Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

Г. Л. БУЙМОЛА

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ ВИМІРУ ГРАФІЧНО ЗАДАНИХ ВІДРІЗКІВ ТА КУТІВ

I.

Мова йтиме про вимірювання відрізків та кутів у площині рисунка.

Тому ми припускаємо, що існує таке поле рисунка (аркуш рисувального паперу), в межах якого вкладаються всі наші геометричні побудови. Це поле рисунка ми приймаємо за звичайну евклідову площину з основними геометричними образами в ній і будемо називати його *„площиною"*.

Отже, ми виходимо з умови існування звичайної евклідової площини.

Крім цього, в тій же „площині" ми констатуємо існування геометричних образів, що відрізняються від звичайних так званих геометричних точок і прямих евклідової площини, які ми також будемо називати *точками* і *прямими*. Це сліди дотику олівця чи уколу ніжки циркуля, що залишаються на папері у вигляді плям чи кружечків і смужок, які ми проводимо на рисунку олівцем чи пером рейсфедера і вважаємо їх за „прямі".

Щоб простежити, як впливають розміри цих плям і смужок („точок" і „прямих") на точність геометричних побудов в "площині" рисунка, ми вводимо ряд погоджень:

1. Кожній точці A звичайної евклідової площини, що розглядаємо, відповідає коло (пляма) сталого діаметра $2\omega_2$ з центром у цій точці (рис. 1-й).

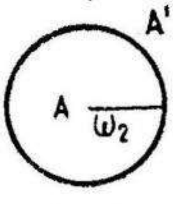

Рис. 1.

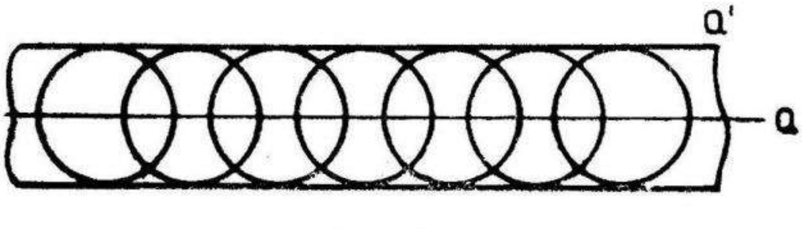

Рис. 2.

Будемо називати кожне таке коло терміном *точка*, взятим в лапки: „точка" A. Точки, центри яких не зливаються, будемо вважати різними. Це погодження встановлює взаємно однозначну відповідність між новими „точками" і старими точками.

2. Смужку, обмежену двома паралельними прямими, які являють собою обгортку сім'ї кіл радіуса ω_1 з центрами, що лежать на прямій a, назвемо „прямою" a' (рис. 2-й).

Кожній смужці a', ширини $2\omega_1$ відповідає пряма a, що є середньою лінією цієї смужки. Відповідність ця взаємно однозначна.

3. Будемо говорити, що „точка“ абсолютно інцидентна „прямій“, якщо інцидентні відповідні їм звичайні точка і пряма, тобто, якщо центр кола, що приймаємо за „точку“, інцидентний середній лінії смужки, яку приймаємо за „пряму“.
4. Будемо говорити також, що „точка“ A_2' лежить „між“ двома другими „точками“ A_1' і A_3', якщо точка A_2 лежить „між“ точками A_1 і A_3 в звичайному розумінні цього слова.
5. Під „рухом“ у новій системі об'єктів будемо розуміти рух у звичайній евклідовій площині, що переводить „точку“ в „точку“, „пряму“ в „пряму“.

При практичному здійсненні в площині рисунка геометричних побудов, користуючись такими натуральними „точками“ та „прямими“, ми під впливом багатьох причин об'єктивного і суб'єктивного характеру робимо ряд помилок, що впливають на точність виконання рисунка в цілому.

Тому, в першу чергу, я ставлю своїм завданням встановити і вивчити *первинні помилки*, які виникають в геометричних побудовах при вказаних умовах, і в дальшому, на основі їх вивчення, оцінювати точність виконаного рисунка. Зокрема вивчити вплив первинних помилок на точність виміру відрізків та кутів.

Перш за все зробимо кілька зауважень з приводу прийнятих погоджень.

1. Різними „точками“ ми погодилися називати такі „точки“, центри яких не зливаються.

Практично ми розрізняємо дві „точки“ A' і B', тоді коли віддаль між їх відповідними точками A і B (їх центрами) не менша деякої граничної величини $2\omega_1$, тобто, якщо вони не містяться разом в середині деякого кола, радіус якого не перевищує величини

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2.$$

Тут ми зустрічаємося з основною *первинною помилкою* побудування, що з'являється внаслідок неудосконалення нашого сприймання. Ця основна первинна помилка може бути схарактеризована колом K радіуса ω_0 (рис. 3-й). Введемо такі визначення:

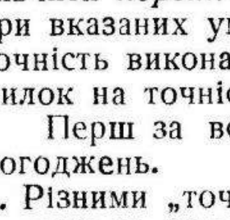

Рис. 3.

1) Величину $AB \leqslant 2\omega_1$ будемо називати *основною* первинною помилкою 1-го роду.
2) Дві точки, для яких $AB \leqslant 2\omega_1$ будемо умовно називати „інцидентними“ точками. Коло K радіуса $\omega_0 \leqslant \omega_1 + \omega_2$ назвемо *одиничним* колом помилок або *колом інцидентності* двох „точок“.

Очевидно, що: 1) Коли $\omega_0 \to 0$, то *одиничне коло помилок* вироджується в „точку“. Дві „точки“ A' і B' зливаються, стають абсолютно інцидентними. 2) Кожне одиничне коло помилок містить у собі безконечну множину звичайних (геометричних) точок. 3) У „площині“ рисунка існує безконечна множина „інцидентних точок“ — значить і *одиничних кіл помилок.*

4) Дві „інцидентні точки“ несуть н і собі основну первинну помилку 1-го роду.

2) Згідно з прийнятим погодженням „точка“ і „пряма“ *абсолютно інцидентні* в тому випадку, якщо інцидентні відповідні їм звичайні точка і пряма евклідової площини, тобто, якщо центр плями „інцидентний“ з середньою лінією смужки, що також у практиці трудно розпізнати.

