Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

А. Н. КОСТОВСКИЙ

КВАДРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВИДА: $x=\varphi(u), y=\psi(v), z=f(u,v)$

Наиболее полно разработана теория квадрируемости поверхностей вида: $z=f(x,y)$. Весьма существенные и законченные результаты в теории площади этих поверхностей получил И. Я. Верченко в своей докторской диссертации [1][1].

В 1938 — 1947 гг. А. С. Кованько в работах [2], [3] исследовал квадрируемость некоторых частных видов непрерывных поверхностей, заданных параметрически, а именно: цилиндра, конуса, поверхности переноса и т. д.

Цель настоящей работы — исследовать квадрируемость одного общего класса непрерывных, неспрямляемых поверхностей, заданных параметрически в виде:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v).$$

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Рассмотрим на координатной плоскости uv произвольный прямоугольник $I_0=\underset{u,v}{E}\{a_1\leqslant u\leqslant b_1;\ a_2\leqslant v\leqslant b_2\}$ со сторонами, параллельными осям координат.

Пусть на прямоугольнике I_0 заданы три функции

$$\varphi(u,v),\ \psi(u,v),\ f(u,v), \tag{1,1}$$

однозначные и непрерывные по совокупности переменных.

Множество точек $\underset{x,y,z}{E}\{x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0\}$ будем называть *непрерывной поверхностью* S, заданную системой уравнений:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0. \tag{1,2}$$

В дальнейшем, конечно, не предполагается, что поверхность S на прямоугольнике I_0 не имеет двойных точек.

Непрерывную поверхность будем называть *полиэдром* и обозначать через $\boldsymbol{P}$, если ее можно представить однозначными, непрерывными функциями в виде:

$$\boldsymbol{P}:\ x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v);\ (u,v)\in I_0 \tag{1,3}$$

[1] В квадратных скобках указана литература, помещенная в конце настоящей статьи.

такими, что существует разбиение прямоугольника I_0 на конечное число треугольников[1], не пересекающих друг друга, на каждом из которых все три функции (1,3) — линейны относительно переменных u и v.

Обозначим эти треугольники через $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$.

Множество точек, которое в силу (1,3) соответствует треугольнику $\Delta_i \subset I_0$, будем называть *гранью* полиэдра $\boldsymbol{P}$ и обозначать через p^i $(i=1,2,\cdots,m)$.

Сумму площадей в смысле элементарной геометрии всех граней полиэдра $\boldsymbol{P}$ будем называть *площадью* полиэдра на I_0 и обозначать символом.

$$L(\boldsymbol{P}; I_0) \text{ или } L(x,y,z;I_0) = \sum_{i=1}^{m} |\, p^i \,|,$$

где $|\, p^i \,|$ обозначает площадь грани p^i полиэдра $\boldsymbol{P}$.

Функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют почти всюду в I_0 частные производные, то есть за исключением множества точек меры нуль, соответствующих граням и вершинам полиэдра.

Как известно, площадь полиэдра, заданного системой уравнений (1,3), выражается двойным классическим интегралом:

$$L(\boldsymbol{P}; I_0) = \iint\limits_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du\, dv \qquad (1,4)$$

Двойной интеграл равенства (1,4), а следовательно, и площадь полиэдра $L(\boldsymbol{P}; I_0)$ не зависят от параметрического представления полиэдральной поверхности $\boldsymbol{P}$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

2. Введем теперь понятие расстояния между двумя непрерывными поверхностями S и S_1 в смысле *Фреше*.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (1,2), а поверхность S_1 уравнениями:

$$x = \varphi_1(\bar{u},\bar{v}), y = \psi_1(\bar{u},\bar{v}), z = f_1(\bar{u},\bar{v}); (\bar{u},\bar{v}) \subset \bar{I}_0. \qquad (1,5)$$

Две односвязные области, ограниченные кривыми Жордана, как известно, можно бесчисленным множеством способов топологически[2] отобразить одну на другую. Пусть

$$T\colon \bar{u} = \alpha(u,v), \ \bar{v} = \beta(u,v)$$

есть одно из таких отображений прямоугольника I_0 в $\bar{I}_0$.

Обозначим символом

$$M_T = \max_{(u,v)\in I_0} \{[\varphi(u,v) - \varphi_1(\alpha(u,v), \beta(u,v))]^2 + [\psi(u,v) - \psi_1(\alpha(u,v), \beta(u,v))]^2 + $$
$$+ [f(u,v) - f_1(\alpha(u,v), \beta(u,v))]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

[1] Здесь не обязательно треугольники, но практически это наиболее удобная фигура, тем более, что всякий многоугольник в плоскости uv можно всегда разбить на треугольники.

[2] Здесь лучше — „гомеоморфно“.

Точную нижнюю грань величин M_T при всевозможных топологических отображениях T прямоугольника I_0 в $\overline{I}_0$ будем называть *расстоянием* между поверхностями S и S_1 в смысле *Фреше* на I_0 и обозначать символом: $[S,S_1]$

В силу определения расстояния между двумя поверхностями, имеем:

$$[S,S_1]=[S_1,S]\geqslant 0,\ [S,S]=0,$$
$$[S,S_2]\leqslant[S,S_1]+[S_1S_2]. \tag{1,6}$$

Будем говорить, что последовательность $\{S_n\}$ непрерывных поверхностей (в частности полиэдров) сходится к поверхности S, если

$$\lim_{n\to\infty}[S,S_n]=0.$$

Пусть $\{\boldsymbol{P}_n\}$ — последовательность полиэдров сходится к поверхности S, заданной системой уравнений (1,2).

$\lim\limits_{n\to\infty}L(\boldsymbol{P}_nI_0)$ может не существовать, но всегда существует $\underline{\lim}_{u\to\infty}L(\boldsymbol{P}_n,I_0)$, равный конечному или бесконечному значению.

Определение.

Нижняя грань значений $\underline{\lim}_{n\to\infty}L(\boldsymbol{P}_n,I_0)$ для всевозможных последовательностей полиэдров, сходящихся к поверхности S, т. е. $\inf\limits_{\text{по}\{P_n\}}\{\underline{\lim}_{n\to\infty}L\ (\boldsymbol{P}_n,I_0)\}$, называется *площадью* поверхности в смысле *Лебега* и обозначается символом:

$$L(S,I_0)\ \text{или}\ L(f,\varphi,\psi;I_0).$$

Как явствует из определения, площадь поверхности в смысле Лебега есть функция полунепрерывная снизу; площадь не зависит от параметрического представления поверхности S и, если $[S_1,S_2]=0$, то $L(S_1,I_0)=L(S_2,I_0)$.

Из определения площади поверхности в смысле Лебега немедленно следуют теоремы.

Теорема (1,I)

Пусть последовательность $\{S_n\}$ непрерывных поверхностей, выраженных системой уравнений:

$$x=\varphi_n(u,v),\ y=\psi_n(u,v),\ z=f_n(u,v);\ (u,v)\in I_0,\ n=1,2,3,\ldots$$

сходится к непрерывной поверхности S, заданной системой уравнений (1,2), тогда имеют место следующие неравенства:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(S_n;I_0)\geqslant L(S;I_0) \tag{1,7}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}L(f_n,\varphi_n,\psi_n;I_0)\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}L(f_n,\varphi,\psi;I_0)\geqslant L(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{1,8}$$

Теорема (1,II).

Пусть дана непрерывная поверхность S. Тогда существует такая последовательность полиэдров $\{\boldsymbol{P}_n\}$, сходящаяся к поверхности S, что:

$$L(S,I_0)=\lim_{n\to\infty}L(\boldsymbol{P}_n,I_0).$$

§ 2. ВВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

1. Рассмотрим сначала квадрируемость непрерывных поверхностей вида:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0=\underset{u,v}{E}\{a_1\leqslant u\leqslant b_1;\ a_2\leqslant v\leqslant b_2\},\quad (2,1')$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица. Поэтому во всех вспомагательных теоремах §§ 2 — 5 этого раздела мы можем считать, что функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица. Но все же некоторые теоремы из этих параграфов мы докажем для поверхностей с накладыванием более слабых ограничений на функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, чем условие Липшица, а именно:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0,\quad (2,1)$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — ограниченной вариации соответственно на отрезках $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$.

Определение I.

