Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

И. Г. СОКОЛОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

1. Пусть $f(x)$ непрерывная на промежутке $[0; 1]$ функция. Ее модуль непрерывности

$$\omega(t)=\sup_{|x_1-x_2|\leqslant t} |f(x_1)-f(x_2)|$$

есть функция, определенная на промежутке $[0; 1]$. Очевидно $\omega(t)$ не убывает, непрерывна, равна нулю при $t=0$ и при $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$

$$0\leqslant\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1). \tag{1}$$

Наоборот, непрерывная функция $\omega(t)$, равная нулю при $t=0$ и удовлетворяющая условию (1), есть модуль непрерывности (самой себя).

2. Обозначим через K_ω, где $\omega(t)$ есть некоторый модуль непрерывности, класс функций, определенных на промежутке $[0; 1]$ удовлетворяющих на этом промежутке условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega(|x_1-x_2|). \tag{2}$$

Пусть $B_n[f; x]$ есть полином Бернштейна n-го порядка, построенный для функции $f(x)$

$$B_n[f; x]=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \tag{3}$$

Рассмотрим верхнюю грань

$$E_n=E_n(K_\omega; x)=\sup_{f\subset K_\omega}|f(x)-B_n(f; x)| \tag{4}$$

уклонений функций f от их полиномов Бернштейна n-го порядка в точке x, распространенную на класс K_ω. Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Имеет место равенство

$$E_n[K_\omega; x]=\sum_{k=0}^{n}\omega\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \tag{5}$$

Асимптотическое значение $E_n[K_\omega; x]$ дается следующей теоремой.

Теорема 2.

$$E_n[K_\omega; x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1\left[\,|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right] e^{-\frac{t^2}{2}} dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right], \tag{6}$$

где $\omega_1(t) = \omega(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\omega_1(t) = 0$ при $t > 1$, α — произвольно малое положительное число.

Остаточный член ε_n понимается в том смысле, что существует некоторая константа C, не зависящая от n, но зависящая от x и α, что

$$|\varepsilon_n| < C\omega\left[\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right].$$

Эти теоремы являются обобщением результата, полученного мною ранее для частного случая $\omega(t) = t^\alpha$ [1] и обобщают результаты М. Кац и Попович (см. [6] и [7]).

3. Доказательству теоремы 1-й предпошлем лемму:

Лемма 1. Если непрерывная функция $f_x(t)$ удовлетворяет условию (2) на промежутке $(0; x)$ и $(x; 1)$ $0 < x < 1$ и в точке x достигает экстремума, то она удовлетворяет условию (2) и на всем промежутке $[0; 1]$. Доказательство этой леммы проводится совершенно так же, как и для частного случая $\omega(t) = t^\alpha$ [2].

Доказательство теоремы 1.

Пусть $f(t) \subset K_\omega$. Тогда функция

$$\varphi_x(t) = f(t) - f(x),$$

очевидно, также принадлежит к K_ω и обращается в нуль в точке x. Легко видеть, что

$$f(x) - B_n[f; x] = \varphi_x(x) - B_n[\varphi_x; x]. \tag{7}$$

Следовательно,

$$|f(x) - B_n(f; x)| = |B_n(\varphi_x; x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\varphi_x\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi_x(x)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

и в силу условия (2)

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{8}$$

С другой стороны, функция $\omega(|t-\omega|)$ удовлетворяет условию (2) на промежутках $[0; x]$ и $[x; 1]$ и в точке x достигает минимума. В силу леммы 1-й $\omega(|t-x|)$ принадлежит к классу K_ω.

Для этой функции в формуле (8) достигается знак равенства и, следовательно, теорема 1-я доказана.

4. Рассмотрим теперь некоторые свойства модуля непрерывности.

Лемма 2. Если $\omega(t)$ есть модуль непрерывности функции $f(x)$ не равной постоянной, то существует такая положительная постоянная H_ω, что для всех δ $[0 \leqslant \delta \leqslant 1]$

$$\omega(\delta) \geqslant H_\omega \delta. \tag{9}$$

Очевидно, достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\omega(\delta)}{\delta}>0.$$

Пусть, наоборот, $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}}\frac{\omega(\delta)}{\delta}=0$. Тогда существует последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, стремящаяся к нулю, такая что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n}=0. \tag{10}$$

Используя неравенство

$$k\cdot\omega(\delta)\geqslant\omega(k\delta), \tag{10a}$$

справедливое для целого k, получим:

$$\omega(1)=\lim_{n\to\infty}\omega\left(\left[\frac{1}{\delta_n}\right]\delta_n\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\delta_n}\right]\omega(\delta_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n}=0.$$

Таким образом, $\omega(\delta)$ тождественный нуль и, следовательно, $f(x)\equiv C$ Эта лемма по существу является небольшим видоизменением известного свойства модуля непрерывности (см. 3).