Практично „точка“ і „пряма“ не розрізняється одна від одної, якщо віддаль центра „точки“ (плями) від середньої лінії „прямої“ (смужки) не перевищує ω_0. Тому:

1) „Точку“ і „пряму“ назвемо „*інцидентними*“, якщо віддаль центра „точки“ від середньої лінії „прямої“ $\leqslant \omega^0$.

2) Смужку, обмежену двома паралельними прямими, що являють собою обгортку сім'ї кіл радіуса ω_0 з центром на прямій a, будемо називати *одиничною смугою помилок*, або смугою інцидентності „точки“ і „прямої“. Ця смуга помилок характеризується одиничним колом радіуса ω_0, а значить несе на собі основну первинну помилку 1-го роду.

Очевидно, що:

1) Кожній „прямій“ відповідає тільки одна одинична смуга помилок.

2) Якщо $\omega_0 \to 0$, то „точка“ і „пряма“ в границі стають абсолютно інцидентними.

3) Так само і поняття „між“ в практиці вимагає деяких обмежень в силу існування в площині рисунка „інцидентних точок“, що характеризуються одиничним колом помилок.

„Точка“ A_2 практично не відрізняється від „точок“ A_1 і A_3 на прямій a, якщо вона знаходиться „між“ „точками“ A_1 і A_3, що віддалена одна від одної на відстань $d \leqslant 2\omega_1$, тобто, коли вони знаходяться „між“ двома „інцидентними“ „точками“ A_1 і A_3.

Звідси: якщо дві „точки“ A_1 і A_2 утворюють одиничне коло помилок, то всі точки $A_3, A_4, \ldots, A_n$, які попадають на одиничне коло помилок, знаходяться між A_1 і A_2, і кожну з них можна вважати за таку, що знаходиться „між“ двома другими в порядку їх номерів.

4) Перетворюючи „точку“ в „точку“, „пряму“ в „пряму“ за допомогою руху, ми зустрічаємо в практиці ряд причин, що вводять помилку в побудування.

Як вже зазначалося, ми не можемо відрізнити в практиці дві „інцидентні“ „точки“, „інцидентну“ „точку“ і „пряму“, а також дві „прямі“, якщо їх середні лінії знаходяться одна від одної на віддалі, меншій за $2\omega_1$. Причому, такі дві „прямі“ ми будемо називати умовно „інцидентними прямими“. Такі прямі також характеризуються певною *смугою помилок*, яку в цьому випадку назвемо *смугою „інцидентності“ двох „прямих“*.

Дві різні неінцидентні „прямі“, перетинаючись, визначають „точку“, точність позначення якої на рисунку характеризується „площею помилок“, або „площею відхилень“. Її форма і величина залежить в основному лише від кута α, під яким перетинаються ці прямі. Якщо позначити площу помилок через T, то ця залежність виразиться такою формулою

$$T = \frac{4\,\omega_0^2}{\sin\alpha}.$$

В граничних випадках ця площа помилок може прийняти форму квадрата з стороною $2\omega_0$, якщо прямі взаємноперпендикулярні, або розтягнутися („вырождается") в „смугу інцидентності двох прямих".

II.

Відрізком в геометрії називають сукупність двох точок A і B; точки M, що лежать між A і B, називаються внутрішніми точками відрізка, точки A і B — кінцями відрізка, а всі останні точки прямої AB — зовнішніми точками у відношенні до відрізка. У практиці при графічному зображенні відрізка на папері у вигляді певної смужки за допомогою олівця чи пера-рейсфедера не всяку сукупність двох „точок" можна назвати відрізком, так само, як і не всяку „точку" M, що знаходиться між „точками" A і B, можна відрізнити від точок A і B. Якщо „точки" A і B „інцидентні", то про відрізок не доводиться говорити.

Тут говорять про первинну помилку побудування, або *одиничне коло помилок*.

Отже, для того, щоб сукупність „точок" A і B визначала (практично) відрізок, треба щоб „точки" A і B не були „інцидентними".

Покажемо далі, що:

Через всякі дві не „інцидентні точки" (A' і B') можна провести безліч „прямих", „інцидентних" даним „точкам" (A' і B'). Всі вони належать одній області відхилень і визначають лише один „відрізок" $A'B'$.

Хай графічно задані дві „точки" A' і B', не є „інцидентними" одна одній. Тоді згідно з нашими погодженнями „точки" A' та B' знаходяться у взаємно однозначній відповідності з евклідовими точками A та B нашої площини. Тобто:

$$A' \leftrightarrow A, \quad B' \leftrightarrow B.$$

Так само „прямій" $A'B'$ взаємно однозначно відповідає евклідова пряма AB, тобто

$$A'B' \leftrightarrow AB.$$

При розгляді „інцидентних" „точок" і „прямих" будемо розрізняти *„праву інцидентність"*, якщо точка A знаходиться праворуч проведеної „прямої" a' і *„ліву інцидентність"*, якщо точка B знаходиться ліворуч „прямої" a' (рис. 4-й).

За основний напрям прямої a' приймаємо, як звичайно, напрям від A до B, якщо про це спеціально не указано (тобто напрям від початкової точки відрізка AB до його кінцевої точки).

При проведенні „прямої" (a') через дві задані „точки" (A' та B') можливі такі випадки:

1) „Пряма" a' буде граничною „праворуч інцидентною" „точці" A' і „ліворуч інцидентною" „точці" B' (це значить, що пряма a' „роз-

биває“ площину рисунка на дві „півплощини“ — праву і ліву, в одній з яких не можна провести жодної „прямої“, „інцидентної“ з „точкою“ A', а в другій — скільки завгодно „прямих“, „інцидентних“ з A', але ніякої з „точкою“ B' і що не перетинали б „прямої“ a').

2) „Пряма“ (b') гранична, „інцидентна“ „точці“ A' ліворуч, а „точці“ B' праворуч (де під поняттям „гранична“ ми розуміємо те ж, що й в попередньому випадкові).

3) Аналогічно „пряма„ c є граничною „праворуч інцидентною“ обом „точкам“ A' і B'.