Будем говорить, что функция $f(u,v)$ *ограниченной вариации* в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на прямоугольнике I_0 если:

а) почти для каждого значения $\bar{u}\in[a_1,b_1]$ и $\bar{v}\in[a_2,b_2]$ функции $f(\bar{u},v)$ и $f(u,\bar{v})$ имеют ограниченную вариацию соответственно по переменным $v\in[a_2,b_2]$ и $u\in[a_1,b_1]$. Обозначим эти вариации соответственно через $\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,\bar{u})$ и $\overset{b_1}{\underset{a_1}{V}}(f,\bar{v})$;

$$\int_{a_1}^{b_1}\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,\bar{u})\,d\overset{\bar{u}}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)<\infty;\ \int_{a_2}^{b_2}\overset{b_1}{\underset{a_1}{V}}(f,\bar{v})\,d\overset{\bar{v}}{\underset{a_2}{V}}(\psi)<\infty,$$

Определение II.

Будем говорить, что функция $f(u,v)$ *абсолютно непрерывна* в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на прямоугольнике I_0, если:

а) почти для каждого значения $\bar{u}\in[a_1,b_1]$ и $\bar{v}\in[a_2,b_2]$ функции $f(\bar{u},v)$ и $f(u,\bar{v})$ — абсолютно непрерывны соответственно по переменным $v\in[a_2,b_2]$ и $u\in[a_1,b_1]$;

б) функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0 относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

2. Поставим в соответствие непрерывной поверхности S, заданной системой уравнений (2,1) на прямоугольнике $I=\{\alpha_1\leqslant u\leqslant\beta_1;\ \alpha_2\leqslant v\leqslant\beta_2\}\in I_0$ выражения, аналогичные выражениям, введенным в теорию

измерения площади поверхностей вида: $z=f(x,y)$ венгерским математиком З. Гетце в 1916 г.[1]

$$G_1(f,\varphi;I)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} |f(u,\beta_2)-f(u,\alpha_2)|\, d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi),$$

$$G_2(f,\psi;I)=\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} |f(\beta_1,v)-f(\alpha_1,v)|\, d\overset{v}{\underset{\alpha_2}{V}}(\psi), \tag{2,2}$$

$$G_3(\psi,\varphi;I)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} |\psi(\beta_2)-\psi(\alpha_2)|\, d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)=|\psi(\beta_2)-\psi(\alpha_2)|\overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi),$$

$$G(f,\varphi,\psi;I)=\{[G_1(f,\varphi;I)]^2+[G_2(f,\psi;I)]^2+[G_3(\psi,\varphi;I)]^2\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2,3}$$

Если функции f,φ,ψ фиксированы, то иногда будем писать: $G_1(f,\varphi;I)=G_1(I)$, $G_2(f,\psi;I)=G_2(I)$, $G_3(\psi,\varphi;I)=G_3(I)$,

$$G(f,\varphi,\psi;I)=G_0(I)=G(I).$$

Теорема (2,I).

Для непрерывной поверхности S, заданной системой уравнений (2,1), выражения $G_i(I)$, $i=0,1,2,3$ — есть непрерывные функции прямоугольника $I\in I_0$.

Доказательство.

Доказательство проведем для функции $G_1(f,\varphi;I)$. Функции $f(u,v)$ и $\varphi(u)$ — непрерывны по предположению, следовательно, непрерывна и полная вариация $V(\varphi)$ функции, поэтому для любого положительного числа ε существует такое число $\eta>0$, что для каждой пары значений $v_1,v_2\in[a_2,b_2]$ и $u_1,u_2\in[a_1,b_1]$ неравенства $|v_2-v_1|<\eta$ и $|u_2-u_1|<\eta$ влекут одновременно неравенства

$$|f(u,v_2)-f(u,v_1)|<\varepsilon \tag{2,4}$$

$$\overset{u_2}{\underset{u_1}{V}}(\varphi)<\varepsilon.$$

Обозначим через M — верхнюю грань функции $f(u,v)$ на прямоугольнике I_0,

Возьмем теперь произвольный прямоугольник

$$I=\underset{u,v}{E}\{\alpha_1\leqslant u\leqslant\beta_1;\ \alpha_2\leqslant v\leqslant\beta_2\}\in I_0$$

с площадью меньше η, т. е. $|I|<\eta$, тогда или $|\beta_1-\alpha_1|<\eta$ или $|\beta_2-\alpha_2|<\eta$. В первом случае, в силу (2,4), имеем:

$$G_1(f,\varphi;I)\leqslant 2M\cdot\overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)\leqslant 2M\varepsilon,$$

[1] **Гетце.** О спрямляемых поверхностях (на венгерском яз.), Math. ès term. tud. ertesitö, T. 34, стр. 337—354. (1916)

а во втором случае, находим:

$$G_1(f,\varphi;I) < \varepsilon \overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) \leqslant \overset{b_1}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)\,\varepsilon.$$

Так что в обоих случаях неравенство $|I| < \eta$ влечет неравенство $G_1(f,\varphi;I) < \left(2M + \overset{b_1}{\underset{a_1}{V}}\right)\varepsilon$. В силу произвольности числа ε следует справедливость теоремы.

Доказательство непрерывности функции $G_2(f,\psi;I)$ прямоугольника производится аналогично. Для $G_3(\psi,\varphi;I)$ теорема-очевидна.

Наконец, непрерывность функций $G_1(I)$, $C_2(I)$ и $G_3(I)$ в силу (2,3) немедленно влечет непрерывность функции $G(f,\varphi,\psi;I)$ прямоугольника $I \in I_0$.

Обозначим через $\boldsymbol{I}_n = \{I_k\}_{k=1,2,\ldots,n}$ произвольное подразделение прямоугольника $I = \underset{u,v}{E}\{\alpha_1 \leqslant u \leqslant \beta_1;\ \alpha_2 \leqslant v \leqslant \beta_2\}$ на более мелкие прямоугольники $I_1, I_2, \ldots, I_n$, со сторонами, параллельными осям координат, эти прямоугольники полностью покрывают прямоугольник I и попарно не перекрываются между собой. Обозначим диаметр подразделения $\boldsymbol{I}_n$ (т. е. наибольшую из диагоналей прямоугольников $I_1, I_2, \ldots I_n$,) через $\delta(\boldsymbol{I}_n)$.

Введем обозначение:

$$G_i(\boldsymbol{I}_n) = \sum_{k=1}^{n} G_i(I_k),\ i = 0,1,2,3.$$

Теорема (2,II).

Пусть $\boldsymbol{I}_n = \{I_k\}_{k=1,2,\ldots,n}$ произвольное подразделение прямоугольника $I = \underset{u,v}{E}\{\alpha_1 \leqslant u \leqslant \beta_1;\ \alpha_2 \leqslant v \leqslant \beta_2\} \in I_0$, тогда имеют место неравенства:

$$G_i(I) \leqslant G_i(\boldsymbol{I}_n),\ i = 0,1,2,3. \tag{2,5}$$

Доказательство.

Докажем справедливость теоремы для $G_1(f,\varphi;I)$. Для этого в подразделении $\boldsymbol{I}_n$ продолжим все стороны прямоугольников $I_1, I_2, \ldots, I_n$, параллельные координатной оси ov, до пересечения со сторонами прямоугольника I. Пусть эти прямые пересекут стороны прямоугольника I в точках с абсциссами $u_0 = \alpha_1,\ u_1,\ u_2,\ \ldots, u_q = \beta_1$. Прямоугольник I подразделится на полосы-прямоугольники

$$J_i = \underset{u,v}{E}\{u_i \leqslant u \leqslant u_{i-1};\ \alpha_2 \leqslant v \leqslant \beta_2\},\ i = 1, 2, \ldots, q;\ I = \sum_{i=1}^{q} J_i.$$

При этом, некоторые из прямоугольников $I_1, I_2 \ldots, I_n$ подразделения $\boldsymbol{I}_n$, подразделяются прямыми, проведенными выше, на более мелкие прямоугольники; обозначим подразделение прямоугольника I_k через $I_k^{(1)}$, $I_k^{(2)}, \ldots, I_k^{(p_k)}$, где $p_k \geqslant 1$, причем:

$$I_k = \sum_{j=1}^{p_k} I_k^{(j)}.$$

Если произвольный прямоугольник $\bar{I} \in I_0$ разделить на два прямоугольника $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ прямой, параллельной **оси** ov, то в силу равенства (2,2), получим:

$$G_1(f,\varphi;\bar{I}_1+\bar{I}_2)=G_1(f,\varphi;\bar{I}_1)+G_1(f,\varphi;\bar{I}_2), \tag{2,6}$$

если же разделить прямой, параллельной **оси** ou, то в силу того же равенства, находим:

$$G_1(f,\varphi;\bar{I}_1+\bar{I}_2)\leqslant G_1(f,\varphi;\bar{I}_1)+G_1(f,\varphi;\bar{I}_2). \tag{2,7}$$

