Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том XII Серія фізико-математична, випуск 3 1949

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ

РАСТЯЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВПАЯННЫМ КОЛЬЦОМ, ОБЛАСТЬ КОТОРОГО ВМЕСТЕ С ОБЛАСТЬЮ ПЛАСТИНКИ ОТОБРАЖАЕТСЯ НА КРУГ ПРИ ПОМОЩИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Допустим, что в упругой неограниченной однородной изотропной плоскости сделано отверстие, ограниченное контуром L_1. В это отверстие впаяно упругое изотропное, но сделанное из другого материала, кольцо. Кольцо ограничено контурами L_1 и L_2. Обозначим область, занятую пластинкой, через s, таким образом, контур L_1 будет границей двух областей s и s_1, где s_1 — область кольца.

Допустим, что пластинка растягивается усилиями P и требуется определить ее упругое равновесие. Выберем начало координат внутри контура L_2, т. е. внутри отверстия кольца и направим ось Y в направлении усилий P.

При деформации пластинки на контуре L_1 должны выполняться следующие условия:

$$u+iv=u_1+iv_1 \qquad \text{и} \qquad X_{1n}+iY_{1n}=X_n+iY_n \tag{1,1}$$

где индексом „1" обозначены величины, относящиеся к области кольца, а без индекса „1" те же величины, но относящиеся к области пластинки.

В дальнейшем все элементы (упругие постоянные, компоненты напряжения и пр.) будем отмечать индексом „1", если они относятся к области кольца, а без индекса или с другим индексом — те же элементы, относящиеся к области пластинки.

Условия (1,1) в функциях комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ соответственно запишутся:

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi_2(t)}-\frac{1}{\mu}\left[\bar t\varphi_2'(t)+\psi_2(t)\right]=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{\varphi_1^\circ(t)}-\frac{1}{\mu_1}\left\{\bar t\varphi_1^{\circ\prime}(t)+\psi_1^\circ(t)\right\} \tag{1,2}$$

$$\overline{\varphi_2(t)}+\bar t\varphi_2'(t)+\psi_2(t)=\overline{\varphi_1^\circ(t)}+\bar t\varphi_1^{\circ\prime}(t)+\psi_1^\circ(t), \tag{1,3}$$

где t афикс точки контура L_1, функции φ_2, ψ_2 и $\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ$ соответственно характеризуют напряженное состояние области пластинки s и области кольца s_1.

Если контур кольца L_2 свободен от воздействия внешних сил, то

$$X_{1n}-iY_{1n}=0,$$

на L_2, что равносильно

$$\overline{\varphi_1^\circ(t)}+\bar t\varphi_1^{\prime\circ}(t)+\psi_1^\circ(t)=0, \tag{1,4}$$

Допустим далее, что область $s+s_1$ отображается при помощи рациональной функции на внешность круга радиуса $R_1<1$, так что контур L_1 при этом отображении переходит в окружность единичного радиуса. Пусть

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+g_1\frac{1}{\zeta}+g_2\frac{1}{\zeta^2}+\ldots+g_n\frac{1}{\zeta^n}\right)$$

будет отображающая функция, тогда в преобразованной области контурные условия (1,2) и (1,3) примут вид:

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right\}=$$

$$=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{\varphi_1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\left(\frac{1}{\mu_1}\right)\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma)\right\}, \tag{1,5}$$

$$\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=\overline{\varphi_1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma), \tag{1,6}$$

где введено обозначение $\varphi_2[\omega(\zeta)]=\varphi(\zeta)$;

$$\psi_2[\omega(\zeta)]=\psi(\zeta);$$

$$\varphi_1^\circ[\omega(\zeta)]=\varphi_1(\zeta);$$

и

$$\psi_1^\circ[\omega(\zeta)]=\psi_1(\zeta),$$

а σ — точка единичной окружности.

Кроме этого, из условия (1,4) мы получаем еще одно условие

$$\overline{\varphi_1}(\overline{\sigma_1})+\frac{\omega(\overline{\sigma_1})}{\omega'(\sigma_1)}\varphi_1'(\sigma_1)+\psi_1(\sigma_1)=0,$$

где σ_1 точка окружности радиуса R_1 или

$$\overline{\varphi_1}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+\frac{\omega\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}\varphi_1'(R_1\sigma)+\psi_1(R_1\sigma)=0 \tag{1,7}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функций φ, ψ, φ_1 и ψ_1, которые должны удовлетворять условиям (1,5), (1,6) и (1,7). Так как область s содержит бесконечно удаленную точку, то для полного определения функций φ и ψ нужно еще знать их поведение в окрестности бесконечно удаленной точки.