4) „Пряма“ d' є граничною „ліворуч інцидентною“ з „точками“ A' і B'.

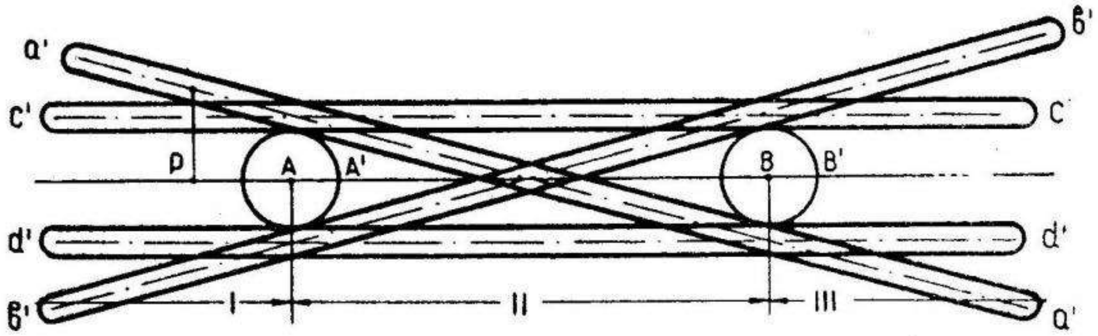

Рис. 4.

Всі „прямі“, що проходять в одній парі вертикальних кутів, утворених „прямими“ a' і b', а саме, яким належать „точки“ A' і B', будуть „інцидентними“ з „точками“ A' і B', а в другій парі вертикальних кутів, утворених тими ж „прямими“, не будуть „інцидентними“ з „точками“ A' і B' одночасно.

Праворуч „прямої“ c' можуть проходити „прямі“, „інцидентні“ „точкам“ A' і B', а ліворуч — ні, оскільки c — гранична „пряма“.

Те ж саме можна сказати відносно „прямої“ d'. Ліворуч d' можуть проходити „прямі“, „інцидентні“ з „точками“ A' і B', а праворуч — ні.

„Прямі“ c', d', a' і b' — виділяють область площини рисунку χ, в якій може проходити безліч „прямих, інцидентних“ „точкам“ A' і B'. Цю область χ ми назвемо *одиничною областю помилок*, або одиничною областю відхилень і віднесемо її також до основних первинних помилок побудувань.

Таким чином, через „точки“ A' і B' проходять безліч „прямих“, „інцидентних“ з A' і B'.

Всі вони належать одній області відхилень χ. „Точки“ A' і B'-розбивають область відхилень χ на три ділянки — I, II, III. Ширина кожної з них 2β в будь-якій точці P прямої AB може бути обчислена за формулами:

1) $2\beta_I = 2\dfrac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{1-\lambda}$;

2) $2\beta_{II} = 2\dfrac{\lambda\omega_0 - \omega_0}{\lambda - 1} = 2\omega_0$;

3) $3\beta_{III} = 2\dfrac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{\lambda - 1}$,

де $\lambda = PA:PB$, а $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Ділянку (II), для якої $2\beta_{II}=2\omega_0$, разом з „точками" A' і B' ми будемо називати *„відрізком"* „прямої" $A'B'$.

Усі „прямі", „інцидентні" точкам A' і B', визначають лише один „відрізок" $A'B'$ „прямої" $A'B'$.

Одинична *область помилок* χ може бути охарактеризована також кутом α, який утворюється в перетині прямої AB з „прямою" a'. Цей кут залежить від $x=AB$ (рис. 5-й), тобто $\alpha=f(x)$, якщо $x\to 0$, то $\alpha\to\frac{\pi}{2}$. (Область відхилень прямої χ безконечно велика. Тут не доводиться говорити про проведення „прямої" через дві „точки").

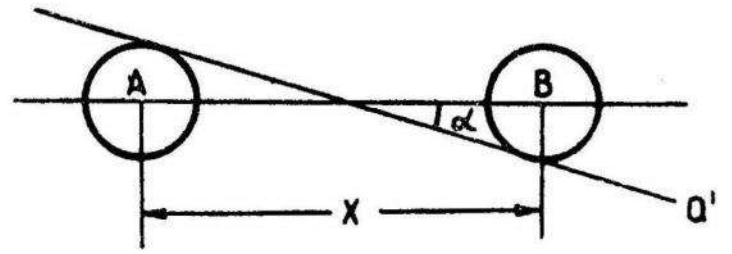

Рис. 5.

Через одну „точку" можна провести в кожному напрямі „пряму" з однаковою точністю. Ця точність характеризується інцидентністю „прямої" та „точки", або одиничним колом помилок.

Якщо $x\to\infty$ (тобто зростає), то $\alpha\to 0$, область відхилень зменшується, а точність побудувань „прямої" зростає. Звідси висновок: чим дальше взяти „точки" A і B одна від одної, тим точніше вони визначають „пряму" AB.

Кутом у геометрії називають пару променів h і k, що виходять з одної і тої ж точки O і що не належать одній прямій. Точка O зветься вершком кута, а промені h і k — його сторонами.

Тут слід також зауважити, що не всяка пара „променів" h' і k', які виходять із одної і тої ж „точки" O', практично утворює кут $(h'k')$. Тобто не всякі „півпрямі", що виходять з одної „точки" O', можна відрізнити одну від одної. Тут також ми зустрічаємося з поняттям „інцидентних" „прямих", або з *„смугою інцидентності двох прямих"*.

Отже, для того щоб пара „променів" h' і k', які виходять з одної „точки" O', визначили (практично) кут $(h'k')$, необхідно, щоб вони мали лише одну спільну „точку" O' (вершок кута) і не були умовно „інцидентними" між собою.

Кут $(h'k')$ буде практично помітним, коли його величина буде більшою за $\frac{2\omega_1}{r}$, де $2\omega_1$ — величина дуги кола радіуса r, центр якого знаходиться в точці O' — вершкові кута, і являє собою за величиною основну первинну помилку 1-го роду.