В силу (2,6), имеем:

$$G_1(f,\varphi;I)=\sum_{i=1}^{q} G_1(f,\varphi;J_i) \tag{2,8}$$

Каждый из прямоугольников J_k подразделен, в свою очередь, сторонами прямоугольников подразделения I_n, параллельными оси ou, на более мелкие прямоугольники

$$J_k^{(1)},\ J_k^{(2)},\dots,J_k^{(r_k)},r_k\geqslant 1.$$

Очевидно, что прямоугольники $J_\kappa^{(1)},J_\kappa^{(2)},\dots,J_\kappa^{(r_\kappa)}$, $k=1,2,\dots,q$ есть только другое обозначение прямоугольников

$$I_k^{(1)},\ I_k^{(2)},\dots,I_k^{(p_k)},\ k=1,2,\dots,n;\ \sum_{k=1}^{q} r_k=\sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Применяя к каждому из прямоугольников J_k неравенство (2,7), получим:

$$G_1(f,\varphi,J_k)\leqslant\sum_{j=1}^{r_k} G_1(f,\varphi;J_\kappa^{(j)}),\ k=1,2,\dots,q. \tag{2,9}$$

На основании (2,8), (2,9) и последнего замечания, имеем:

$$G_1(f,\varphi;I)\leqslant\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{r_k} G_1(f,\varphi;J_\kappa^{(j)})=\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k} G_1(f,\varphi;I_\kappa^{(j)}).$$

Наконец, группируя вместе прямоугольники $I_\kappa^{(1)},I_\kappa^{(2)},\dots,I_\kappa^{(p_k)}$, составляющие прямоугольник I_κ, и, применяя равенство (2,6), получим:

$$G_1(f,\varphi,I)\leqslant\sum_{\kappa=1}^{n} G_1(f,\varphi;I_\kappa)=G_1(f,\varphi;I_n).$$

Аналогично производится доказательство неравенства (2,5) для $G_2(f,\psi;I)$, для $G_3(\psi,\varphi;I)$, — оно тривиально.

Применяя затем известное неравенство

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2,10}$$

немедленно получим:

$$G(f,\varphi,\psi;I) \leqslant G(f,\varphi,\psi;I_n). \tag{2,11}$$

Теорема доказана полностью.

Пусть дана последовательность подразделений $\{I_n\}$ прямоугольника $I \in I_0$ с одним условием, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(I_n) = 0$. Если для каждого k подразделение I_k является продолжением подразделения I_{k-1}, то на основании теоремы (2,II) выражение $G_i(I_n), i=0,1,2,3$ не убывает при возрастании числа подразделений n, следовательно, каждое из выражений $G_i(I_n), i=0,1,2,3$ сходится к своему пределу — конечному или бесконечному, обозначим его соответственно через $H_i(I)$, $i=0,1,2,3$

Теорема (2, III).

Каждая из последовательностей $\{G_1(I_n)\}, \{G_2(I_n)\}, \{G_3(I_n)\}$ и $\{G(I_n)\}$ сходятся соответственно к пределу: $H_1(f,\varphi;I)$, $H_2(f,\psi,I)$, $H_3(\psi,\varphi;I)$ и $H(f,\varphi,\psi;I)$ при $n\to\infty$ и $\delta(I_n)\to 0$. Эти пределы не зависят от последовательностей подразделений $\{I_n\}$ [прямоугольника $I\in I_0$] со свойствами:

$$\lim_{n\to\infty} \delta(I_n) = 0.$$

Доказательство.

Будем теперь рассматривать последовательности подразделений, у которых каждое подразделение не обязательно является продолжением предыдущего.

Пусть последовательность $\{I_n\}$ подразделений прямоугольника $I = \underset{u,v}{E}\{\alpha_1 \leqslant u \leqslant \beta_1;\ \alpha_2 \leqslant v \leqslant \beta_2\}$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \delta(I_n) = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} G_1(I_n) = H_1(I).$$

Обозначим через $\Phi_n(\bar{u}), \alpha_1 \leqslant \bar{u} \leqslant \beta_1$ сумму абсолютных величин приращений функции $f(\bar{u},v)$ на отрезках, на которые сечется прямая $u=\bar{u}$ прямоугольниками подразделения I_n.

С одной стороны, имеем:

$$G_1(I_n) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Phi_n(\bar{u})\, d\overset{\bar{u}}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)$$

для любого $n=1,2,\ldots$

С другой стороны, в силу непрерывности функции $f(u,v)$, можем записать:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{u}) = \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,\bar{u}).$$

Применяя лемму Фату [4, гл. 1, § 12], можем записать в силу двух предыдущих соотношений:

$$H_1(I) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,\bar{u})\, d\overset{\bar{u}}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi). \tag{2,12}$$

Но для каждого подразделения $\boldsymbol{I}$ прямоугольника $I \in I_0$, имеем очевидно:

$$G_1(\boldsymbol{I}) \leqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}} (f, \bar{u}) d \overset{\bar{u}}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi).$$

Следовательно:

$$\overline{H}_1(I) \leqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}} (f, \bar{u}) d \overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi). \qquad (2,13)$$

На основании неравенства (2,12) и (2,13), получаем:

$$H_1(I) = \underline{H}_1(I) = \overline{H}_1(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}} (f, \bar{u}) d \overset{\bar{u}}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi). \qquad (2,14)$$

Аналогично получим:

$$H_2(I) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}} (f, \bar{v}) d \overset{\bar{v}}{\underset{\alpha_2}{V}} (\psi); \quad H_3(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}} (\psi) d \overset{\bar{u}}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi) = \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}} (\psi) \overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi).$$

Для доказательства справедливости теоремы для $G(f, \varphi, \psi; I)$ необходимо предварительно установить некоторые неравенства.

В силу (2,3) имеем:

$$\left.\begin{matrix} G_1(I) \leqslant \\ G_2(I) \leqslant \\ G_3(I) \leqslant \end{matrix}\right\} G(I) \leqslant G_1(I) + G_2(I) + G_3(I).$$

Отсюда для любого подразделения $\boldsymbol{I}$ прямоугольника I_0, находим

$$\left.\begin{matrix} G_1(\boldsymbol{I}) \leqslant \\ G_2(\boldsymbol{I}) \leqslant \\ G_3(\boldsymbol{I}) \leqslant \end{matrix}\right\} G(\boldsymbol{I}) \leqslant G_1(\boldsymbol{I}) + G_2(\boldsymbol{I}) + G_3(\boldsymbol{I}).$$

Переходя к пределу, получим:

$$\left.\begin{matrix} H_1(I_0) \leqslant \\ H_2(I_0) \leqslant \\ H_3(I_0) \leqslant \end{matrix}\right\} \underline{H}(I_0) \leqslant \overline{H}(I_0) \leqslant H_1(I) + H_2(I) + H_3(I). \qquad (2,15)$$

Определение.

Вариацией функции $G(I)$ прямоугольника I *вдоль отрезка* D, параллельного координатной оси ou или ov и принадлежащего прямоугольнику I, будем называть число

$$W_I(G, D) = \overline{\lim_{\substack{Q \in I \\ \delta Q \to 0}}} |G(\boldsymbol{Q})|,$$

где $\boldsymbol{Q}$ семейство прямоугольников из подразделения $\boldsymbol{I}_n$ прямоугольника I, имеющие общие точки с отрезком D, и $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(\boldsymbol{I}_n) = 0$.

Из этого определения следует, что при $\overline{H}(f,\varphi,\psi;I_0)<\infty$ множество отрезков $D\in I_0$, параллельных координатным осям ou и ov, вдоль которых

$$W_{I_0}(G,D)>0 \tag{2,16}$$

не больше чем счетное множество.

Действительно, множество отрезков D, параллельных осям координат, для которых $W_{I_0}(G,D)>\frac{1}{n}$ не больше, чем $n.\overline{H}(f,\varphi,\psi;I_0)<\infty$. Следовательно, утверждение (2,16) — справедливо.

Переходим теперь к доказательству теоремы (2,I) для выражения $G(f,\varphi,\psi;I)$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем такое подразделение $J=\{J_k\}_{k=1,2,\ldots,m}$ прямоугольника

$$I=\underset{u,\,v}{E}\{\alpha_1\leqslant u\leqslant\beta_1;\ \alpha_2\leqslant v\leqslant\beta_2\}\in I_0,$$

чтобы имело место неравенство:

$$G(f,\varphi,\psi;J)>\overline{H}(f,\varphi,\psi;I)-\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2,17}$$

Очевидно, что в силу (2,15) предел $H(f,\varphi,\psi;I)$ существует в случае, когда по крайней мере один из пределов $H_1(f,\varphi;I)$, $H_2(f,\psi;I)$, $H_3(\psi,\varphi;I)=\infty$, и что он тоже равен $+\infty$.