В бесконечно удаленных частях области s имеем равномерное напряженное состояние, которое характеризуется следующим значением компонент напряжения

$$X_x=0;\quad Y_y=p;\quad X_y=0;$$

а, следовательно, функции φ и ψ, как известно, в этом случае будут иметь вид:

$$\varphi(\zeta) = \frac{Rp}{4}\zeta + \varphi_0(\zeta)$$

и

$$\psi(\zeta) = \frac{Rp}{2}\zeta + \psi_0(\zeta),$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — функции голоморфные в области $s + s_1$, включая бесконечно удаленную точку, то есть имеющие при достаточно больших ζ разложение вида

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^{-\nu}; \qquad \psi_0(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \zeta^{-\nu}.$$

Не меняя напряженного состояния, мы можем положить $a_0 = 0$, то есть $\varphi_0(\infty) = 0$.

Что касается функций φ_1, ψ_1, то они должны быть голоморфными внутри кольца, ограниченного окружностями радиуса единица и $R_1 < 1$, а следовательно могут быть представлены

$$\varphi_1(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta),$$

$$\psi_1(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta),$$

$P_1(\zeta)$ и $Q_1(\zeta)$ — функции, голоморфные внутри единичного круга, то есть

$$P_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \zeta^\nu, \qquad Q_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \zeta^\nu,$$

а функции $P_2(\zeta)$ и $Q_2(\zeta)$ вне окружности радиуса R_1, включая бесконечно удаленную точку, то есть

$$P_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu \zeta^{-\nu}, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu (\zeta)^{-\nu}.$$

Подставив значение функций в условия (1,5) и (1,6)

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0^1(\sigma) + \psi_0(\sigma)\right\} + \frac{\varkappa}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\mu}\left\{\frac{Rp}{4}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} + \frac{Rp}{2}\sigma\right\} =$$

$$= \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1^1(\sigma) + Q_1(\sigma)\right\} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right) -$$

$$- \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega^1(\sigma)}P_2^1(\sigma) + Q_2(\sigma)\right\} \tag{1,8}$$

$$\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)+\frac{Rp}{4}\frac{1}{\sigma}+\frac{Rp}{4}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}+\frac{Rp}{2}\sigma=$$

$$=\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega^1(\sigma)}P_1'(\sigma)+Q_1(\sigma)+\overline{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)+Q_2(\sigma). \quad (1{,}9)$$

Умножим обе части равенства (1,8) и (1,9) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ и проинтегрируем по единичной окружности при условии, что $|\zeta|>1$. Из (1,8) получим:

$$-\frac{1}{\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{\mu}\psi_0(\sigma)-\frac{1}{\mu}b_0-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{C}_0-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{P_2'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{1}{\mu_1}Q_2(\zeta) \quad (1{,}10)$$

И из (1,9)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\psi_0(\zeta)-\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}+\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+b_0=$$

$$=-\overline{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\overline{C}_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega^1(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-Q_2(\zeta). \quad (1{,}11)$$

Условия (1,10) и (1,11) не совсем эквивалентны условиям (1,8) и (1,9). К ним нужно еще присоединить равенство, которое получим из (1,8) и (1,9), если их умножить на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировать по единичной окружности.
Эти равенства будут:

$$-\frac{1}{\mu}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{1}{\mu}b_0=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{C}_0-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}d_0-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega^1(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1,12)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+b_0=\overline{C}_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1^1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+d_0+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1,13)$$

Проинтегрируем теперь равенства (1,8) и (1,9), когда ζ находится внутри единичной окружности, получим еще два, эквивалентные этим равенствам, соотношения:

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0^1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\mu}b_0-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{Rp}{2}\zeta=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{C}_0-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\mu_1}Q_1(\zeta)+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}, \quad (1,14)$$

$$\overline{\varphi_0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\,d\sigma+b_0+\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{Rp}{2}\zeta=\overline{C}_0+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+Q_1(\zeta)+P_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}. \qquad (1,15)$$

Определим из равенства (1,10), (1,11), (1,14), (1,15) функции P_1, P_2, Q_2, Q_1 через функции φ_0 и ψ_0.