Позначивши кут $(h'k')$ через φ, маємо:

$$\varphi\geqslant\frac{2\omega_1}{r}.$$

Якщо $r\to\infty$, то $\varphi\to 0$, кут вироджується в смугу „інцидентності" двох „прямих" або просто в „пряму". Якщо $r\to 0$, то про кут не доводиться говорити, оскільки практично ми маємо справу в цьому випадку з точкою так само, як у випадку $r \to 2\omega_1$ ми маємо справу з графічно заданою „точкою".

Кут $\varphi = \frac{2\omega_1}{r}$ ми назвемо *одиничним кутом помилок* або *одиничною кутовою помилкою*, яку також слід віднести до *первинних помилок* — геометричних побудов.

Отже, $2\omega_1 \leqslant r < \infty$, оскільки побудову проводять на обмеженій ділянці „площини" (аркуш паперу). Звідси також можна зробити висновок, що для збільшення точності побудови і виміру кута слід брати радіус допоміжного кола r, на якому відраховують дуги, як можна більшим.

У практиці рисування ми широко використовуємо рух і особливо „зсув", який здійснюється за допомогою лінійки та косинця.

Крім зсуву, широко використовується також обертання навколо точки в одній площині, що здійснюється за допомогою циркуля.

У площині рисунка ми маємо систему „точок" і „прямих". Тому вкажемо, які саме властивості „рухів" ми будемо припускати і застосовувати до рухів.

По-перше, рух повинен бути взаємнооднозначним перетворенням точок нашої „площини" (тобто довільна „точка" рисунка повинна переходити знову в „точку" рисунка, що, звичайно, знаходиться на конечній віддалі) і також всі „прямі" повинні переходити знову в деякі „прямі" рисунка.

Будемо вважати, що в „площині" рисунка можливий один і тільки один рух, що переводить деяку „точку" A в довільно задану „точку" A' і одночасно „пряму", що йде від A до A' (і саме тільки в цьому напрямку), переводить саму в себе.

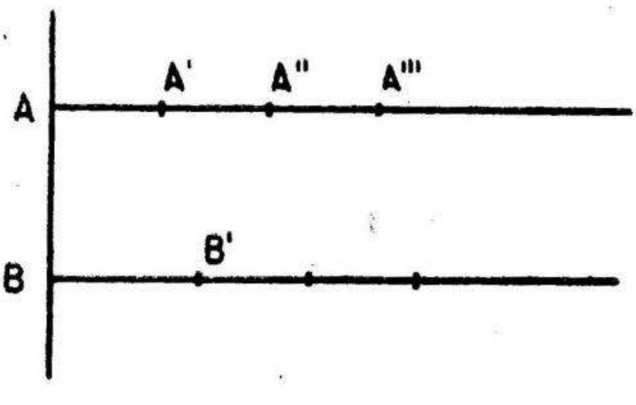

Рис. 6.

Такий рух звемо зсувом (рис. 6-й).

Якщо повторювати декілька разів один і той же зсув, то „точка" A буде переходити в „точки" $A', A'', A''' \ldots$ „півпрямої AA', спрямованої від A до A'. Як аксіому тут, очевидно, слід прийняти, що ці точки можуть зрештою досягти або пересягнути довільну точку цієї півпрямої. Шляхом повторення зворотного перетворення дістаємо ряд „точок" такого ж роду на другій „півпрямій" (тобто на продовженні першої „півпрямої" в протилежну сторону).

Уявляючи собі, що всякий зсув з початкового положення в конечне відбувається безперервним шляхом, ми назвемо „пряму", що тут розглядаємо, *траєкторією* „точки" A при цьому переносному рухові. Тоді всяку „пряму" можна розглядати, як траєкторію безконечної множини „точок" і при всякому зсуві знайдеться безліч подібних траєкторій, а саме тих „прямих", які при цьому зсувові переходять самі в себе.

При цьому дві різні траєкторії одного і того ж переносного руху не можуть перетинатися.

Тому всім траєкторіям одного і того ж переносного руху дають назву *паралельних прямих*.

Таким чином, поняття паралельності в практичному рисуванні вводиться на базі деяких властивостей руху. Тут, зовсім природно, приймають, що через кожну „точку" A (що не „інцидентна" „прямій" a) проходить у всякому разі хоч одна „пряма", паралельна до „прямої" a, а саме — траєкторія „точки" A при зсувові (площини) вздовж заданої „прямої" a.

У геометричному рисуванні при перенесенні величин чи рисуванні паралельних ліній надзвичайно часто застосовується операція зсуву, наприклад, примушуючи косинець зміщуватися вздовж лінійки.

При цьому досвід показує, що всі точки косинця описують паралельні прямі.

Характеризуємо тепер рух, що вводиться в рисування за допомогою циркуля. Це так зване обертання навколо одної „точки". При цьому рухові залишається без змін яка-небудь точка площини, наприклад O, що залишається на місці, або, як кажуть, переходить сама в себе при перетворенні обертання (центр).

При цьому існує тільки один рух, який переводить промінь a, що виходить з точки O, в будь-який другий промінь a', що також виходить з точки O.

Усі обертання уявляють собі здійсненими безперервно, виходячи з певного початкового положення, і знову можна говорити за траєкторії, які при цьому описує кожна точка.

Тут також як аксіому, слід прийняти таке твердження: промені $a, a' \ldots$, що дістаємо при повторенні одного і того ж обертання з променя a навколо „точки" O, повинні врешті або досягти, або пересягнути всяку півпряму, що виходить з точки O.

Тому безперервне обертання повинно зрештою привести промінь a в його початкове положення, причому, і кожна „точка" A повинна повернутися в своє початкове положення. Отже, траєкторії повинні являти собою замкнені лінії, що зустрічають кожний промінь, який виходить з „точки" O, в одній і тільки одній „точці" A, так, що відрізки OA виявляються взаємноконгруентними (тобто можуть бути переведені один в другий шляхом вказаного руху).

Таким чином, ці траєкторії є тим, що в практиці називають колами з центром в „точці" O.