Лемма 3.

При любых δ_1 и δ_2 $(0\leqslant\delta_1\leqslant1)$; $(0\leqslant\delta_2\leqslant1)$ имеем

$$\omega(\delta_1\delta_2)\geqslant\frac{1}{2}\delta_1\cdot\omega(\delta_2). \tag{11}$$

В самом деле, пусть сначала $\delta_1=\frac{1}{k}$, где k целое. Тогда в силу (10а) получим:

$$k\omega\left(\frac{1}{k}\cdot\delta_2\right)\geqslant\omega(\delta_2);\ \omega\left(\frac{1}{k}\delta_2\right)\geqslant\frac{1}{k}\,\omega(\delta_2). \tag{11a}$$

Для произвольного δ_1 возьмем два последовательных целых числа, таких, что

$$\frac{1}{k-1}>\delta_1>\frac{1}{k}.$$

В силу того, что $\omega(t)$ монотонно не убывает, получим из (11а):

$$\omega(\delta_1\delta_2)\geqslant\omega\left(\frac{1}{k}\,\delta_2\right)\geqslant\frac{1}{k}\,\omega(\delta_2)=\delta_1\omega(\delta_2)\frac{1}{\delta_1 k}, \tag{11b}$$

но $\delta_1 k<1+\delta_1\leqslant2$. Следовательно, из (11b) получим (11).

Лемма 4. Если $\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, где ε сколь угодно малое положительное число, то

$$\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{e^{-\frac{t_k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi nx(1-x)}}(1+\alpha_n), \tag{12}$$

где

$$t_k = \frac{k - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \quad (0<x<1) \tag{13}$$

и

$$\alpha_n = O\left(n^{3\varepsilon - \frac{1}{2}}\right).$$

Формула (12), справедливая, как известно, для случая $|t_k| < A$ (где A постоянная), справедлива и для нашего случая. Доказательство этой леммы не отличается от доказательства локальной теоремы Лапласа в теории вероятностей (см., напр., Бернштейн. Теория вероятностей, ГТТИ, 1934, стр. 210-213).

Лемма 5. При всех $x(0<x<1)$ имеет место оценка

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}} e^{-\left(\frac{t_k}{2}\right)^2}, \tag{14}$$

где t_k определяется формулой (13) и k удовлетворяет обоим неравенствам

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \frac{1}{10} x; \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| < \frac{1}{10}(1-x).$$

Доказательство см. [4].

Лемма 6. Для всех n $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем оценку

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > n^{-\frac{1}{3}},} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{A_S}{n^S} \tag{15}$$

где S любое положительное число и A_S зависит только от S. Доказательство см. [5].

Доказательство теоремы 2.

Сумму, стоящую в правой части формулы (5), представим в виде

$$\sum_{k=0}^{n} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}} + \sum_{n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqslant \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant n^{-\frac{1}{3}}} +$$

$$+ \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > n^{-\frac{1}{3}}} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{16}$$

где ε некоторое, сколь угодно малое, положительное число.

Сумма I_1.

Согласно лемме 4-й имеем:

$$I_1 = \sum_{|t_k| < \frac{n^\varepsilon}{\sqrt{x(1-x)}}} \omega\left\{|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} \frac{e^{-\frac{t_k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} (1+\alpha_n) =$$

$$= \frac{1+\beta_n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t^k=A_n}^{B_n} \omega\left\{|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} e^{-\frac{t_k^2}{2}} \Delta t_k, \tag{17}$$

где $\beta_n = O(n^{3\varepsilon-\frac{1}{2}})$; $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$; A_n и B_n числа вида $\frac{k-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}$, A_n ближайшее большее, чем $-\frac{n^\varepsilon}{\sqrt{x(1-x)}}$, B_n ближайшее меньшее $\frac{n^\varepsilon}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Положим

$$B'_n = B_n + \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

Очевидно

$$A_n = O(n^\varepsilon); \quad B_n = O(n^\varepsilon); \quad B'_n = O(n^\varepsilon). \tag{18}$$

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k=A_n}^{B_n} \omega\left[|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right] e^{-\frac{t_k^2}{2}} \Delta t_k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n}^{B'_n} \omega\left\{|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Delta_n,$$