Для этой цели умножим равенство (1,11) на $\frac{\varkappa_1}{\mu_1}$ и вычтем его из (1,10) и в результате получим функцию $Q_2(\zeta)$:

$$Q_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(\zeta)-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu_1(\varkappa_1+1)}\frac{Pp}{4}\frac{1}{\zeta}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}. \qquad (1,16)$$

Умножая (1,11) на $\frac{1}{\mu_1}$ и складывая его с (1,10), найдем, что функция

$$\overline{P_1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(\zeta)-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}+\overline{C}_0. \quad (1,17)$$

Из равенств (1,14) и (1,15) определим функции $\overline{P_2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ и $Q_1(\zeta)$

$$Q_1(\zeta)=\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\zeta+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b. \tag{1,18}$$

$$\overline{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\zeta+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0-\overline{C}_0. \tag{1,19}$$

Все интегралы, стоящие в правых частях равенств (1,16), (1,17), (1,18) и (1,19) могут быть, как известно, вычислены элементарным путем [1].

Начнем с функции $\overline{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Предварительно заметим, что

$$\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{\nu=1}^{n}g_\nu\zeta^{-\nu}\right),$$

а следовательно,

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}=h_0+h_1\zeta+\ldots+h_n\zeta^n+f(\zeta)=$$

$$\frac{\overline{R}\sigma^n(1+\overline{g}_1\zeta^2+\ldots+g_n\zeta^{(n+1)})}{R(-ng_n-(n-1)g_{n-1}\zeta+\ldots+\zeta^{n+1})}, \tag{1,20}$$

[1] См. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1935 г.

где $f(\zeta)$ голоморфная функция вне окружности радиуса 1, включая и бесконечно удаленную точку и $f(\infty)=0$. Если через $\alpha_k\, k=1,\ldots,(n+1)$ обозначим корни знаменателя выражения (1,20), то

$$f(\zeta)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-\alpha_k},$$

где g_k — вычет функции $\dfrac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}$ в точке $\zeta=\alpha_k$. Все числа α_k будут $|\alpha_k|<R_1$ и среди них не будет равных, ибо знаменатель не имеет кратных корней, в противном случае отображение не было бы конформным.

После таких замечаний интеграл

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0^1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-2}A_k\zeta^k+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi_0^1(\zeta)\right]=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}\zeta^{-k}+f(\zeta)\,\varphi_0^1(\zeta)\right\},$$

где

$$A_k=\sum_{\nu=1}^{n-(k+1)}h_{k+\nu+1}\nu a_\nu \quad \text{и} \quad A_{-k}=\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu(\nu+k-1)\,a_{\nu+k-1}, \qquad (1,22\text{a})$$

и интеграл

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\left\{\sum_{k=0}^{n}h_k\zeta^k-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\right\}=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}f(\zeta), \qquad |\zeta|>1.$$

Таким образом,

$$\overline{P_1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\psi_0(\zeta)+\varphi_0'(\zeta)\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-\alpha_k}-\sum_{\kappa=1}^{\infty}A_{-k}\zeta^{-k}\right\}+$$

$$(1,22)$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-a_k}+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{\zeta}-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0+\overline{C}_0.$$

Перейдя к сопряженному значению на окружности радиуса единицы, найдем выражение для функции $P_1(\zeta)$

$$P_1(\zeta)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\overline{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\overline{\varphi}_0^1\left(\frac{1}{\zeta}\right)\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{\overline{g}_k(\zeta)}{1-\overline{a}_k\zeta}-\sum_{\kappa=1}^{\infty}\overline{A}_{-k}\zeta^k\right\}+ \tag{1,23}$$
$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{\overline{g}_k\zeta}{1-\overline{a}_k\zeta}+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\zeta-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\overline{b}_0+C_0.$$

Возьмем теперь выражение для функции $\overline{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Интегралы, стоящие в (1,19), берутся, когда ζ находится внутри единичного круга, а следовательно:

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\sum_{\kappa=0}^{n-2}A_k\zeta^k\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}$$

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=0}^{n}h_k\zeta^k,$$

где A_k имеет прежнее значение.