У практиці, при рисуванні кола, ми зустрічаємось з рядом причин, що вносять помилку в побудування. По-перше, ніжка циркуля, що встановлюється в центр кола — „точку" O, — заглиблюється в товщу паперу на деяку глибину, від чого радіус кола $r = OA$ зменшується на деяку величину $r - r' = \delta r$ (рис. 7-й). Дійсна величина радіуса $r' = \sqrt{r^2 - \gamma^2}$, де γ — глибина уколу ніжки циркуля в товщу паперу. Друга причина полягає в сточуванні графіту олівця, яким рисуємо коло. Отже, тому радіус кола ще більше вкорочується. Якщо не брати до уваги інших причин, то й вказані приводять до неточності побудування кола. Так, якщо з довільного центра „точки" O' треба описати коло k довільним радіусом r, то величину помилки побудування кола при цих умовах ми можемо підрахувати так:

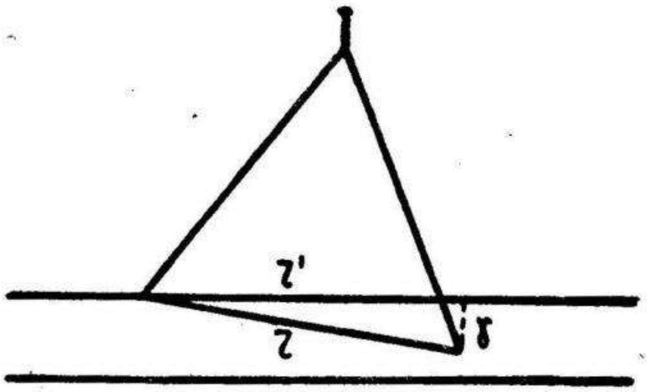

Рис. 7.

Нехай O — точка, що відповідає початковому положенню центра кола k — „точці" O'. A' —початкова „точка" кола, що маємо нарисувати (обидві ті точки довільні). Після проведення кола (зробленого одного повороту) центр кола — точка O зміститься в якусь точку C (вплив заглиблення ніжки циркуля в товщу паперу) (рис. 8-й). Позна-

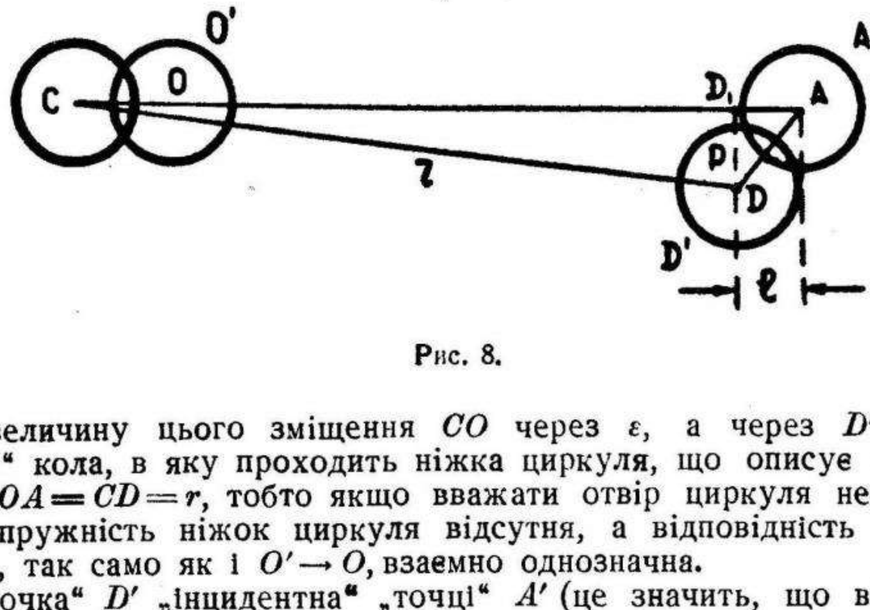

Рис. 8.

чимо величину цього зміщення CO через ε, а через D' кінцеву „точку" кола, в яку проходить ніжка циркуля, що описує коло при умові $OA = CD = r$, тобто якщо вважати отвір циркуля незмінним і якщо пружність ніжок циркуля відсутня, а відповідність $D' \to D$ і $A' \to A$, так само як і $O' \to O$, взаємно однозначна.

„Точка" D' „інцидентна" „точці" A' (це значить, що відхилення $DA = 2\,\omega_1$).

Величина D_1A проекції відхилення DA на напрям OA саме і впливає на точність побудови кола k (тому що ми фактично дістаємо зменшення радіуса OA на величину l, рівну проекції AD на напрям OA).

Ця величина для різних точок кола буде різною: таким чином, замість кола ми дістанемо спіраль.

Обчислимо помилку $l = AD_1$. З рисунка 8 бачимо:

$$CD_1 = \sqrt{r^2 - p^2} \quad (\text{де } p = DD_1),$$
$$OD_1 = CD_1 - OC = \sqrt{r^2 - p^2} - \varepsilon,$$

тоді

$$l = OA - OD_1 = r - \left[\sqrt{r^2 - p^2} - \varepsilon\right].$$

Розкладаючи l в біноміальний ряд Ньютона і обмежуючись двома членами, дістанемо:

$$l = \varepsilon + \frac{p^2}{2r} + \ldots, \text{ або } l \approx \varepsilon.$$

При уважному проведенні кола величина l, звичайно, на практиці непомітна. Оскільки $l = 2\omega \cos \alpha$ (де $\alpha = \angle DAD_1$), то відхилення $l \leqslant 2\omega_1$, тобто зіткнення дуг кола характеризується основною первинною помилкою $2\omega_1$.

III.

Повернемося тепер до відрізків та кутів.

Два „відрізки" AB і $A'B'$ назвемо конгруентними, або рівними, якщо існує рух, який приводить ці відрізки в „інцидентне" положення, тобто „точку" A переводить в „точку" A', „точку" B в B' і одиничну область помилок χ в χ'. При цьому „інцидентні" відрізки повинні визначати одну і ту ж одиничну область помилок χ (рис. 9).