Остается рассмотреть случай, когда $H_i(I)<\infty$, $i=1,2,3$, тогда в силу неравенства (2,15), имеем:

$$\overline{H}(f,\varphi,\psi;I)<\infty. \tag{2,18}$$

Обозначим через $D_1, D_2, \ldots, D_r$ все стороны прямоугольников подразделения J, исключая стороны прямоугольника I. В силу непрерывности функции $G(I)$, неравенства (2,18) и замечания, относящегося к неравенству (2,16), можно положить вариацию функции $G(I)$ вдоль каждой из сторон прямоугольников равной нулю [при надлежащем выборе подразделения J].

Отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\eta>0$, что для произвольной, конечной системы Q прямоугольников, принадлежащих прямоугольнику I, попарно неперекрывающихся и каждый из которых имеет общие точки со сторонами $D_1, D_2, \ldots, D_r$ прямоугольников, неравенство $\delta(Q)<\eta$ влечет неравенство

$$G(f,\varphi,\psi;Q)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2,19}$$

Можно предположить, что η не превышает длины ни одной из сторон $D_1, D_2, \ldots, D_r$ прямоугольников подразделения.

Установив это, рассмотрим произвольное подразделение $I=\{I_k\}_{k=1,2,\ldots,n}$ прямоугольника I с одним условием $\delta(I)<\eta$.

Разделим прямоугольники подразделения I на два класса: а) к классу I' отнесем прямоугольники, которые имеют общие точки со сторонами $D_1, D_2, \ldots, D_r$ прямоугольников подразделения J. Видоизменив соответственно обозначение в подразделении I, мы всегда можем положить, что класс I' состоит из прямоугольников $I_1, I_2, \ldots, I_q$; б) к классу I'' отнесем все остальные прямоугольники подразделения $\boldsymbol{I}$, очевидно, это будут прямоугольники, каждый из которых целиком принадлежит одному из прямоугольников подразделения $\boldsymbol{J}$.

Условимся писать: $G(f,\varphi,\psi;(J_i I_k))=0$, если $J_i I_k=0$.

На основании (2,19) можем записать:

$$G(f,\varphi,\psi;\boldsymbol{I}')<\frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу последнего неравенства и неравенства (2,19) имеем:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q}G(J_i I_k)<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{2,20}$$

где в качестве прямоугольников служат прямоугольники класса $\boldsymbol{I}'$, разбитые сторонами $D_1,D_2,\ldots,D_r$ на более мелкие.

Таким образом, на основании неравенств (2,11), (2,17) и (2,20), получаем:

$$\overline{H}(f,\varphi,\psi;I_0)-\frac{\varepsilon}{3}<G(\boldsymbol{J})\leqslant G(\boldsymbol{I})+\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{q}G(J_i I_k)-\sum_{k=1}^{q}G(I_k)\right]\leqslant G(\boldsymbol{I})+ + \frac{2}{3}\varepsilon .$$

Так как последнее неравенство справедливо для каждого подразделения $\boldsymbol{I}$ прямоугольника I с $\delta(\boldsymbol{I})<\eta$, то:

$$\overline{H}(I)<\underline{H}(I)-\varepsilon.$$

Наконец, в силу произвольности числа ε получаем:

$$H(I)=\overline{H}(I)=\underline{H}(I).$$

Теорема (2,III) доказана полностью.

Теорема (2,IV).

Для того, чтобы выражение $H(f,\varphi,\psi;I)$, соответствующее непрерывной поверхности S, заданной системой уравнений (2,1), имело конечное значение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(u,v)$ была ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, которые по условию также имеют ограниченную вариацию на I_0.

Из неравенств (2,5) для любого прямоугольника $I\in I_0$ немедленно следует:

$$G_i(I)\leqslant H_i(I), i=0,1,2,3. \tag{2,21}$$

§ 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $H_1(I)$, $H_2(I)$, $H_3(I)$ и $H(I)$ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема (3,I).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0.$$

Если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ ограниченной вариации, а функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, тогда соответствующие выражения $H_1(f,\varphi;I)$, $H_2(f,\psi;I)$, $H_3(\psi,\varphi;I)$ и $H(f,\varphi,\psi;I)$ есть аддитивные, непрерывные и неотрицательные функции прямоугольника $I \in I_0$ и имеет место равенство:

$$H'_3(u,v) = \left|\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right| = |\psi'(u)\cdot\varphi'(v)| \tag{3,1'}$$

почти всюду в I_0.

Если, кроме того, функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, то справедливы почти всюду в I_0 следующие равенства:

$$H'_1(u,v) = \left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'(u)\right|; H'_2(u,v) = \left|\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\psi'(v)\right|, \tag{3,1}$$

$$H'(u,v) = \left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'(u)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\psi'(v)\right]^2 + \left[\varphi'(u)\cdot\psi'(v)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3,2}$$

Доказательство.

Доказательство аддитивности и непрерывности производится очень просто, поэтому мы его опускаем.

Покажем справедливость равенств (3,1).

Пусть прямоугольник $I = \underset{u,v}{E}\{\alpha_1 \leqslant u \leqslant \beta_1;\ \alpha_2 \leqslant v \leqslant \beta_2\} \in I_0$, тогда для любого значения $u \in [\alpha_1, \beta_1]$, в силу теорем [4; гл. IV, § 7, теор. (7,4) и (7,9)], имеем:

$$\overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u) \geqslant \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \overset{v}{\underset{\alpha_2}{V}}{}'(f,u)\,dv = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right| dv. \tag{3,3}$$

На основании теоремы Фубини [4; гл. III, § 8, т. (8,1)] получим:

$$H_1(f,\varphi;I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\, d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| dv\right] d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \cdot \overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}{}'(\varphi)\,du\,dv.$$

Применяя теорему [4; гл. IV, § 7, т. (7,9)], находим:

$$H_1(f,\varphi;I) \geqslant \iint_I \left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'\right| du\,dv.$$

Отсюда:

$$H'_1(u,v) \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'\right| \tag{3,4}$$

почти всюду в I.

Пусть $\{J_n\}$ — последовательность интервалов из $[a_2,b_2]$ с рациональными концами. Тогда согласно теорем [4; гл. III, § 8, т. (8,1); гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)] для каждого $n=1,2,\ldots$ получим:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\, d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\,|\varphi'|\, du = H_1(f,\varphi;I) = \iint_I H'_1(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} H'_1(u,v)\, dv\right] du.$$

Итак, для каждого интервала J_n имеем:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\,|\varphi'|\, du = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{J_n} H'_1(u,v)\, dv\right] du.$$

Отсюда:

$$\overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\,|\,\varphi'\,| \geqslant \int_{J_n} H'_1(u,v)\, dv$$

почти для каждого значения $u \in [a_1,b_1]$.

Пусть E_n — множество всех точек $u \in [a_1,b_1]$, для которых последнее неравенство несправедливо. Положим $E = \underset{(n)}{\Sigma} E_n$; так как $|E_n| = 0$, то и $|\,E\,| = 0$. Итак, неравенство

$$\overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\,|\,\varphi'\,| \geqslant \int_J H'_1(u,v)\, dv$$

выполняется для всех подинтервалов $J \in [a_2,b_2]$ с рациональными концами и для каждой точки $u \in [a_1,b_1]$, исключая точки множества E.

Если теперь рассматривать для каждого значения u, не принадлежащего множеству E, два члена этого неравенства как функции интервала J, то получим посредством дифференцирования по отношению к этому интервалу неравенство, справедливое почти для каждого значения $v \in [a_2,b_2]$.

$$V'(f,u)\,|\,\varphi'(u)| \doteq \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \cdot |\varphi'(u)| \geqslant H'_1(u,v). \tag{3,5}$$

Производные $H'_1\ (u,v)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, как известно, есть измеримые функции, поэтому в силу теоремы Фубини [4; гл. III, § 8, т. (8,6)] заключаем, что множество точек (u,v), где неравенство (3,5) не выполняется, имеет плоскую меру нуль.

Неравенства (3,4) и (3,5) показывают справедливость первого равенства в (3,1), доказательство второго равенства в (3,1) производится аналогично.

Покажем теперь справедливость равенства (3,1′). В этом случае предполагается, что функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ имеют ограниченную вариацию соответственно на (a_1,b_1) и (a_2,b_2) (если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, то справедливость равенства (3,1′) следует из теоремы [4; гл. III, § 12, т. (12,1)].

В силу теорем [4; гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)] можем записать:

$$\overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)\,du = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |\varphi'|\,du;\ \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(\psi) \geqslant \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \overset{v}{\underset{\alpha_2}{V}}(\psi)\,dv = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} |\psi'|\,dv, \qquad (3,6)$$

тогда:

$$H_3(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(\psi)\,d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) = \overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)\overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(\psi) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |\varphi'|\,du \cdot \int_{\alpha_2}^{\beta_2} |\psi'|\,dv =$$

$$= \iint_I |\psi'\varphi'|\,du\,dv.$$

Отсюда:

$$H'_3(u,v) \geqslant |\psi'(v)\cdot\varphi'(u)| \qquad (3,7)$$

почти всюду в I_0.

