Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1950

Т. Я. ЗАГОРСКИЙ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1.

Краевые задачи для параболически вырожденных уравнений впервые подробно рассматривал Н. С. Пискунов [1,2]. Им рассмотрена первая краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + c\frac{\partial u}{\partial x} + bu + f,$$

где все коэффициенты и начальные данные непрерывны и имеют производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам y_i и x.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\left(x, t, y_1, \ldots, y_m, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right) \tag{1,1}$$

с условиями:

$$\left.\begin{aligned} z &= f(t, y_1, \ldots, y_m) \quad \text{при} \quad x = 0 \\ z &= \varphi(t, y_1, \ldots, y_m) \quad \text{при} \quad x = 1 \\ z &= \psi(x, y_1 \ldots, y_m) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1,2}$$

$$f(0, y_1, \ldots, y_m) = \varphi(0, y_1, \ldots, y_m) = \psi(0, y_1, \ldots, y_m) = \psi(1, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Функция F удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывна в области $D\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant T\end{pmatrix}$;

в) аналитична по каждому из остальных своих аргументов при

$$|y_i| < R, \quad |z| \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y_i}\right| \leqslant N.$$

Функции f, φ и ψ, входящие в условия (1,2), а также f'_t, φ'_t и ψ''_{xx} также непрерывны в области D и аналитичны по y_i при $|y_i| \leqslant R$.

Н. С. Пискунов пользовался в своей работе методом конечных разностей.

В настоящей работе задача приводится к интегро-дифференциальному уравнению, которое решается по методу последовательных приближений.

§ 2.

Краевую задачу (1,1) (1,2) можно легко привести к краевой задаче с нулевыми начальными данными.

Сделаем подстановку

$$z = u + x\varphi(t, y_1, \ldots, y_m) + (1-x)\, f(t, y_1, \ldots, y_m) + (1-t)\,\psi(x, y_1, \ldots, y_m),$$

которая приводит к уравнению для u вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_1\left(x, t, y_1, \ldots, y_m;\ u, \frac{\partial u}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial u}{\partial y_m}\right) \tag{2,1}$$

и условиям:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t = 0, \quad x = 1. \tag{2,2}$$

Причем F_1 непрерывна по x и t в области D и удовлетворяет условию (в) при $|y_i| \leqslant R$ и $|u| \leqslant L$; $\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| \leqslant L$.

Для удобства записи будем часто писать p_i, вместо $\frac{\partial u}{\partial y_i}$, и p_0, вместо u.

Через K будем обозначать $\max\left|\frac{\partial F}{\partial p_i}\right|$ в области D, при $|p_i| < N$ и $|y_i| \leqslant R$.

Из общей теории уравнения теплопроводности известно, что решение уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \pi(x, t)$$

с нулевыми начальными и предельными условиями может быть выражено в виде

$$z = \int_0^t \int_0^1 G(x, t;\ \xi\tau)\, \pi(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где $G(x, t; \xi, \tau)$ есть так называемая функция Грина, положительная внутри области D и равная

$$G(x, t; \xi, \tau) = 2 \sum_{i+1}^{\infty} e^{-i^2\pi^2(t-\tau)} \sin i\pi x \sin i\pi\xi. \tag{2,3}$$

Используя эту функцию, можно краевую задачу (2,1) (2,2) записать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$u = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\, F_1\left(\xi, \tau, y_1, \ldots, y_m, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_m}\right) d\xi\, d\tau, \tag{2,4}$$

которое будем решать по методу последовательных приближений.

Составим последовательность

$$u_0 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\, F_1(\xi, \tau, y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots, 0)\, d\xi\, d\tau \tag{2,5}$$

. . . .

$$u_n = \int_0^t \int_0^1 G(x, t: \xi, \tau)\, F_1\left(\xi, \tau, y_1, \ldots, y_m\, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_m}\right) d\xi d\tau$$

. . . .