Подставляя значение этих интегралов в (1,19) и перейдя к сопряженному значению на окружности радиуса единица, получим:

$$P_2(\zeta)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(\zeta)-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}\overline{A}_k\zeta^{-\kappa}+$$
$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=0}^{n}\overline{h}_k\zeta^{-\kappa}+\frac{Rp}{2}\zeta^{-1}+\overline{b}_0\right\}-C_0. \tag{1.24.d}$$

Точно так же подсчитываются интегралы в выражении (1,18), например:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{g_kP_1'(a_n)}{\zeta-a_k}-\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)P_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\quad\text{где}\quad|\zeta|<1$$

и

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\left\{\sum_{n=1}^{n-2}k\overline{A}_k\sigma^{-(\kappa+1)}-\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n}k\overline{h}_k\sigma^{-(\kappa+1)}-\right.$$

$$-\frac{Rp}{2}\sigma^{-2}\Bigg\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}A_k\zeta^k+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}\Bigg\{\frac{Rp}{4}D_k-B_k+$$

$$+\frac{Rp}{2}h_{k+2}\Bigg\}\zeta^k,$$

$$\text{где}\quad B_k=\sum_{\nu=1}^{n-(k+1)}\nu\bar{A}_\nu h_{k+\nu+1},\quad \text{и}\quad D_k=\sum_{\nu=1}^{n-(k+1)}\nu\bar{h}_\nu h_{k+\nu+1}$$

считая, что $A_{n-1}=0$.

Подставляя значения этих интегралов в (1,18), получаем:

$$Q_1(\zeta)=\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{\mu_1(\varkappa-1)-\mu(\varkappa_1-1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}A_k\zeta^k-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}B_k\zeta^k-\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}P_1'(\zeta)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_kP_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k}+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{Rp}{4}D_k+\right.$$

$$\left.+\frac{Rp}{2}h_{k+2}\right)\zeta^k+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{k=0}^{n}h_k\zeta^k+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}\zeta+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0.\quad (1,24б)$$

Вычислим теперь интегралы в (1,16), помня, что $|\zeta|>1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_kP_1'(\alpha_k)}{\zeta-\alpha_k},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n-2}k\bar{A}_k\sigma^{-(k+1)}-\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n}k\bar{h}_k\sigma^{-(k+1)}-\frac{Rp}{2}\sigma^{-2}\Bigg\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$=-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\Bigg\{\varphi_0'(\zeta)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-\alpha_k}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}\zeta^{-k}\Bigg\}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-\alpha_k}\Bigg\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n}k\bar{h}_k\zeta^{-(k+1)}+\frac{Rp}{2}\zeta^{-2}-\sum_{k=1}^{n-2}k\bar{A}_k\zeta^{-(k+1)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\Bigg\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n+1}D_{-k}\zeta^{-k}+\frac{Rp}{2}\left(\frac{h_0}{\zeta^2}+\frac{h_1}{\zeta}\right)\Bigg\}-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=1}^{n-1}B_{-k}\zeta^{-k},$$

где

$$A_{-k}=\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(\nu+k-1)\,a_{\nu+\kappa-1},$$

$$D_{-k}=\sum_{\nu=\kappa-1}^{n} \nu h_{\nu-k+1}\overline{h}_\nu \qquad (1,25)$$

и

$$B_{-k}=\sum_{\nu=\kappa-1}^{n-2} \nu\overline{A}_\nu h_{\nu-k+1}$$

и, наконец,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-a_k}.$$

Подставляя значение этих интегралов в (1,16), получим, что

$$Q_2(\zeta)=\frac{\mu(\varkappa_1-1)-\mu_1(\varkappa-1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'(\zeta)\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{g_k}{\zeta-\alpha_k}-\sum_{\kappa=1}^{\infty}A_{-k}\zeta^{-k}\right\}-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{\zeta-\alpha_\nu}\right)\left(\sum_{\kappa=1}^{n-2}k\overline{A}_k\zeta^{-[\kappa+1]}\right)+\sum_{\kappa=1}^{n-1}B_{-k}\zeta^{-k}\right\}+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(\zeta)-\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu P_1'(\alpha_\nu)}{\zeta-\alpha_\nu}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{\zeta-\alpha_\nu}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n}k\overline{h}_k\zeta^{-[k+1]}+\frac{Rp}{2}\zeta^{-2}\right\}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\zeta^{-k}D_{-k}+\frac{Rp}{2}\left(\frac{h_0}{\zeta^2}+\frac{h_1}{\zeta}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{\zeta-\alpha_\nu}+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\zeta^{-1}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0. \qquad (1,26)$$

