. Доведення[2].

Формула $1d$ є еквівалентна сукупності двох аксіом $\mathrm{I}d$ і $\mathrm{II}d$.

---

[1] Див. літературу в кінці статті.

[2] Коло кожної реляції в доведеннях пишемо в дужках аксіоми, на основі яких ця реляція випливає з попередньої. Знак (Б) означає, що дана реляція випливає з законів алгебри Буля.

Формула $2d$ є еквівалентна аксіомі Id.

Доведення формули $3d$:

$$A = AC = A(B^c + B) = AB + AB \subset AB^c + B, \qquad (Б)$$
$$A^d \subset (AB^c + B)^d \subset (AB^c)^d + B^d, \quad (\mathrm{I}d),\ (\mathrm{II}d).$$
$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} + B^d B^{dc} = (AB^c)^d B^{dc} \subset (AB^c)^d, \qquad (Б)$$

тобто: $A^d - B^d \subset (A - B)^d$.

Доведення формули $4d$:

$$C - A^d = C^d - A^d \subset (C - A), \quad (3d),\ (\mathrm{III}d),$$

отже: $A^{dc} \subset A^{cd}$.

Доведення формули $5d$:

$$(A^{dc})^{dc} \subset (A^{dc})^{cd}, \quad (4d)$$
$$A^{dcdc} \subset A^{dd} \subset A^d, \quad (Б),\ (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d, \quad (\mathrm{I}d),\ (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{dc} \subset A^{dcdcdc}, \quad (Б)$$
$$(\alpha)\quad A^{dcd} \subset A^{dcdcdcd} \quad (\mathrm{I}d)$$

$$(A^{dcdc})^{dc} \subset (A^{dcdc})^{cd}, \quad (4d)$$
$$A^{dcdcdc} \subset A^{dcdd} \quad (Б)$$
$$(\beta)\quad A^{dcdcdcd} \subset A^{dcddd} \subset A^{dcd}, \quad (\mathrm{I}d),\ (\mathrm{IV}d)$$

з (α) і (β) випливає $5d$.

Доведення формули $6d$:

$$(A^{dcd})^{dc} \subset (A^{dcd})^{cd} \quad (4d)$$
$$A^{dcdcdc} \subset A^{dcdddcd} \subset A, \quad (Б),\ (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcdd} \quad (\mathrm{I}d)$$
$$(\alpha)\quad A^{dcd} \subset A^{dcdd} \quad (5d)$$

$$(\beta)\quad A^{dcdd} \subset A^{dcd}, \quad (\mathrm{IV}d)$$

з (α) і (β) випливає $6d$.

Доведення формули $7d$:

$$(A^{dcd})^{cd} \subset (A^{dcd})^{cd}, \quad (4d)$$
$$A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}, \quad (6d)$$

Доведення формули $8d$:

$$A^{dc} \subset A^{cd}, \quad (4d)$$
$$A^{dcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}, \quad (\mathrm{I}d),\ (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{cdc} \subset A^{dcdc}, \quad (Б)$$
$$A^{cdcd} \subset A^{dcdcd} \quad (\mathrm{I}d)$$

III. ТОПОЛОГІЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЇ A^m

Зовнішньою точкою множини A (в евклідових просторах, де A_d є множиною точок скупчення множини A) називають таку точку, яка не є елементом множини A і не є її точкою скупчення. За цим означенням, множину всіх зовнішніх точок множини A можна записати у вигляді:

$$A^e = A^c A^{dc}.$$

Доведемо таку теорему:

T_1. Множина A^m є тотожна похідній множини зовнішніх точок множини A. Треба довести, що $A^m = A^{dcd} = (A^c A^{dc})^d$.

Маємо:

$$(A^cA^{dc})^{dc} \subset (A^cA^{dc})^{cd} = (A+A^d)^d = A^d, \quad (4d), (1d), (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{dc} \subset (A^cA^{dc})^d, \quad (Б)$$
$$(\alpha) \quad A^{dcd} \subset (A^cA^{dc})^{dd} \subset (A^cA^{dc})^d, \quad (\mathrm{I}d), (\mathrm{IV}d).$$

З другого боку, маємо:

$$A^cA^{dc} \subset A^{dc}, \quad (Б)$$
$$(\beta) \quad (A^cA^{dc})^d \subset A^{dcd}, \quad (\mathrm{I}d)$$

з (α) і (β) випливає наша теорема.