Дві „інцидентні" „точки" характеризуються одним одиничним колом помилок, радіус якого $= \omega_0$, а тому:

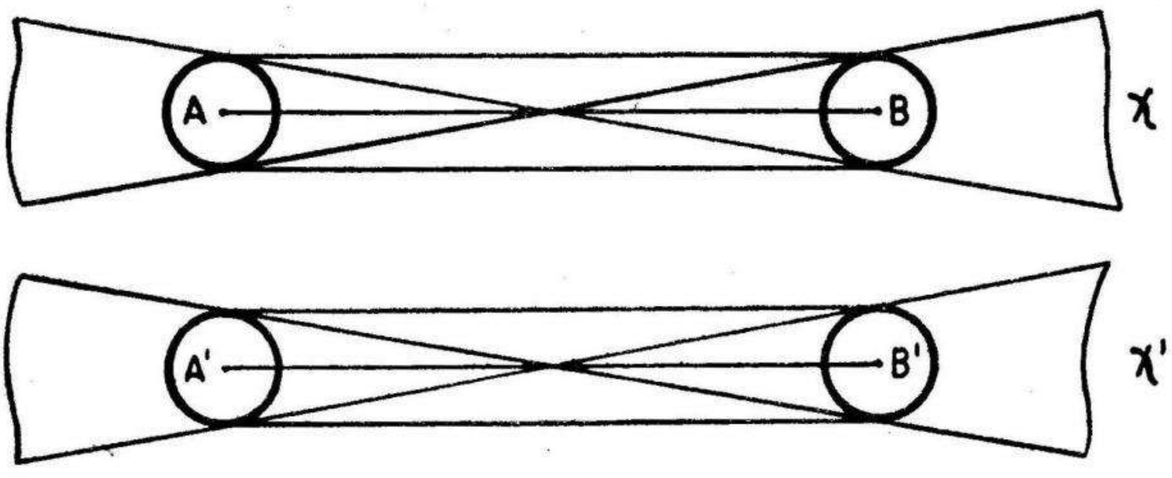

Рис. 9.

1) Всі такі „точки" наших „відрізків" повинні належати одиничній області помилок χ.
2) Помилка порівняння конгруентних відрізків не повинна перевищувати величини $\pm 4\omega_1$.

Справді, хай „точки" A і B — кінці „відрізка" AB, „точка" A' (кінець „відрізка" $A'B'$) при суміщенні з A може зайняти одно з указаних на рис. 10 положень A_1, A_2, залишаючись в той же час „інцидентною“ з „точкою“ A, якщо віддалі між їх відповідними точками (центрами „точок“) не перевищують $2\omega_1$, як свого максимума.

Таке саме зауваження можна зробити і відносно „точок“ B та B'. Можна сказати ще, що помилка порівняння двох „конгруентних“

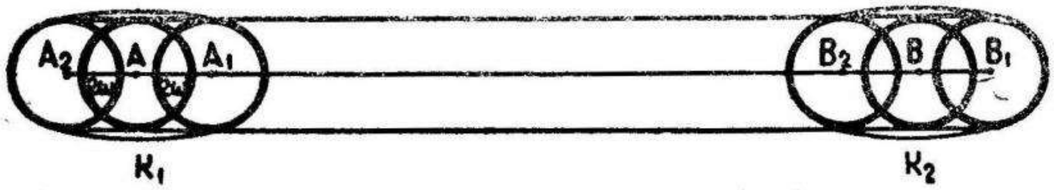

Рис. 10.

відрізків характеризується двома овалами помилок k_1 і k_2, які вміщають у собі відповідно „точки“ A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2.

Аналогічно „кут“ (hk) називають конгруентним, або рівним кутові $(h'k')$, якщо існує рух, який приводить в „інцидентне“ положення „півпрямі“ h та h' і „півпрямі“ k та k' одночасно (а значить і „вершини“ O та O' цих кутів).

Область помилок порівняння двох „кунгруентних“ кутів не повинна перебільшувати величини подвоеного одиничного кута помилок, тобто $2\,\frac{2\,\omega_1}{r}=\frac{4\,\omega_1}{r}$.

Будемо називати „відрізок“ AB „прямої“ a більше „відрізка“ $A'B'$ тої ж самої або іншої „прямої“ a', а „відрізок“ $A'B'$ менше „відрізка“ AB, якщо існує рух, який A' і B' „відрізка“ $A'B'$ переводить у внутрішні „точки“ A'', B'' відрізка AB (тобто у внутрішні „точки“ A'', B'', що не „інцидентні“ „точкам“ A і B).

Аналогічно вводиться поняття більшого і меншого кута.

Співвідношення „більше“, а також „менше“ мають транзитивну властивість:

Якщо $AB > CD$, а $CD > EF$, то $AB > EF$. Крім того, ці співвідношення інваріантні відносно руху, оскільки співвідношення „між“, що визначає поняття внутрішніх точок відрізка, не порушується рухом.

Якщо AB і BC — два відрізки з спільним кінцем B, що належать одній і тій же одиничній області помилок χ, причому „точка“ B лежить „між“ „точками“ A і C, то відрізок AC називають сумою „відрізків“ AB та BC і записують:

$$AB+BC=AC.$$

Якщо відрізки AB і CD не належать одній і тій же області помилок, то під їх сумою розуміють третій відрізок EF, який має таку внутрішню „точку“ O, що $EO=AB$, а $OF=CD$ і „точка“ O належить одиничній області помилок відрізка EF.

Під сумою n „відрізків“ $A_1A_2A_2'A_3 \ldots A_n' A_{n+1}$ розуміють „відрізок“ B_1B_{n+1}, в середині якого існує $n-1$ таких „точок“ $B_2B_3 \ldots B_{n-1}$, що $A_1A_2=B_1B_2$; $A_2'A_3=B_2B_3 \ldots A_n' A_{n+1}=B_nB_{n+1}$, причому B_j знаходиться між B_i та B_k для $i<j<k$ (або $i>j>k$) і всі внутрішні „точки“ $B_2, B_3 \ldots B_n$ належать одиничній області помилок відрізка B_1B_{n+1}.

Якщо ж AB та BC два „відрізки" з спільним кінцем B, що належать одній і тій же області помилок χ, причому „точка" C лежить „між" „точками" A і B, то „відрізок" AC називають різницею відрізків AB і BC і записують:

$$AB - BC = AC.$$

Різниця „відрізків", як і сума їх, інваріантна відносно руху.