Возьмем теперь уравнения (1,12) и (1,13), подсчитаем входящие в эти уравнения интегралы, а потом решим их относительно $\overline{C}_0$ и d_0

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=-A_0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(x_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\left\{\sum_{\kappa=1}^{n-2}k\overline{A}_k\sigma^{-[k+1]}-\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n}k\overline{h}_k\sigma^{-[k+1]}-\frac{Rp}{2}\sigma^{-2}\right\}\frac{d\sigma}{\sigma}=$$

$$=-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}A_0+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left(B_0-\frac{Rp}{4}D_0-\frac{Rp}{2}h_2\right),$$

где

$$A_0=\sum_{\nu=1}^{n-1}h_{\nu+1}\nu a_\nu;\quad B_0=\sum_{\nu=1}^{n-2}\nu\overline{A}_\nu h_{\nu+1}$$

и

$$D_0=\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\overline{h}_\nu h_{\nu+1}.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma}=h_0,$$

И, наконец,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(\sum_{k=0}^{n}h_k\sigma^k\right)P_1'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k P_1'(\sigma)}{\sigma(\sigma-\alpha_k)}d\sigma=P_1'(0)h_0+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k[P_1'(\alpha_k)-P_1'(0)]}{\alpha_k}.$$

Подставим значения полученных интегралов в (1,12) и (1,13), и решая их относительно $\overline{C_0}$ и d_0, найдем, что

$$\overline{C}_0=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left[\frac{Rp}{4}h_0+b_0-A_0\right];\tag{1,28}$$

$$d_0=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left[\frac{Rp}{4}D_0+\frac{Rp}{2}h_0-B_0\right]+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left(\frac{Rp}{4}h_0+b_0\right)+$$

$$+\frac{\mu_1(\varkappa-1)-\mu(\varkappa_1-1)}{\mu(\varkappa_1+1)}A_0-P_1'(0)h_0-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k[P_1'(\alpha_k)-P_1'(0)]}{\alpha_k}.\tag{1,29}$$

Заметим, что для нахождения постоянных C_0 и d_0 можно не составлять уравнений (1,12) и (1,13), а воспользоваться тем, что $\overline{P_2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=0$ по предположению и из (1,23) сразу получим, что при $\zeta=0$

$$\overline{C_0}=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left(\frac{Rp}{4}h_0+b_0-A_0\right).$$

Умножив (1,24) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировав по окружности единичного радиуса, найдем значение d_0, которое будет в точности совпадать со значением d_0 в (1,28).

Полученными выражениями для функций P_1, P_2, Q_1 и Q_2 задача свелась к первой основной задаче для бесконечной плоскости с отверстием, отображаемой на внешности круга радиуса $R_1 < 1$ при помощи рациональной функции вида

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{g_1}{\zeta} + \frac{g_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{g_n}{\zeta^n}\right).$$

Для решения этой задачи возьмем условия (1,7) и подставим вместо функций φ_1 и ψ_1 их значения через функции P_1, P_2, Q_1 и Q_2:

$$\overline{\varphi_1}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}\varphi_1'(R_1\sigma) + \psi_1(R_1\sigma) = \overline{P_1}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_1'(R_1\sigma) +$$

$$+ Q_1(R_1\sigma) + \overline{P_2}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_2'(R_1\sigma) + Q_2(R_1\sigma) = 0.$$

Если умножить это граничное условие на $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma}{\sigma - \eta}$ и проинтегрировать сперва, когда $|\eta| > 1$, а затем, когда $|\eta| < 1$, получим два соотношения, независимые одно от другого и эквивалентные данному граничному условию.

Эти соотношения будут:

$$- \overline{P_1}\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_1'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \eta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_2'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \eta} - Q_2(R_1\eta) + \overline{C_0} = 0 \qquad (1,37)$$

и при $|\eta| < 1$

$$\overline{P_2}\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_1'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \eta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)}P_2'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \eta} + Q_1(R_1\eta) + \overline{C_0} = 0 \qquad (1,38)$$

Интегралы, стоящие в выражениях (1,37) и (1,38), вычисляются также элементарным путем, как интегралы, стоящие в выражениях (1,14) и (1,11), только коэффициенты будут другие.