и докажем равномерную сходимость этой последовательности и последовательности частных производных $\frac{\partial u_n}{\partial y_i}$.

Прежде всего установим одно важное соотношение для функции Грина.

Докажем, что

$$\int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\, G(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)\, d\xi = G(x, t; \xi_1\, \tau_1), \tag{2,6}$$

для чего используем разложения (2,3)

$$4 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2\pi^2(t-\tau)} \sin i\pi\xi \sin i\pi x \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2(\tau-\tau_1)} \sin k\pi\xi \sin k\pi\xi_1 \right) d\xi =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2\pi^2(t-\tau_1)} \sin i\pi x \sin i\pi\xi_1 = G(x, t; \xi_1, \tau_1).$$

При помощи последовательных вычитаний последовательность (2,5) преобразуем в последовательность

$$u_0 = v_0 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\, F(\xi, \tau, y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots, 0)\, d\xi d\tau$$

. . . .

$$v_n = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ \frac{\overline{\partial F_1}}{\partial p_0} v_{n-1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial p_m} q_m n \right\} d\xi d\tau.$$

. . . .

Здесь через v_n обозначена разность $u_n - u_{n-1}$, через q_n разность $\frac{\partial u_n}{\partial y_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_i}$.

Черта над $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ означает, что производные взяты при некоторых средних значениях аргументов, в соответствии с теоремой о среднем значении.

Перейдем теперь к оценке v_n и $q_i = \frac{\partial v_n}{\partial y_i}$.

Так как $F(\xi, \tau, y_1, \ldots, y_m, 0, 0, 0)$ есть аналитическая функция y_i в круге $|y_i| \leqslant R$, то функции

$$\frac{M}{\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)} \quad \text{и} \quad \frac{M}{R\left(1-\frac{|y_i|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_i|}{R}\right)^2-\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}$$

будут соответственно не меньше, нежели

$$|F_1(\xi,\tau,y_1,\ldots,y_m,0,0,\ldots,0)| \text{ и } \left|\frac{\partial F_1(\xi,\tau,y_1,\ldots,y_m,0,0,\ldots,0)}{\partial y_i}\right|,$$

Через M мы обозначили $\max|F(\xi,\tau,y_1,\ldots,y_m,0,\ldots,0)$ в D при $|y_i| < R$, Теперь из первого из уравнений (2,5) получим

$$|v_0| < \int_0^t\int_0^1 G(x,t,\xi,\tau)\frac{M}{\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}d\xi\, d\tau.$$

$$\left|\frac{\partial v_0}{\partial y_i}\right| < \int_0^t\int_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\frac{M}{R\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_i|}{R}\right)^2\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}d\xi\, d\tau$$

Если принять обозначение $\int_0^t\int_0^1 G(x,t; d\xi d\tau = H$, то можно написать

$$\max\left\{|v_0|, \left|\frac{\partial v_0}{\partial y_i}\right|\right\} < \frac{M}{R\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_i|}{R}\right)^2\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau < \frac{MH}{R\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_i|}{P}\right)^2\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}, \quad (2,8)$$

Перейдем к оценке следующих приближений:

$$v_1 = \int_0^t\int_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\left\{\frac{\partial F}{\partial P_0}v_0 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_m}q_{m0}\right\}d\xi\,d\tau. \quad (2,9)$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial P_i}$ суть аналитические функции от y_i, модуль максимум которых равен K, то мажорируем их при помощи функций

$$\frac{K}{\left(1-\frac{|y_1|}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{|y_m|}{R}\right)}.$$

Будем в дальнейшем писать $\left|\frac{y_i}{R}\right| = r$ и для выражения в фигурных скобках (2,9) получим мажорацию в виде

$$\frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3\ldots(1-r_m)^3}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

и, следовательно,

$$|v_1| \leqslant \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 G(\xi,\tau;\xi_1,\tau_1)\,\frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3\ldots(1-r_m)^3}\,d\xi\,d\xi_1\,d\tau\,d\tau_1.$$