IV. АКСІОМИ ОПЕРАЦІЇ A^m

1. Доведемо, що в просторах, в яких похідна задовольняє аксіоми $\mathrm{I}d - \mathrm{V}d$, операція A^m задовольняє такі умови:

$$\mathrm{I.} \quad A^m + B^m \subset (A+B)^m$$
$$\mathrm{II.} \quad A^{cm} \subset A^{mm}$$
$$\mathrm{III.} \quad A^{mc} \subset A^{mm}$$
$$\mathrm{IV.} \quad A^{mcm} = A^m$$
$$\mathrm{V.} \quad C^m = O.$$

2. Доведення:

I. $AB \subset A$, (Б)	$AB \subset B$, (Б)
$(AB)^d \subset A^d$, $(\mathrm{I}d)$	$(AB)^d \subset B^d$, $(\mathrm{I}d)$
$A^{dc} \subset (AB)^{dc}$, (Б)	$B^{dc} \subset (AB)^{dc}$, (Б)
(α) $A^{dcd} \subset (AB)^{dcd}$ $(\mathrm{I}d)$	(β) $B^{dcd} \subset (AB)^{dcd}$, $(\mathrm{I}d)$.

З (α) і (β) випливає:

$$A^{dcd} + B^{dcd} \subset (AB)^{dcd}, \quad (Б),$$

тобто:

$$A^m + B^m \subset (AB)^m.$$

$$\mathrm{II.} \quad A^{cm} = A^{cdcd} \subset A^{dcdcd} = A^{dcddcd} = A^{mm}, \quad (8d), (6d).$$
$$\mathrm{III.} \quad A^{mc} = A^{dcdc} \subset A^{dcdcd} = A^{dcddcd} = A^{mm}, \quad (7d), (6d)$$
$$\mathrm{IV.} \quad A^{mcm} = A^{dcdcdcd} = A^{dcd} = A^m, \quad (5d)$$
$$\mathrm{V.} \quad C^m = C^{dcd} = C^{cd} = O^d = O, \quad (\mathrm{III}d), (Б), (\mathrm{V}d).$$

3. Доведемо, що формули I — V незалежні одна від одної. Нехай простір C складається з трьох елементів:

$$C = \{a, b, c\}.$$

В нижченаведеній таблиці знайдемо для кожної множини $A \subset C$, в окремих стовпцях, такі означення операції A^m, які задовольняють всі формули I — V, крім однієї, позначеної зверху відповідного стовпця. Це дасть нам підставу розглядати формули I — V як аксіоми операції A^m.

	I	II	III	IV	V
$Om =$	C	C	O	C	C
$\{a\}$	O	C	O	$\{b\}$	C
$\{b\}$	O	C	O	C	C
$\{c\}$	O	C	O	C	C
$\{a, b\}$	C	$\{c\}$	O	O	C
$\{b, c\}$	C	$\{a\}$	O	O	C
$\{c, a\}$	C	$\{b\}$	O	O	C
$Cm =$	O	O	O	O	C

V. ВИСНОВКИ З АКСІОМИ I — V

1. Виведемо такі властивості операції A^m:

1) $(A \subset B) . \supset \cdot (B^m \subset A^m)$
2) $(A + B)^m \subset A^m B^m \subset A^m + B^m \subset (AB)^m$
3) $A^m - B^m \subset (A - B)^m$
4) $A^{mmm} = A^m = A^{mcm}$
5) $(A \subset B) \cdot \supset \cdot (A^{mm} \subset B^{mm})$
6) $(AB)^{mm} \subset A^{mm} B^{mm} \subset A^{mm} + B^{mm} \subset (A + B)^m$
7) $A^{cmmc} \subset A^{cm}$
8) $A^{cmmc} \subset A^m$
9) $O^m = C$
10) $A^m + A^{mm} = C$
11) $A^{mm} \neq A^m$
12) $A \neq A^m$

2. Доведення.

1) $A^m + B^m \subset (AB)^m$, (I)

$(A \subset B) \cdot \supset \cdot (A^m + B^m \subset A^m)$, (Б)

$B^m \subset A^m$ (Б)

2) Реляція $A^m B^m \subset A^m + B^m$ очевидна.