Встановлюючи в геометрії поняття довжини, мають на увазі оцінити кожний відрізок дійсним додатнім числом. Це число і звуть довжиною відрізка. Ця оцінка, а значить, і довжина повинна бути зв'язана з властивістю відрізка бути рівним другому відрізку, більшим за нього чи меншим. Додатнє число d, що називаємо довжиною відрізка AB, як функція відрізка AB, $d(AB)$, повинно вдовольняти такі вимоги:

1. Функція d повинна бути інваріантна відносно руху Γ, тобто: $d(AB) = d(A'B')$, де $A' = \Gamma A$, $B' = \Gamma B$, а Γ — будь-який рух. Коротко: конгруентні відрізки мають однакову довжину (рівним відрізкам відповідають рівні числа).
2. Функція d аддитивна: тобто, якщо B знаходиться між A і C, то $d(AB) + d(BC) = d(AC)$.

   Інакше: довжина суми двох відрізків рівна сумі довжин цих відрізків.
3. Якщо деякому наперед зафіксованому відрізкові відповідає число, рівне одиниці, тобто, якщо деякому відрізкові приписати одиничну довжину ($d = 1$), то кожному відрізкові відповідає одне і тільки одне додатнє число, тобто кожний відрізок має довжину і притому єдину.

   Звідси робимо висновок:

1) Довжина суми конечного числа відрізків повинна бути рівною сумі їх довжин і тому повинна бути більшою довжини кожного з них.
2) Більший відрізок повинен мати більшу довжину, бо його можна розглядати, як суму доданків, з яких один рівний меншому відрізкові.

Коли вимоги 1 — 3 задовольняються, то говорять, що встановлена система виміру відрізків, або система довжин відрізків. Число, що вказаним способом відповідає кожному відрізкові, зветься довжиною цього відрізка.

Зауважимо, що при формулюванні вимог 1 — 3 треба мати на увазі що область помилок порівняння двох конгруентних відрізків характеризується двома овалами помилок з віссю $4\omega_1$.

Для прикладу розглянемо два найбільш поширені в практиці способи виміру довжини графічно заданого відрізка AB: 1) вимірювання відрізка за допомогою масштабної лінійки; 2) за допомогою спеціального циркуля, пристосованого для вимірювання.

У першому випадку (приймаючи за масштабну одиницю, наприклад, міліметр) масштабну лінійку безпосередньо прикладають до відрізка, що вимірюється, і відраховується його довжина згідно з поділками лінійки. При цьому дістають, звичайно, наближене значення довжини відрізка $AB = l_i$.

Вимірюючи відрізок декілька разів, ми будемо діставати різні значення довжини $l_1, l_2 \ldots l_n$.

Причому ці виміри вважаються незалежними, однаково точними і вільними від сталої помилки.

Отже, для одного і того ж відрізка ми дістанемо різні величини довжини. Кожна з цих величин наближається до дійсної довжини l_0 заданого відрізка з тою чи іншою точністю. Як відомо, в практиці, щоб зменшити помилку при вимірюванні, роблять так: повторивши вимір відрізка n разів, складають середнє арифметичне цих вимірів: $l = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}$, яке і приймають за наближене значення справжньої довжини відрізка l_0, тобто

$$l \approx l_0.$$

Помилка вимірювання $l_0 - l = \Delta$ залежить від багатьох вказаних раніше причин як об'єктивного, так і суб'єктивного характеру. Якщо масштабну лінійку вважати вірною, то помилка вимірювання не повинна перевищувати величини $\pm 4\omega_1$. Тобто, в цьому випадку вона повинна лежати в межах двох овалів помилок. Відношення $\frac{2\omega_0}{\Delta} = K_{AB}$. буде характеризувати точність виміру і являє собою коефіцієнт точності виміру заданого відрізка AB.

У другому випадку при вимірюванні графічно заданого відрізка AB з допомогою вимірного циркуля беруть отвір циркуля, що відповідає масштабному відрізкові на масштабній лінійці і проводять вимір, тобто відкладають його вздовж відрізка AB.

Помилка, яку дістаємо внаслідок такого вимірювання довжини заданого відрізка, складається з таких помилок:

1) При вимірюванні масштабної одиниці a циркулем на масштабній лінійці ми робимо деяку помилку ξ, що характеризується двома смугами „інцидентності" „прямої" (штрих на масштабній лінійці) та „точки" (вістря ніжки циркуля), ширина яких не перевищує величини $\pm 2\omega_0$. Так що одержана внаслідок виміру величина a_1 масштабної одиниці відрізняється від дійсної a на величину $\xi \leqslant 2\omega_0$ тобто,

$$a_1 - a = \pm 2\omega_0.$$

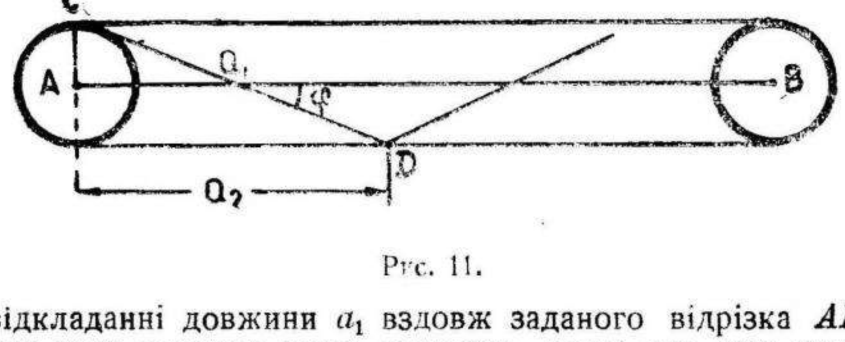

Рис. 11.

2) При відкладанні довжини a_1 вздовж заданого відрізка AB будемо кожного разу вносити нову помилку, тому що при встановленні ніжки циркуля на відрізкові ми не будемо попадати завжди на середню лінію смужки (що являє собою, в даному разі, відрізок AB), а будемо попадати, приміром, в точку $C, D \ldots$ і т. д. (рис. 11-й)

Відкладений напрям a_1 буде утворювати деякий кут φ з середньою лінією AB. При неодноразовому відкладуванні цієї довжини по AB проекції її будуть скорочуватися до величини:

$a_2 = \sqrt{a_1^2 - (2\omega_0)^2}$, де $2\omega_0$ — ширина смужки („відрізка“).