Применим теперь соотношение (2,6)

$$|v_1| \leqslant \frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3\ldots(1-r_m)^3}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 G(x,t;\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(m+1)MKHt}{R^2(1-r_1)^3\ldots(1-r_m)^3}.$$

Для $\frac{\partial v_i}{\partial y_i}$ получим оценку:

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial y_i}\right| \leqslant \frac{3(m+1)MKHt}{R^2(1-r_1)^3\ldots(1-r_i)^4\ldots(1-r_m)^3}.$$

Оценим теперь v_2.

$$v_2 = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,t;\xi,\tau)\left\{\frac{\partial F_1}{\partial P_0}v_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial P_m}\frac{\partial v_m}{\partial y_m}\right\}d\xi\,d\tau \qquad (2,10)$$

Так же, как и выше, для фигурной скобки получим мажорацию

$$\frac{3(m+1)^2MK^2}{R^2(1-r_1)^5\cdots(1-r_m)^5}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 G(x,t;\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1 d\tau_1 d\tau$$

$$\text{и } |v_2| \leqslant \frac{3(m+1)^2MK^2}{R^2(1-r_1)^5\cdots(1-r_m)^5}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^1 G(x,\tau;\xi,\tau)\,G(\xi,\tau;\xi_2,\tau_2)\times$$

$$\times\, d\xi_2 d\tau_2 d\tau_1 d\xi d\tau \leqslant \frac{3(m+1)^2K^2Mt^2H}{2!\,R^2(1-r_1)^5\cdots(1-r_m)^5}$$

и для $\frac{\partial v_2}{\partial y_i}$ получим оценку:

$$\left|\frac{\partial v_2}{\partial y_i}\right| \leqslant \frac{3.5.(m+1)^2 K^2 t^2 HM}{2!\, R^3 (1-r_1)^5 \cdots (1-r_i)^6 \cdots (1-r_m)^5}$$

Очевидно, для v_n имеем

$$|v_n| \leqslant \frac{3.5\cdots(2n-1)\, K^n t^n MH (m+1)^n}{R^n n!\,(1-r_1)^{2m+1}\cdots(1-r_m)^{2m+1}} \tag{2,11}$$

и

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| \leqslant \frac{3.5\ldots(2n+1)\, K^n t^n MH (m+1)^n}{R^{n+1} n!\,(1-r_1)^{2m+1}\ldots(1-r_m)^{2m+1}},$$

Ряды $\sum\limits_{n=0} v_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y_i}$ будут сходиться абсолютно и равномерно при условии

$$\frac{2\,kt\,(m+1)}{R(1-r_1)^2\ldots(1-r_m)^2} < 1, \tag{2,12}$$

что, очевидно, будет выполняться при достаточно малом T, именно при

$$T < \frac{R(1-r_1)^2\ldots(1-r_m)^2}{2\,k\,(m+1)}. \tag{2,13}$$

Необходимо еще убедиться в том, что в процессе последовательных приближений не нарушалось условие

$$|v_n| \leqslant z;\ \left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| \leqslant L;$$

Ряд $$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5\ldots(2_{n+1})\, k^n t^n (m+1)^n}{n!\,R^{n+1}(1-r_1)^{2m+1}\ldots(1-r_m)^{2m+1}} <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} k^n t^n (m+1)^n MH}{R^{n+1}(1-r_1)^{2m+1}\ldots(1-r_m)^{2m+1}} =$$

$$= \frac{3\,MH}{R(1-r_1)^2\ldots(1-r_m)^2\left[1-\frac{3\,kt\,(m+1)}{R(1-r_1)^2\ldots(1-r_m)^2}\right]}.$$