а) $A \subset A + B$, (Б)
$B \subset A + B$, (Б)
$(A + B)^m \subset A^m$ (1)
$(A + B)^m \subset B^m$ (1)
$(A + B)^m \subset A^m B^m$ (Б)

б) $AB \subset A$, (Б)
$AB \subset B$, (Б)
$A^m \subset (AB)^m$, (1)
$B^m \subset (AB)^m$, (1)
$A^m + B^m \subset (AB)^m$ (Б)

3) $A - B = AB^c \subset A$, (Б)

$$A^m \quad (A - B)^m, \quad (1)$$
$$A^m - B^m \subset (A - B)^m, \quad (Б)$$

4) З уваги на аксіому IV треба тільки довести, що $A^{mcm} = A^{mmm}$

$$(\alpha) \ (A^m)^{cm} \subset A^{mmm}, \quad (II)$$
$$(\beta) \ A^{mc} \subset A^{mm}, \quad (III)$$
$$A^{mmm} \subset A^{mcm}. \quad (1)$$

Отже:

$$A^{mcm} = A^{mmm}.$$

5) $(A \subset B) \cdot \supset \cdot (B^m \subset A^m)$, (1)

$$(B^m \subset A^m) \cdot \supset \cdot A^{mm} \subset B^{mm}. \quad (1)$$

6) Реляції цієї формули випливають безпосередньо з твердження 5-го.

7) $(A^{cm})^{mc} \subset (A^{cm})^{mm} = A^c$, (II), (4).

8) $A^{cm} \subset A^{mm}$, (II)

$A^{mmm} \subset A^{cmm}$ (II)

$$A^{mmmc} \subset A^{cmmc} = A^{mc}, \quad (Б) \quad (4).$$

9) $C^{mc} \subset C^{mm}$, (III)

$$O^c = C \subset O^m, \quad (V), \ (Б)$$
$$O^m = C, \quad (Б)$$

10) $A^{mc} \subset A^{mm}$, (III)

$$A^{mc} A^{mmc} = O, \quad (Б)$$
$$A^m + A^{mm} = C, \quad (Б)$$

11) Припустимо, що існує така множина $A \subset C$, для якої $A^{mm} = A^m$. Тоді ми мали б:

а) $A^{mm} A^{mc} = O$, (Б),

$A^{mc} = O$, (II)

$A^m = C$, (Б)

б) $A^m A^{mmc} = O$, (Б)

$A^{mc} + A^{mm} = C$, (Б)

$A^{mm} = C$, (II)

$A^{mmm} = A^m = C^m = O$, (4)

Суперечність $A^m = O$ і $A^m = C$ доводить, що припущення $A^{mm} = A^m$ неможливе.

12) Припущення $A^m = A$ веде до рівності $A^{mm} = A^m$, яка є суперечна з (11).

VI. ІТЕРАЦІЇ ОПЕРАЦІЙ A^m і A^c

1. Позначимо буквою σ будь-яку скінчену послідовність, членами якої є букви m і c (наприклад: $\sigma_1 = mmcm$, $\sigma_2 = cmcmmm$ і т. д.)

Вирішимо такі два питання:

1) Які різні множини A^σ існують у найзагальнішому випадку?

2) Які реляції $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ існують при $\sigma_1 \neq \sigma_2$ і $A^{\sigma_1} \neq A^{\sigma_2}$?

Відповіді на обидва питання дають нижченаведені дві таблиці, де $A \to B$ пишемо замість $A \subset B$.

$$(T_1) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & A^{cm} \arrow[dr] & \\ A^{cmmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{mm} \\ & A^{mc} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (T_2) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & A^{m} \arrow[dr] & \\ A^{mmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{cmm} \\ & A^{cmc} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Всі реляції таблиці (T_1) були вже доведені, як формули (7), (8), (II) і (III), для довільної множини $A \subset C$. Таблицю (T_2) одержуємо, підставляючи в першій таблиці A^c замість A.

З доведеної формули (4) виходить, що не існує жодна множина A^σ, відмінна від кожної з 8 множин, які містяться в таблицях (T_1) і (T_2).

2. Наведемо приклад, який покаже, що в загальному випадку множини A, A^c і всі множини, які містяться в (T_1) і (T_2), є відмінні одна від одної, і що нема між ними інших реляцій $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$, крім тих, що відмічені в таблицях.

Таким прикладом є множина $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, де:

$A_1 =$ множина несумірних чисел інтервалу (1,2),
$A_2 =$ множина дійсних чисел: $3 \leqslant x < 4$,
$A_3 =$ множина дійсних чисел: $4 < x < 5$,
$A_4 =$ множина, єдиним елементом якої є число 6.

VII. ВСЮДИ ЩІЛЬНІ, НІДЕ НЕЩІЛЬНІ І ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ

1. Користуючись лише діями алгебри множин, не можна за допомогою операції A^m визначити поняття похідної A^d. Нехай, наприклад, елементи множини A будуть: число O і обернені вартості всіх натуральних чисел. Маємо: $A^d = \{O\}$. Але: $A^m = C$, $A^{cm} = O$. Ясно, що, повторюючи операцію A^m і виконуючи на одержаних множинах дії алгебри множин, в результаті завжди одержимо або увесь простір, або пусту множину, і ніколи не одержимо множини, єдиним елементом якої є число O.