Повторяя дальше рассуждение, аналогичное приведенному выше для $H_1(I)$, получим:

$$H_3'(u,v) \leqslant |\psi'(v)\cdot\varphi'(u)| \qquad (3,8)$$

всюду в I_0, исключая множество точек $(u,v)\in I_0$ с плоской мерой, равной нулю. Из неравенств (3,7) и (3,8) следует наша теорема.

В силу равенств (3,1), (3,1′) и теоремы [4; гл. VI, § 3, т. (3,8)], можем записать:

$$G'_1(u,v) = H'_1(u,v) = \left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right|,\quad G'_2(u,v) = H'_2(u,v) = \left|\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right|$$

$$G'_3(u,v) = H'_3(u,v) = \left|\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}\right|$$

почти всюду в I_0.

Отсюда на основании теоремы [4: гл. V, § 3, т. (3,8)], равенства (2,3) и определения производной от функции прямоугольника, следует:

$$H'(u,v) = G'(u,v) = \{[G'_1(u,v)]^2 + [G'_2(u,v)]^2 + [G'_3(u,v)]^2\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'(u)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\psi'(v)\right]^2 \left[\psi'(v)\cdot\varphi'(u)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

почти всюду в I_0.

Теорема (3,1) полностью доказана.

Теорема (3,II).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0,$$

где $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — функции с ограниченной вариацией.

Тогда:

1) если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f(u,v)$ абсолютно непрерывны, то функция $H(f,\varphi,\psi;I)$ прямоугольника I абсолютно непрерывна на I_0, и имеет место равенство:

$$H(f,\varphi,\psi;I_0)=\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}du\,dv=$$

$$\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\psi'\right]^2+\left[\psi'\varphi'\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}du\,dv;\qquad(3,9)$$

2) и обратно, если $H(f,\varphi,\psi;I)$ абсолютно непрерывна, тогда функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, соответственно на $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$, а функция $f(u,v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ почти всюду на множестве (I_0-E), где E — множество точек из I_0, в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю.

При этом равенство (3,9) остается справедливым.

Доказательство.

Из неравенства (2,15) легко убедиться, что если $H_i(I)\cdot i=1,\ 2,\ 3$ абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывна и функция $H(I)$ прямоугольника I и наоборот.

Докажем первую часть теоремы.

Пусть $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, а функция $f(u,v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, тогда, применяя теоремы [4; гл. III. § 8, т. (8,1); гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)], (3,I) для любого прямоугольника $I=\underset{u,v}{E}\{\alpha_1\leqslant u\leqslant\beta_1,\ \alpha_2\leqslant v\leqslant\beta_2\}\in I_0$, можем записать:

$$H_1(f,\varphi;I)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\overset{\beta_2}{\underset{\alpha_2}{V}}(f,u)\,d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta}\left[\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2}\overset{v}{\underset{\alpha_1}{V'}}(f,u)\,dv\right]\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V'}}du=$$

$$=\iint\limits_{I}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'\right|du\,dv=\iint\limits_{I}H'_1(u,v)\,du\,d\,v.$$

Аналогично:

$$H_2(f,\psi;I)=\iint\limits_{I}H'_2(u,v)\,du.dv\,.$$

Абсолютная непрерывность функции $H_3(\psi,\varphi;I)$ прямоугольника I следует также, например, в силу теоремы [4; гл. III, § 12, т. (12,1)]. Отсюда заключаем, что функции прямоугольника I:

$H_1(f,\varphi;I)$, $H_2(f,\psi;I)$, $H_3(\psi,\varphi;I)$ абсолютно непрерывны, следовательно $H(f,\varphi,\psi;I)$ — также абсолютно непрерывна на I_0.

Справедливость равенства (3,9) следует в силу теорем (3,I) и [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)].

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Пусть теперь функция $H(f,\varphi,\psi;I)$ — абсолютно непрерывна на I_0, тогда в силу сделанного замечания функции $H_1(I)$, $H_2(I)$, $H_3(I)$ также абсолютно непрерывны на I_0.

Согласно теоремам (3,I) [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], для произвольного прямоугольника $I_\xi = \underset{u,v}{E}\{a_1 \leqslant u \leqslant \xi;\ a_2 \leqslant v \leqslant b_2\}$, где $a_1 \leqslant \xi \leqslant b_1$, имеем равенство:

$$H_3(I_\xi) = \int_{a_1}^{\xi}\int_{a_2}^{b_2} H'_3(u,v)\,du\,dv = \int_{a_1}^{\xi}\int_{a_2}^{b_2} |\psi'\varphi'|\,du\,dv = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'|\,du \cdot \int_{a_2}^{b_2} |\psi'|\,dv,$$

Отсюда, в силу (2,14), имеем:

$$\overset{\xi}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)\cdot \overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(\psi) = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'|\,du \cdot \int_{a_2}^{b_2} |\psi'|\,dv.$$

Из неравенства (3,6) заключаем:

$$\overset{\xi}{\underset{a_1}{V}}(\varphi) = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'|\,du;\quad \overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(\psi) = \int_{a_2}^{b_2} |\psi'|\,dv. \tag{3,10}$$

Функция $\psi(v)$ ограниченной вариации, поэтому разность

$$\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(\psi) - \int_{a_2}^{\eta} |\psi'|\,dv$$

— неотрицательная и неубывающая функция относительно переменной η, где $a_2 \leqslant \eta \leqslant b_2$, это следует из теоремы [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)]. Поэтому

$$\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(\psi) = \int_{a_2}^{\eta} |\psi'|\,dv = \int_{a_2}^{\eta} \overset{v}{\underset{a_2}{V'}}\,dv.$$

Итак, полные вариации $\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(\psi)$ и $\overset{\xi}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)$ абсолютно непрерывны, следовательно, абсолютно непрерывны и сами функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ [4; гл. II, § 12, т. (12,1)].

Остановим наше внимание теперь на доказательстве абсолютной непрерывности функции $f(u,v)$ в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ $\psi(v)$.

Так как $H_1(I)$ абсолютно непрерывна, то по теореме (3,I) и [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], имеем:

$$H_1(I_\xi)=\int\limits_{a_1}^{\xi}\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,u)\overset{u}{\underset{a_1}{V'}}du=\int\limits_{a_1}^{\xi}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\varphi'\right|dv\right]du.$$

Дифференцируя это равенство по ξ, получим:

$$\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,u)\cdot\overset{u}{\underset{a_1}{V'}}(\varphi)=\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,u)\cdot|\varphi'|=\int\limits_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\right|\cdot\left|\varphi'\right|dv=\left|\varphi'\right|\cdot\int\limits_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|dv$$

почти для каждого значения $u\in[a_1,b_1]$.

Функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, поэтому $\varphi'(u)$ и $\psi'(v)$ существуют почти всюду в I_0. Обозначим через A множество точек из $[a_1,b_1]$, где $\varphi'(u)=0$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,u)=\int\limits_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|dv=\int\limits_{a_2}^{b_2}\overset{v}{\underset{a_2}{V'}}(f,u)\,dv \tag{3.11}$$

это равенство справедливо, по крайней мере, почти всюду на множестве $\{[a_1,b_1]-A\}$.

Но для каждого значения u, для которого функция $f(u,v)$ имеет ограниченную вариацию по η, разность:

$$\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(f,u)-\int\limits_{a_2}^{\eta}\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|du=\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(f,u)-\int\limits_{a_2}^{\eta}\overset{v}{\underset{a_2}{V'}}(f,u)dv$$

есть, в силу теоремы [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], неотрицательная, неубывающая функция переменного η.

Следовательно,

$$\overset{\eta}{\underset{a_2}{V}}(f,u)=\int\limits_{a_2}^{\eta}\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(f,u)\,dv$$

почти для каждого значения $u\in\{[a_1,b_1]-A\}$.

Таким образом, полная вариация $\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(f,u)$— абсолютно непрерывна по переменному v, следовательно, абсолютно непрерывна и сама функция $f(u,v)$ по переменному V для почти каждого значения $u\in\{[a_1,b_1]-A\}$ [4; гл. II. § 12, т. (12,1)].

Посредством аналогичных рассуждений получим, что функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна по переменному u почти для каждого значения $v\in\{[a_2,b_2]-B\}$, где B — множество точек из $[a_2,b_2]$, в которых $\psi'(v)$ равна нулю. По предположению $f(u,v)$ является функцией ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$; следовательно, функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, почти для каждой точки $(u,v)\in(I_0-E)$, где $E=A+B$ есть множество точек из I_0, в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю.