Здесь принимаем, что

$$\frac{3\,kt\,(m+1)}{R(1-r_1)^2\ldots(1-r_m)^2} < 1.$$

Так как $H \to 0$ при $T \to 0$, то, взяв достаточно малый интервал T, можно сделать сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right|$ сколь угодно малой и значит и менее L;

но $$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| \geqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial(u_n - u_{n-1})}{\partial y_i}\right| = \left|\frac{\partial u_n}{\partial y_i}\right|.$$

следовательно, существует такой достаточно малый интервал T, в котором рассмотренные ряды сходятся абсолютно и равномерно и выполняется условие

$$|u_n| < L; \ \left|\frac{\partial u_n}{\partial y_i}\right| \leqslant L.$$

В силу равномерной сходимости последовательности u_n и $\frac{\partial u_n}{\partial y_i}$ можно утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ является решением исследуемой краевой задачи.

Докажем теперь, что не существует других решений, аналитических по y_i. Допустим, что существуют два решения задачи (2,1) (2,2) u_1 и u_2.

Рассмотрим

$$W = u_1 - u_2 = \int_0^t\int_0^1 G(x_1 t; \xi, \tau)\left\{F_1\left(\xi_1 \tau_1 y_1 \ldots y_{m1}\, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial u_1}{\partial y_m}\right) -\right.$$

$$\left. - F_1\left(\xi_1, \tau_1, y_1, \ldots y_m, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial u_2}{\partial y_m}\right)\right\} d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\left\{\frac{\overline{\partial F}}{\partial p_0}(W) + \ldots + \frac{\overline{\partial F}}{\partial p_m}\frac{\partial (W)}{\partial y_m}\right\} d\xi d\tau \tag{3,1}$$

Так как по предположению W и $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ являются аналитическими функциями y_i в круге $|y_i| \leqslant R$, то для них можно написать мажорантную функцию в виде $\frac{M}{R(1-r_1)\ldots(1-r_1)\ldots(1-r_m)}$, и точно так же, как в предыдущем параграфе, для W и $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ получим оценку

$$\left\{|W|, \left|\frac{\partial W}{\partial y_i}\right|\right\} \leqslant \frac{3MKH(m+1)}{R(1-r_1)^4\ldots(1-r_i)^4\ldots(1-r_m)^4}. \tag{3,2}$$

Подставим эти оценки в правую часть (3,1), мы получим для W оценку

$$|W| \leqslant \int_0^t\int_0^1 G(x, t; \xi, \tau)\int_0^t\int_0^1 G(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1)\, d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \times$$

$$\times \frac{3MK^2(m+1)^2}{R(1-r_1)^5\ldots(1-r_m)^5} =$$

$$=\int_0^t\int_0^t\int_0^1 G(x,t;\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1 d\tau_1 d\tau\,\frac{3MK^2(m+1)^2}{R(1-r_1)^5\ldots(1-r_m)^5}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3MK^2(m+1)^2Ht}{R(1-r_1)^5\ldots(1-r_m)^5}$$

и $$\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|\leqslant\frac{3.5\,MK^2(m+1)^2Ht}{R^2(1-r_1)^6\ldots(1-r_m)^6}$$

и после n таких шагов

$$|W|\leqslant\frac{3.5\ldots(2n-1)(m+1)^n k^n t^n H}{R^n(1-r_1)^{2n+1}\ldots(1-r_m)^{2n+1}},$$

но при $t<\dfrac{R(1-r_2)^2\ldots(1-r_m)^2}{2k(m+1)}$ [см. условие (2,18)]

правая часть предпоследнего неравенства стремится к нулю, то есть

$$W=0,\ u_1=u_2$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. — Solution du premier probleme aux limites pour l'eguation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^3}=a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a^3\frac{\partial u}{\partial t}+gu+f$. Мат.сб., т. 1 (43), № 6, 1936.

2. Пискунов Н. С. — Краевые задачи для уравнений эллиптикопараболического типа. Мат. сб., т. 7 (49), № 3, 1940.