Не можна, таким способом, визначити за допомогою операції A^m поняття замкненої і відкритої множин. Але деякі інші основні поняття можна визначити легко за допомогою цієї ж операції.

2. Множину A називають всюди щільною, якщо $A^d = C$. Доведемо таку теорему:

T_2. Кожна з наступних п'яти реляцій є достатньою ї необхідною умовою для того, щоб множина A була всюди щільна:

1) $A^m = O$, 2) $A^m \subset A$, 3) $A^{mm} = C$, 4) $A^{mmc} = A$, 5) $A^m \subset A^{mm}$.

Доведення:
1) Якщо $A^d = C$, то $A^m = A^{dcd} = C^{cd} = O^d = O$.
Треба ще довести, що з умови $A^m = O$ випливає $A^d = C$.
Маємо:

$$A^m = (A^c A^{dc})^d = (A + A^d)^{cd} = O.$$

Але

$$(A + A^d)^{dc} \subset (A + A^d)^{cd}, \quad (4d)$$

отже,

$$(A + A^d)^{dc} = (A^d + A^{dd})^c = A^{dc} \subset O,$$

тобто

$$A^{dc} = O, \quad A^d = C.$$

2) Треба тільки довести, що з $A^m \subset A$ випливає:

$$A^m = O.$$

З умови $A^m \subset A$ випливає:

$$A^m \subset A^{mm} \ (1).$$

Але

$$A^{mc} \subset A^{mm}, \ (\mathrm{II}),$$

отже,

$$A^m + A^{mc} \subset A^{mm},$$

тобто

$$C \subset A^{mm}, \quad A^{mm} = C, \quad A^{mmm} = C^m = O, \quad A^m = O, \quad (4).$$

3) а) $A^{mm} = C$ б) $A^m = O$

$A^{mmm} = A^m = C^m = O, \ (4), \ (\mathrm{V})$ $A^{mm} = O^m = C \ (9)$

4) а) $A^{mmc} \subset A$ б) $A^m = O$

$A^m \subset A^{mmcm} = A^{mm}, (1), (\mathrm{IV})$ $A^{mmc} = O^{mc} = C^c = O \subset A, \ (9), (\mathrm{V}),$

$A^{mc} \subset A^{mmc} \quad (\mathrm{III})$

$C = A^m + A^{mc} \subset A^{mm} \quad (\mathrm{Б})$

$$A^{mm} = C$$

$$A^{mmm} = A^m = C^m = O, \quad (4), \ (\mathrm{V})$$

5) $A^m \subset A^{mm}$

$$A^{mc} \subset A^{mm} \quad (\mathrm{III})$$

$$C = A^m + A^{mc} \subset A^{mm}, \quad A^{mm} = C, \quad A^m = A^{mmm} = C^m = O.$$

Доведемо ще теорему, яка робить можливим визначення всюди щільної множини за допомогою зв'язку між похідною і операцією A^m.

T_3. Кожна з двох реляцій 1) $A^m \subset A^d$ і 2) $A^m \subset A^{d^n}$ (для довільного скінченого натурального числа n) є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була всюди щільна.

Знаком A^{d^n} позначаємо тут n-у похідну множини A.

Доведення:

1) Треба тільки довести, що з умови $A^m \subset A^d$ випливає:

$$A^d = C.$$

Маємо:

$$A^m \subset A^d, \quad A^m A^{dc} = O,$$

тобто

$$A^{dcd} A^{dc} = O.$$

Але

$$A^{ddc} \subset A^{dcd} \quad (4d),$$

отже:

$$A^{ddc}A^{dc} \subset A^{dcd}A^{dc} = O$$
$$(A^{dd} + A^{d})^{c} \subset O \quad (Б)$$
$$A^{dc} \subset O \quad (IVd)$$
$$A^{d} = C.$$

2) Маємо

$$A^{dn} \subset A^{d} \quad (IVd),$$

отже, $A^{m} \subset A^{dn} \subset A^{d}$ і задовольняється умова першої частини нашої теореми. Якщо ж $A^{m} = O$, то очевидно:

$$A^{m} \quad A^{dn}.$$

3. В евклідових просторах називають множину A ніде нещільною, якщо кожна точка простору є точкою скупчення множини зовнішніх точок множини A, тобто, коли

$$(A^{c}A^{dc})^{d} = A^{dcd} = C.$$

Приймаючи умову $A^{m} = C$ як означення поняття нещільності множини A, можна довести таку теорему:

Кожна з формул:

$$1)\ A^{m} = C,\quad 2)\ A \subset A^{m},\quad 3)\ A^{mm} = O,\quad 4)\ A \subset A^{mmc},$$
$$5)\ A^{mm} \subset A^{m},\quad 6)\ A^{d} \subset A^{m} \text{ і } 7)\ 8)\ A^{dn} \subset A^{m}$$

є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була ніде нещільна.