где

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k=A_n}^{B_n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{\omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t_k^2}{2}} - \right. \tag{19}$$

$$\left. - \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} dt \tag{20}$$

или, так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n}^{B'_n} \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt +$$

$$+ \Delta_n + o\,(e^{-kn^{2\varepsilon}}), \tag{21}$$

то, где k положительная постоянная, $\omega_1(t)=\omega(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\omega_1(t)=0$ при $t>1$. Мы получим в силу леммы 2-й из (19) и (21)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{t_k=A_n}^{B_n}\omega\left(|t_k|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)e^{-\frac{t_k^2}{2}}\Delta t_k=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_1\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\Delta_n+o\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{22}$$

Выражение Δ_n представим в виде:

$$\Delta_n=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{t_k=A_n}^{B_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\omega\left(|t_k|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)-\omega\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\right]\left(e^{-\frac{t_k^2}{2}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{t_k=A_n}^{B_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(e^{-\frac{t_k^2}{2}}-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\left[\omega\left(|t_k|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\omega\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\right]dt=\Delta'_n+\Delta''_n. \tag{23}$$

Так как в области интегрирования $|t_k-t|<\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$, мы получим согласно формуле (1)

$$\left|\omega\left(|t_k|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)-\omega\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\right|\leqslant\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

и поэтому

$$\Delta'_n<K_1\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{24}$$

С другой стороны, имеем в области интегрирования

$$e^{-\frac{t_k^2}{2}}-e^{-\frac{t^2}{2}}\leqslant\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t_k^2}{2}\right)e^{-\frac{t_k^2}{2}}<\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}|t|e^{-\frac{t_k^2}{2}}$$

и

$$\frac{1}{2}\left\{\omega\left(|t_k|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)+\omega\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\right\}<\omega\left(\xi\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),$$

где $\xi=\max(|t_k|;|t|)$.

Мы, принимая во внимание формулы (18), легко получим

$$|\Delta''_n|<K_2\,\omega(n^{\varepsilon-\frac{1}{2}})\,n^{-\frac{1}{2}}$$

($K_2>O$ — постоянная) или, используя опять лемму 3-ю,

$$|\Delta''_n|<\frac{K_2}{2}\omega[n^{-1+\varepsilon}]. \tag{25}$$

Замечая, наконец, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_1\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = O[\omega(n^{-\frac{1}{2}})], \tag{26}$$

из формул (17), (22), (23), (24), (25) и (26) получаем:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_1\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n^{1-3\varepsilon}}\right)\right]. \tag{27}$$

Сумма I_2.

Принимая во внимание лемму 5, получим для всех n таких, что

$$n^{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{10}x; \quad n^{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{10}(1-x)$$

$$I_2 = \sum_{n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqslant \left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant n^{-\frac{1}{3}}} \omega\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant n^{-\frac{1}{3}}} \omega\left|\frac{k}{n}-x\right| e^{-\frac{t_k^2}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}}\,\omega(n^{-\frac{1}{3}})\,e^{-\frac{n^{2\varepsilon}}{4x(1-x)}}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant n^{-\frac{1}{3}}} 1 < \frac{K_3}{n},$$

где K_3 постоянная, зависящая от ε и x. И, согласно лемме 2-й,

$$I_2 < K'_3\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{28}$$

Сумма I_3 оценивается непосредственно по лемме 6-й.

$$I_3 = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > n^{-\frac{1}{3}}} \omega\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} < \frac{C}{n} < D\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{29}$$

где C и D положительные постоянные.

Из формул (16), (27), (28) и (29) получаем

$$E_n[K_\omega; x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_1\left(|t|\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n^{1-3\varepsilon}}\right)\right]$$

и так как ε — сколь угодно малое положительное число, то теорема 2-я доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. І. Г. Соколов. — Про наближення функцій, що задовольняють умові Ліпшица поліномами Бернштейна. Наукові записки ЛДУ, том V, вип. 1-й, 1947.

2. С. М. Никольский. — Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами, Труды матем. Ин-та им. Стеклова, 1945.

3. Н. И. Ахиезер. — Лекции по теории апроксимаций, ОГИЗ, 1947.

4. Г. Лоренц. — К теории полиномов Бернштейна, Матем. сб., т. 2 (44), 3, 1937.

5. Л. Канторович. — О некоторых разложениях по полиномам Бернштейна, ДАН СССР, 1930, № 21, 22.

6. М. Кас. — Studia Mathematica, t. VII.

7. М. Кас. — Studia Mathematica, t. VIII.