Наконец, формула (3,9) есть следствие теорем (3,I) и [4; гл. IV, § 7. т. (7,4)].

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

При вычислении площади поверхности обычно используются частные производные функций, входящих в представление поверхности. Цель настоящего параграфа — изложить метод вычисления площади непрерывной поверхности, заданной системой уравнений (2,1), который применим и для случая, когда непрерывная функция $f(uv)$, не имеет частных производных.

Теорема (4,I).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (2,1) и пусть последовательность произвольных непрерывных функций $\{f_n(u,v)\}$ сходится к функции $f(u,v)$ на I_0. Тогда всегда имеет место следующее соотношение:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} H(f_n,\varphi,\psi;I_0)\geqslant H(f,\varphi,\psi;I_0) \tag{4,1}$$

Доказательство.

Пусть $I_m=\{I_k\}_{k=1,2,\ldots,m}$ — произвольное подразделение прямоугольника I_0. В силу неравенства (2,21) для непрерывной поверхности S_n, заданной системой уравнений:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f_n(u,v);\ (uv)\in I_0,$$

для любого значения индексов n и m, можем записать:

$$H(f_n,\varphi,\psi;I_0)\geqslant G(f_n,\varphi,\psi;I_m). \tag{4,2}$$

В силу леммы Фату [4; гл. I, § 12, т. (12,1)], имеем:

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} G(f_n,\psi,\varphi;I_m)\geqslant G(f,\psi,\varphi;I_m) \tag{4,3}$$

Из неравенств (4,2) и (4,3) выводим:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} H(f_n,\varphi,\psi;I_0)\geqslant \underline{\lim}_{u\to\infty} G(f_n,\varphi,\psi;I_m)\geqslant G(f,\varphi,\psi;I_m).$$

Последнее неравенство справедливо для любого значения индекса m. Переход к пределу по m дает неравенство (4,1). Теорема полностью доказана.

Теорема (4,II).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений: $x=\varphi(u)$, $y=\psi(v)$, $z=f(u,v)$; $(u,v)\in I_0$. Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица, то имеет место равенство:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)=H(f,\varphi,\psi,I_0). \tag{4,4}$$

Доказательство.

Докажем сначала неравенство:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0) \geqslant H(f,\varphi,\psi;I_0).$$

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность гладких поверхностей или безразлично полиэдров сходится к поверхности S на I_0, где поверхность S_n задана системой уравнений:

$$x=\varphi_n(u),\ y=\psi_n(v),\ z=f_n(u,v);\ (u,v)\in I_0,\ n=1,2,...;$$

причем последовательность выбрана так, что

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n,\varphi_n,\psi_n;I_0)=(L f,\varphi,\psi;I_0), \tag{4,5}$$

существование которой следует в силу теоремы (1,II).

На основании теоремы (1,I) можем записать:

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n,\varphi_n,\psi_n;I_0) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} L(f_n,\varphi,\psi;I_0) \geqslant L(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,6}$$

Из (4,5) и (4,6) выводим:

$$\varliminf_{n\to\infty} L(f_n,\varphi,\psi;I_0)=L(f,\varphi,\psi;I_0) \tag{4,7}$$

Функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица по условию теоремы, а функция $f_n(u,v)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных в силу гладкости поверхности S_n, поэтому на основании теоремы Радо Т.[1] имеем:

$$L(f_n,\varphi,\psi;I_0)=\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f_n,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f_n,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} du dv. \tag{4,8}$$

Функции $f_n(u,v)$, $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны; следовательно, в силу теоремы (3,II) можем записать:

$$H(f_n,\varphi,\psi;I_0)=\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f_n,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f_n,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} du dv.$$

Из последнего равенства и равенства (4,8) следует:

$$L(f_n,\varphi,\psi;I_0)=H(f_n,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,9}$$

На основании теоремы (4,I) и равенств (4,7) и (4,9) получаем:

$$L(f,\varphi,\psi;,I_0)=\varliminf_{n\to\infty} L(f_n,\varphi,\psi;I_0)=\varliminf_{u\to\infty} H(f_n,\varphi,\psi;I_0)\geqslant H(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,10}$$

Докажем теперь обратное неравенство:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)\leqslant H(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,11}$$

Если функция $f(u,v)$ неограниченной вариации на прямоугольнике I_0, то согласно теореме (2,IV) выражение $H(f,\varphi,\psi;I_0)=\infty$, а в этом

[1] Radó T. Über das Flächenmass rectifizirbarer Flächen, Mat. Annalen, vol. 100 (1928), s. 445 — 479, см. [2].

случае неравенство (4,11), очевидно, справедливо. Поэтому естественно предположить, что функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0, относительно $\varphi(u)$ и $\Psi(v)$.

Функцию $f(u,v)$ можно продолжить на всю плоскость uv с сохранением свойства непрерывности и ограниченности вариации в обобщенном смысле Тонелли.

В самом деле, пусть I' и I'' — прямоугольники, равные прямоугольнику I и имеющие с ним общие стороны, параллельные оси ou. Функция $f(u,v)$ может быть, очевидно, продолжена на прямоугольники I' и I'' посредством симметричного отображения относительно сторон прямоугольника I, параллельных оси ou.

Обозначим полученный прямоугольник через $R_0 = I' + I_0 + I''$. Поступая аналогично относительно прямоугольника R_0 (прикладываем только равные ему прямоугольники R' и R'' к сторонам, параллельным оси ov), функцию $f(u,v)$ можно продолжить на прямоугольник $Q = R' + R_0 + R''$ без нарушения указанных свойств. Очевидно, что этот процесс можно повторить любое количество раз и покрыть любой наперед заданный прямоугольник. Легко заметить, что $f(u,v)$ будет периодической функцией в отношении u и v.

Рассмотрим теперь функцию:

$$f_n(u,v) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} f(u+\xi,\ v+\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{4,12}$$

Функции $f_n(u,v)$, $n = 1,2,3,\ldots$ обладают следующими свойствами:

а) Последовательность функций $\{f_n(u,v)\}$ сходится равномерно к функции $f(u,v)$ на прямоугольнике I_0.

б) Функции $f_n(u,v)$ допускают в I_0 непрерывные частные производные.

Действительно:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left[f\left(u+\frac{1}{n}, v+\eta\right) - f(u,\ v\ +\ \eta) \right] d\eta$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left[f\left(u+\xi,\ v+\frac{1}{n}\right) - f(u+\xi,\ v) \right] d\xi .$$

Функции $f_n(u,v)$, $\varphi(u)$, $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица, поэтому, в силу теоремы (3,II) и теоремы Радо Т[1]., находим:

$$L(f_n,\varphi,\psi; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f_n,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f_n,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du\, dv =$$

$$= H(f_n,\varphi,\psi; I_0). \tag{4,13}$$

[1] Там же, стр. 71.

Следовательно, на основании последнего равенства и теоремы (1,I), имеем:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}L(f_n,\varphi,\psi;I_0)=\varliminf_{n\to\infty}H(f_n,\varphi,\psi;I_0) \tag{4,14}$$

Пусть $\boldsymbol{I}_m=\{I_k\}_{k=1,\dots,m}$ произвольное подразделение прямоугольника I_0; обозначим через $I^{(\xi\eta)}$ прямоугольник, полученный из прямоугольника I путем параллельного сдвига $u'=u+\xi$, $v'=v+\eta$. Аналогично обозначим через $\boldsymbol{I}_m^{(\xi\eta)}$ подразделение прямоугольника $I_0^{(\xi\eta)}$, полученное из подразделения $\boldsymbol{I}_m=\{I_k\}_{k=1,\dots,m}$ прямоугольника I_0, путем вышеуказанного параллельного сдвига каждого из прямоугольников $I_1,I_2,\dots I_m$.