Якщо позначити різницю $a_2 - a_1 = \delta$, то дістанемо:

$$a + \delta = \sqrt{a_1^2 - 4\omega_0^2} = \sqrt{(a \pm 2\omega_0)^2 - 4\omega_0^2} = \sqrt{a^2 \pm 4a\omega_0},$$

або $(a+\delta)^2 = a^2 + 4a\omega_0$, звідки $2a\delta + \delta^2 = \pm 4a\omega^0$,

або $\delta + \frac{\delta^2}{2a} = \pm 2\omega_0$ і значить, $|\delta| < |2\omega_0|$.

Як і в попередньому випадкові, вимірювання проводиться декілька разів, і потім за наближену довжину відрізка приймають середнє арифметичне l всіх зроблених вимірів відрізка, дійсна величина якого є l_0.

Помилка $l_0 - l = \Delta$ в цьому випадку буде залежати від *характеру* величин ξ та δ.

Аналогічно проводять у практиці і вимір за допомогою транспортира.

Хай задано графічно кут AOB, дійсна величина якого α_0. Прикладаючи транспортир до одного з боків заданого кута, наприклад, OA

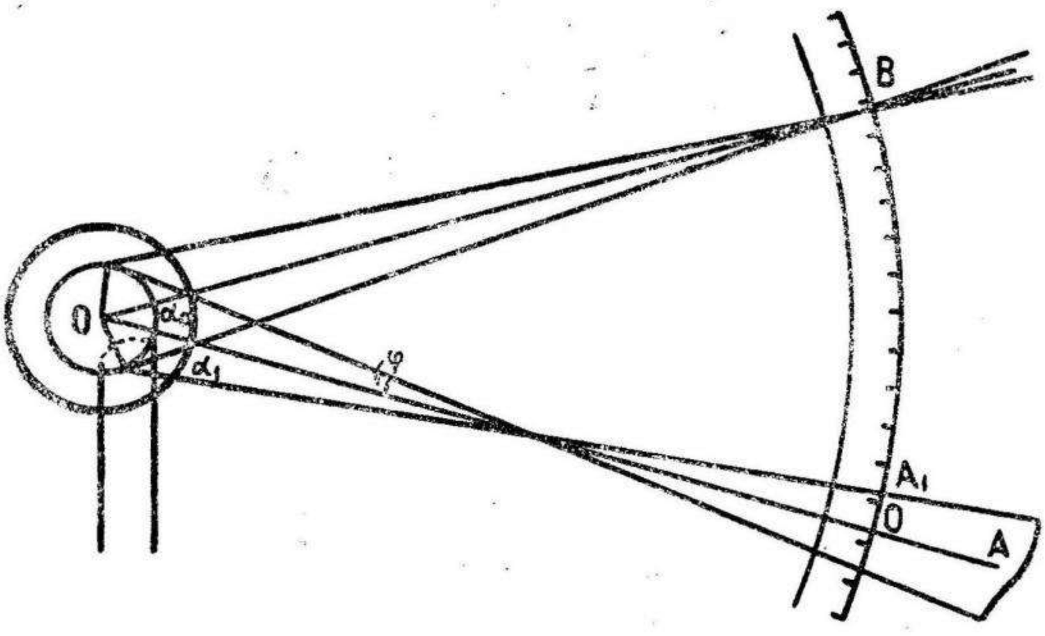

Рис. 12.

так, щоб центр транспортира (позначений рискою) злився з вершком кута — точкою O, а лінійка транспортира (його діаметр) пішла по стороні OA, відраховують величину кута AOB згідно з поділками транспортира. Вимір проводять декілька разів і потім за наближену величину кута беруть α — середнє арифметичне одержаних вимірів. При кожному такому вимірі ми робимо помилку, що залежить від помилок:

1) суміщення центра транспортира (риски, що позначає центр) з вершком кута — точкою O;

2) прикладання лінійки транспортира до сторони кута OA,
3) відрахування поділок дуги транспортира при стороні OB.

Перша помилка суміщення центра транспортира з вершком кута O характеризується одиничною смугою помилок інцидентності „прямої“ і „точки“, ширина якої $2\omega_0$.

Друга помилка — прикладання лінійки транспортира до сторони кута OA (рис. 12) характеризується одиничною областю помилок χ, яка, в свою чергу, залежить від кута φ між променем OA та прямою, яка визначається напрямком лінійки транспортира.

Третя помилка — відрахування поділок дуги транспортира — характеризується величиною одиничного кута помилок $\frac{2\omega_1}{r}$.

На рис. 12 перша помилка позначена через OO_1. Точка O_1 може зайняти будь-яке положення на колі радіуса ω_0 з центром у точці O (на цьому рисунку не показано „прямих“, що утворюють кут $A'O'B'$, а лише відповідні їм прямі OA та OB і відповідну вершині точку O).

O_1A_1 — положення лінійки транспортира після прикладання її до сторони кута OA. Одинична область помилок χ, що при цьому утворюється, залежить від кута φ між OA та O_1A_1.

Тоді ми, фактично, вимірюємо не кут $AOB = \alpha_0$, а кут $A_1O_1B = \alpha_1$, що є наближеним значенням дійсної величини α_0:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \varphi.$$

А якщо врахувати третю помилку — відрахування поділок дуги транспортира при стороні $OB = \pm\frac{2\omega_1}{r}$, то матимемо:

$$\alpha_0 \simeq \alpha_1 + \varphi \pm \frac{2\omega_1}{r}.$$

Отже, область помилок одного виміру кута буде: $\sigma = 2\left(\varphi \pm \frac{2\omega_1}{r}\right)$.

Відношення $\frac{2\omega_0}{\sigma}$ називаємо коефіцієнтом точності даного виміру.

Г. Л. БУЙМОЛА К ВОПРОСУ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

Резюме

Автор изучает первичные ошибки, которые возникают в геометрических построениях при простейших геометрических операциях, если рассматривать точки и прямые в плоскости чертежа, как некоторые пятна и полосы.

Введенные понятия первичных ошибок автор применяет к вычислению областей погрешности, возникающих при измерении графически заданных отрезка и угла.