Згадуємо доведення цієї теореми, бо воно аналогічне доведенню еквівалентності різних означень поняття всюди щільної множини.

Ми довели, що для жодної множини $A \subset C$ не може бути $A = A^{m}$ (12). З цього випливає, що жодна множина не може бути одночасно всюди щільною і ніде нещільною.

4. Множину A називають граничною множиною, якщо її відкрите ядро є пусте, тобто якщо:

$$A^{crc} = (A^{c} + A^{cd})^{c} = AA^{cdc} = O.$$

Доведемо, що умова $AA^{cdc} = O$ еквівалентна умові $A^{cm} = O$. Доведемо, насамперед, що умова $AA^{cdc} = O$ еквівалентна умові $A^{cdc} = O$.

З $AA^{cdc} = O$ випливає:

$$A^{c} + A^{cd} = C \quad (Б),$$
$$A^{d} + A^{cdd} = C^{d}, \quad (1d),$$
$$A^{cd} = C \quad (IVd),\ (IIId),$$

отже,

$$A^{cdc} = O.$$

Далі:

$$A^{cdd} \subset A^{cd} \quad (IVd)$$
$$A^{cdc} \subset A^{cddc} \subset A^{cdcd} = A^{cm}, \quad (4d).$$

Отже, якщо:

$$A^{cm} = O,$$

то й

$$A^{cdc} = O.$$

З другого боку, з умови $A^{cdc} = O$ випливає:

$$A^{cdcd} = A^{cm} = 0$$

Таким чином, ми довели, що умова $A^{cm} = O$ є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була гранична.

Бачимо, що множина A є гранична тоді і тільки тоді, якщо її доповнення є всюди щільне і з теорем (T_2) і (T_3) випливає така теорема:

T_4. Кожна з наступних формул є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була граничною множиною:

$$1)\ A^{cm} = O,\quad 2)\ A \subset A^{cmc},\quad 3)\ A^{cmm} = C,\quad 4)\ A \subset A^{cmmc},$$
$$5)\ A^{cm} \subset A^{cmm},\quad 6)\ A^{cm} \subset A^{cd},\quad 7)\ A^{cm} \subset A^{cdn}$$

(для довільного натурального n).

VIII. ОПЕРАЦІЯ A^m І ЗАМКНЕННЯ МНОЖИНИ A

1. Позначимо знаком A^r замкнення множини A, тобто:

$$A^r = A + A^d.$$

Гаусдорф[1] назвав множину $A^e = A^{rc}$ множиною зовнішніх точок множини A. Ясно, що його означення, в кожному абстрактному просторі, еквівалентне означенню $A^e = A^c A^{dc}$, якими ми тут користувались.

Доведемо, що операція A^m визначається за допомогою A^r і за допомогою A^d однаково побудованими формулами.

T_5.

Доведення.

$$A^{rcr} = (A + A^d)^c + (A + A^d)^{cd} = A^c A^{dc} + (A^c A^{dc})^d = A^c A^{dc} + A^{dcd}.\ (T_1)$$

Досить тепер довести, що $A^{dc} \subset A^{dcd}$

$$A^{dd} \subset A^d \quad (\mathrm{IV}d)$$
$$A^{dc} \subset A^{ddc} \subset A^{dcd},\quad (Б),\ (4d)$$
$$A\, A^{dc} \subset A^{dcd},\quad (Б),$$

отже,

$$A^{rcr} = A^{dcd}.$$

2. Деякі властивості операції A^m розглядав уже Гаусдорф (в наведених книгах). Усі вони випливають безпосередньо з аксіом I—V і з виведених з них формул. Наприклад, його теорема про те, що кожна частина ніде нещільної множини є також ніде нещільна, є безпосереднім висновком з теорем (T_4) і (T_5).

Справді, множина A є ніде нещільна тоді і тільки тоді, коли $A^{mm} = O$. Але з $B \subset A$ випливає $B^{mm} \subset A^{mm} = O$.

---

[1] Hausdorff: 1) Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 250; 2) Mengenlehre, 1927, стор. 139 (Гаусдорф позначає в першій з цих книг, стор. 251, множину A^m знаком Q).