В силу положительности подинтегрального выражения и теоремы Фубини [4; гл. III. § 8, т. (8,1)] для любого прямоугольника $I=\underset{u,v}{E}\{\alpha_1\leqslant u\leqslant\beta_1;\alpha_2\leqslant v\leqslant\beta_2\}\in I_0$ находим:

$$G_1(f_n,\varphi;I)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}|f_n(u,\beta_2)-f_n(u,\alpha_2)|\,d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\left\{\left|n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}[f(u+\xi,\beta_2+\eta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f(u+\xi,\alpha_2+\eta)]\cdot d\xi d\eta\right|\right\}d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)\leqslant n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\left\{\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\left|f(u+\xi,\beta_2+\eta)-f(u+\xi,\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_2+\eta)\right|d\overset{u}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi)\right\}d\xi d\eta=n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}G_1(f,\varphi;I^{(\xi\eta)})\,d\xi d\eta.$$

Применяя к каждому из прямоугольников подразделение $\boldsymbol{I}_m$ последнее неравенство и затем суммируя, получим:

$$G_1(f_n,\varphi;\boldsymbol{I}_m)\leqslant n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\left\{\sum_{(j,i)=1}^{m}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|f(u+\xi,\beta_i+\eta)-f(u+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\xi,\alpha_i+\eta)\right|d\overset{u}{\underset{\alpha_j}{V}}(\varphi)\right\}d\xi\,d\eta=n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}G_1(f,\varphi;\boldsymbol{I}_m^{(\xi\eta)})\,d\xi p\eta. \tag{4,15}$$

Аналогичное неравенство получим для $G_2(f_n\psi;\boldsymbol{I}_m)$.

Применяя известное неравенство

$$\left[\left(\int\limits_E xdt\right)^2+\left(\int\limits_E ydt\right)^2+\left(\int\limits_E zdt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\int\limits_E\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}dt,$$

в силу (4,15) получим:

$$G(f_n,\varphi,\psi;I)=\{[G_1(f_n,\varphi;I)]^2+[G_2(f_n,\psi;I)]^2+[G_3(\varphi,\psi;I]^2\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\{[G_1(f,\varphi;I^{(\xi\eta)})]^2+[G_2(f,\psi;I^{(\xi\eta)})]^2+$$

$$+[G_3(\varphi,\psi;I^{(\xi\eta)})]^2\}^{\frac{1}{2}}d\xi d\eta=n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}G(f,\varphi,\psi;I^{(\xi\eta)})\,d\xi\,d\eta.$$

Отсюда:

$$G(f_n,\varphi,\psi;I_m)\leqslant n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}G(f,\varphi,\psi;I_m^{(\xi\eta)})\,d\xi d\eta. \tag{4,16}$$

В силу равномерной сходимости функции прямоугольника $G(f,\varphi,\psi;I_m^{(\xi\eta)})$ к $H(f,\varphi,\psi;I_0^{(\xi\eta)})$ относительно переменных ξ и η при $m\to\infty$ [4; гл. V, § 3, т. (3,4)] из неравенства (4,16) имеем:

$$H(f_n,\varphi,\psi;I_0)\leqslant n^2\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}H(f,\varphi,\psi;I_0^{(\xi\eta)})d\xi\,d\eta. \tag{4,17}$$

Площадь фигуры $R=[I_0-(I_0\cdot I_0^{(\xi\eta)})]+[I_0^{(\xi\eta)}-(I_0\cdot I^{(\xi\eta)})]$, состоящая из четырех прямоугольников (при соответствующей разбивке) стремится к нулю при $\xi\to 0$ и $\eta\to 0$.

Функция $H(f,\varphi,\psi;I^{(\xi\eta)})$ — аддитивная и непрерывная функция прямоугольника (теорема 3,I), следовательно:

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}H(f,\varphi,\psi;I_0{}^{(\xi\eta)})=H(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,18}$$

На основании (4,14), (4,17), и (4,18), получаем:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}H(f_n\varphi,\psi;I_0)\leqslant H(f,\varphi,\psi;I_0). \tag{4,19}$$

Наконец, из неравенств (4,10), (4,19) следует наша теорема.

При $x=u$, $y=v$ из последней теоремы следует известная теорема Радо[1] [4; гл. V, § 7, т. (7,3)], доказанная им для поверхностей вида $z=f(x,y)$.

§ 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Из вышепроведенных исследований квадрируемости непрерывных поверхностей, заданных системой уравнений (2,1), основной результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0.$$

[1] Radó T. Sur le calcul de l'aire des surfaces, Fundam. Math., vol. 10 (1927) p. 197 — 210.

Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица на I_0, то:

а) Для того чтобы поверхность S имела конечную площадь в смысле Лебега, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(u,v)$ была ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли[1], относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на I_0.

б) Если это так, то:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)\geqslant\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}dudv. \quad (5,1)$$

в) Площадь $L(f,\varphi,\psi;I)$ есть тогда непрерывная и аддитивная функция прямоугольника $I\in I_0$ и имеет место почти для каждой точки $(u,v)\in I_0$ равенство:

$$L'(u,v)=\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5,2)$$

г) Если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, а функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли[2] относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то площадь поверхности в смысле Лебега $L(S,I)$ абсолютно непрерывна на I_0 и имеет место равенство:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)=\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}du\,dv \quad (5,3)$$

д) И, наоборот, если площадь $L(f,\varphi,\psi;I)$, рассматриваемая как функция прямоугольника $I\in I_0$, абсолютно непрерывна на I_0, то функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ почти всюду на множестве I_0-E, где E — множество точек, в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю, причем формула (5,3) остается справедливой.

Доказательство.

Справедливость утверждения (а) следует из теорем (2,IV) и (4,II).

Справедливость утверждения (б) и (в) следует из теорем (3,I), (4,II) и [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)].

Справедливость утверждения (г) и (д) следует из теорем (3,II) и (4,II).

Из этой теоремы, в частности при $x=u$ и $y=v$, следуют известные результаты Л. Тонелли[3] и С. Сакса[4], полученные ими для поверхностей вида: $z=f(x,y)$.

---

[1] Там же, см. стр. 56.

[2] Там же, см. стр. 56.

[3] Tonelli L. Sulla quadratura della superficie, Atti Accad. Naz. Lincei, vol. 3 (1926) p. 357—363, 445—450, 633—658. См. [4, гл. V].

[4] Sacs S. Sur l'aire des surfaces $z=f(x,y)$, Acta Litt. Sci. Szeged, 3 (1927), p. 170—176. См. [4, гл. V].

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Выше было проведено исследование квадрируемости непрерывных поверхностей вида S, заданных системой уравнений (2,1′) с весьма сильным ограничением, требующим, чтобы функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяли условию Липшица.

Переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда непрерывная поверхность задана системой уравнений (2,1).

Покажем, что если непрерывная поверхность задана системой уравнений (2,1), то среди всевозможных параметрических представлений этой поверхности существует, по крайней мере, такое представление:

$$x=\bar{\varphi}(\bar{u}),\ y=\bar{\psi}(\bar{v}),\ z=\bar{f}(\bar{u},\bar{v});\ (\bar{u},\bar{v})\in \bar{I}_0, \tag{6,1}$$

в котором функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, исследование квадрируемости непрерывной поверхности, заданной системой уравнений (2,1), сводится к вышерассмотренному исследованию, проведенному в §§ 1 — 5.

Следующая теорема указывает метод перехода от параметрического представления поверхности, заданной системой уравнений вида (2,1), к представлению вида (6,1). Эта теорема является обобщением результатов, полученных проф. А. С. Кованько для одного частного случая поверхностей [2].

Теорема (6,I).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x=\varphi(u);\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0.$$

Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ имеют ограниченную вариацию на I_0, после замены переменных u и v по формулам:

$$\bar{u}=\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)+u=\alpha(u)$$

$$\bar{v}=\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(\psi)+v=\beta(v), \tag{6,2}$$

где $\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)$ и $\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(\psi)$ — полные вариации функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, получим новое параметрическое представление (6,1) поверхности S, в котором функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица.

Доказательство.

Вариации $\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)$ и $\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(\psi)$ функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ есть непрерывные, неотрицательные и неубывающие функции, следовательно, $\alpha(u)$ и $\beta(v)$ есть однозначные, непрерывные и возрастающие функции соответственно по переменным u и v, поэтому такими свойствами будут обладать и им обратные функции $\lambda(\bar{u})$ и $\mu(\bar{v})$. Тогда

$$\begin{aligned} u &= \lambda(\bar{u}) \\ v &= \mu(\bar{v}) \end{aligned} \qquad (6,3)$$

будут определены на конечных отрезках $[\alpha(a_1),\ \alpha(b_1)]$ и $[\beta(a_2),\ \beta(b_2)]$.

Покажем теперь, что функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица. Действительно, пусть $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ два какие-нибудь значения $\bar{u}$, а u_1, u_2 — соответствующие им значения u. Очевидно, если $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$, то и $u_1 > u_2$.

На основании (6,2) имеем:

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = u_1 - u_2 + \left| \overset{u_1}{\underset{a_1}{V}}(\varphi) - \overset{u_2}{\underset{a_1}{V}}(\varphi) \right| \geqslant \left[\overset{u_1}{\underset{a_1}{V}}(\varphi) - \overset{u_2}{\underset{a_1}{V}}(\varphi) \right] = \overset{u_2}{\underset{u_1}{V}}(\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant [\varphi(u_1) - \varphi(u_2)] = [\varphi(\lambda(\bar{u}_1)) - \varphi(\lambda(\bar{u}_2))].$$

Отсюда в общем виде получим:

$$|\varphi(\lambda(\bar{u}_1)) - \varphi(\lambda(\bar{u}_2))| \leqslant |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|.$$

Аналогично:

$$|\psi(\mu(\bar{v}_1)) - \psi(\mu(\bar{v}_2))| \leqslant |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|.$$

Теорема доказана полностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (2,1). Возникает вопрос: что можно сказать о площади поверхности S в смысле Лебега в ее первоначальном параметрическом представлении (2,1), т. е. до сведения задания этой поверхности к виду (6,1).

На этот вопрос дает ответ следующая теорема, которую можно считать основным результатом настоящей работы:

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x = \varphi(u),\ y = \psi(v),\ z = f(u,v),\ (u,v) \in I_0.$$

Тогда:

а) Если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$ ограниченной вариации, а функция $f(u,v)$ — ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то площадь поверхности S в смысле Лебега *конечна*.

б) Если площадь поверхности в смысле Лебега конечна, а функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ ограниченной вариации, то функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0 относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Доказательство.

Функции $\alpha(u)$, $\beta(v)$ и им обратные функции $\lambda(\bar{u})$, $\mu(\bar{v})$ являются однозначными, непрерывными и возрастающими, поэтому легко усмотреть, что свойство ограниченности вариации функции $f(u,v)$ в обобщенном смысле Тонелли — инвариантно относительно преобразования переменных с помощью формул (6,2) или (6,3). Отсюда в силу основной теоремы § 5 следует наша теорема.

В заключение докажем еще одну теорему.

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(v),\ z=f(u,v);\ (u,v)\in I_0.$$

Где функции $\varphi(u)$ и $\Psi(v)$ абсолютно непрерывны, а функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Пусть (6,1) есть параметрическое представление этой поверхности S, полученное преобразованием переменных посредством формул (6,2).

Тогда, если функция $\bar f(\bar u,\bar v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\bar\varphi(\bar u)$ и $\bar\psi(\bar v)$ на $\bar I_0$, функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, и имеет место равенство:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)=\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}du\,dv. \tag{7,1}$$

Доказательство.

В силу теоремы (6,1) функции $\bar\varphi(\bar u)$ и $\bar\psi(\bar v)$ удовлетворяют условию Липшица, а значит, абсолютно непрерывны. Применяя основную теорему § 5 и принимая во внимание, что площадь в смысле Лебега не зависит от параметрического представления поверхности, можем записать:

$$L(f,\varphi,\psi;I_0)=L(\bar f,\bar\varphi,\bar\psi;\bar I_0)=\iint\limits_{\bar I_0}\left\{\left[\frac{D(\bar f,\bar\varphi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2+\left[\frac{D(\bar f,\bar\psi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{D(\bar\varphi,\bar\psi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}d\bar u\,d\bar v. \tag{7,2}$$

Дальше имеем:

$$\left\{\left[\frac{D(\bar f,\bar\varphi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2+\left[\frac{D(\bar f,\bar\psi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2+\left[\frac{D(\bar\psi,\bar\varphi)}{D(\bar u,\bar v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{d\bar u}\cdot\frac{du}{d\bar v}=$$

$$= \frac{\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{d\bar{u}}{du}\cdot\frac{d\bar{v}}{dv}} =$$

$$= \frac{\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\alpha'(u)\cdot\beta'(v)} \tag{7,3}$$

Функция $\bar{f}(\bar{u},\bar{v})$ абсолютно непрерывна по предположению, а функции $\alpha(u), \beta(v)$ — абсолютно непрерывны, так как функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, а значит абсолютно непрерывны и их вариации $\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(\psi)$. Функции $\alpha(u)$ и $\beta(v)$ дают гомеоморфные преобразования переменных и возрастают. Используем теперь теорему [2, стр. 39]:

„Пусть $F(\bar{u},\bar{v})$ есть функция, определенная на прямоугольнике $\bar{I}_0$, и пусть $\bar{u}=\alpha(u)$ и $\bar{v}=\beta(v)$ суть гомеоморфные преобразования переменных $\bar{u}$ и $\bar{v}$, такие, что α и β — абсолютно непрерывны и возрастают. Пусть I_0 — прямоугольник, в который преобразуется прямоугольник $\bar{I}_0$. Если $F(\bar{u},\bar{v})$ суммируема в $\bar{I}_0$, а $[F(\alpha(u),\beta(v))\cdot\alpha'(u)\beta'(v)]$ суммируема в I_0, то:

$$\iint\limits_{\bar{I}_0} F(\bar{u},\bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v} = \iint\limits_{I_0} F(\alpha(u),\beta(v))\,\alpha'(u)\,\beta'(v)\,du\,dv''. \tag{7,4}$$

Положим:

$$F(\bar{u},\bar{v}) = \left\{\left[\frac{D(\bar{f},\bar{\varphi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f},\bar{\psi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2 + \left[\frac{D(\bar{\psi},\bar{\varphi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда на основании (7,3) имеем:

$$F(\alpha(u),\beta(v)\,\alpha'(u)\,\beta'(v) = \left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7,5}$$

В силу основной теоремы § 5 функция $F(\bar{u},\bar{v})$ суммируема. Из равенств (7,4) и (7,5) находим:

$$\iint\limits_{\bar{I}_0} \left\{\left[\frac{D(\bar{f},\bar{\varphi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f},\bar{\psi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2 + \left[\frac{D(\bar{\varphi},\bar{\psi})}{D(\bar{u},\bar{v})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\bar{u}\,d\bar{v} =$$

$$= \iint\limits_{I_0} \left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} du\,dv. \tag{7,5}$$

Покажем суммируемость функции $\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, но суммируемость этой функции очевидна из неравенства

$$\iint\limits_{I_0}\left\{\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}dudv\leqslant\iint\limits_{I_0}\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right|dudv+$$

$$+\iint\limits_{I_0}\left|\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}\right|dudv+\iint\limits_{I_0}\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|dudv=\int\limits_{a_1}^{b_1}\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(f,u)\,d\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi)+$$

$$+\int\limits_{a_2}^{b_2}\overset{b_1}{\underset{a_1}{V}}(f,v)\,d\overset{v}{\underset{a_2}{V}}(\psi)+\int\limits_{a_1}^{b_1}\overset{b_2}{\underset{a_2}{V}}(\psi)\,d\overset{u}{\underset{a_1}{V}}(\varphi),$$

где три интеграла правой части конечны, так как по предположению функция $f(u,v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, а функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны и, значит, ограниченной вариации. Из равенства (7,2) и (7,6) следует равенство (7,1) теоремы.

Докажем теперь абсолютную непрерывность функции $f(u,v)$. Для этого воспользуемся теоремой:[1]

„Пусть абсолютно непрерывная функция $\bar{u}=\alpha(u)$, $u\in[a_1,b_1]$ существенно возрастает. Если $f(u)$ абсолютно непрерывна на $[\alpha(a_1),\ \alpha(b_1)]$, то $f(\alpha(u))$ — абсолютно непрерывна на $[a_1, b_1]$".

Функция $\bar{f}(\bar{u},\bar{v})$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\overline{\varphi}(\bar{u})$ и $\overline{\psi}(\bar{v})$ по предположению. Поэтому в силу цитированной теоремы почти для каждого значения $v=\mu(v)$ функция $f(u,v)=\bar{f}\ (\alpha(u),\beta(v))$ абсолютно непрерывна по переменному $u\in[a_1, b_1]$. Аналогично функция $f(uv)=\bar{f}(\alpha(u),\beta(v))$ абсолютно непрерывна по переменному v, почти для каждого значения $u=\lambda(\bar{u})$. Так как функция $f(u,v)$ — ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то она абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Теорема доказана полностью.

За постановку задачи, постоянный интерес к моей работе и многочисленные указания, имевшие для меня неоценимое значение, я глубоко благодарю моего руководителя профессора Александра Сергеевича Кованько.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верченко И. Я. — Исследования по теории площади поверхности (диссертация), Москва, 1949.

2. Кованько А. С. — Об одном прямом методе исследования некоторых квадрируемых поверхностей, НИИММ, Томск, т. 11, вып. 1, 1938.

3. Кованько А. С. — Про квадрувальність деяких окремих видів поверхонь в сенсі Лебега, Наукові записки ЛДУ, т. V, в. 1-й, 1947.

4. Сакс С. — Теория интеграла, Изд. ин. лит., Москва, 1949.

[1] Натансон И. П. Основы теории функций вещ. перем. Ленинград, 1941.