Если $|\eta| > 1$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\eta} = -\sum_{k=1}^{n+1}\frac{R_1 g_k' P_1'(\alpha_k)}{R_1\eta-\alpha_k}$$

и для $|\eta| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\eta} = \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)P_1'(R_1\eta)}{\omega'(R_1\eta)} - \sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{R_1 g_k' P_1'(\alpha_k)}{R_1\eta-\alpha_k},$$

где g_k' — вычет функции

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)} = \frac{\overline{R}R_1\eta^n(R_1^{n+1}+\overline{a}_1R_1^{n-1}\eta^2+\ldots+\overline{a}_n\eta^{n+1})}{R(-na_n-(n-1)a_{n-1}R_1\eta-a_1R^{n-1}\eta^{n-1}+R_1^{n+1}\eta^{n+1})}$$

в точке $\eta = \frac{\alpha_k}{R_1}$.

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_2'(R_1\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\eta} \text{ при } |\eta|>1 =$$

$$= -\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'(R_1\eta)\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{R_1g_k'}{R_1\eta-\alpha_k} - \sum_{\kappa=1}^{\infty}A'_{-k}\eta^{-k}\right\} +$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\nu=1}^{n+1}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n}k\overline{h}_k(R_1\eta)^{-k-1}+\frac{Rp}{2}(R_1\eta)^{-2}-\sum_{\kappa=1}^{n-2}k\overline{A}_k(R_1\eta)^{-(k+1)}\right\}\times$$

$$\times\frac{g_\nu'(R_1)}{R_1\eta-\alpha_\nu} - \frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=1}^{n-1}B'_{-k}\eta^{-k} + \frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n+1}D'_{-k}\eta^{-k}+\right.$$

$$\left.+\frac{Rp}{2}\left(\frac{h_0'}{(R_1\eta)^2}+\frac{h_1'}{R_1^2\eta}\right)\right\},$$

где

$$A'_{-k} = \sum_{\alpha=0}^{n}\frac{h'_\alpha(\alpha-1+k)d_{\alpha-1+k}}{R^{\alpha+k}},$$

$$B'_{-k} = \sum_{\nu=\kappa-1}^{n-2}\frac{\nu\overline{A}_\nu}{R_1^{\nu+1}}h'_{\nu-\kappa+1},$$

$$D'_{-k}=\sum_{\nu=k-1}^{n}\frac{\nu\bar{h}_\nu}{R_1^{\nu+1}}h'_{\nu-k+1},$$

и h'_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$ — коэффициенты главной части функции $\dfrac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}$ при ее разложении в окрестности бесконечно удаленной точки.

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}=\sum_{k=0}^{n}h_k'\eta^k+0\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Условие (1,37) после подстановки в него значений входящих интегралов и после очевидных упрощений запишется в следующем виде:

$$\overline{P_1}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+Q_2(R_1\eta)+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'(R_1\eta)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{R_1g_n'}{R_1\eta-\alpha_n}-\sum_{k=1}^{\infty}A'_{-k}\eta^{-k}\right\}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=1}^{n-1}B'_{-k}\eta^{-k}+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{R_1g_\nu'}{R_1\eta-\alpha_\nu}\sum_{k=1}^{n-2}k\bar{A}_k(R_1\eta)^{-[k+1]}-\bar{C}_0'=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{R_1g_k'P_1'(\alpha_k)}{R_1\eta-\alpha_k}+N_1(\eta), \tag{1,39}$$

где $N(\eta)$ известная функция η и $N_1(\infty)=0$

$$N_1(\eta)=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{R_1g_\nu'}{R_1\eta-\alpha_\nu}\left[\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n}k\bar{h}_k(R_1\eta)^{-[k+1]}+\frac{Rp}{2}(R_1\eta)^{-2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{Rp}{4}\sum D'_{-k}\eta^{-k}+\frac{Rp}{2}\left((R_1\eta)^{-2}+h_1'R_1^{-2}\eta^{-1}\right)\right\}.$$

Если поставить вместо $P_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right)$ и $Q_2(R_1\eta)$ их значение и значение C_0, взятые из (1,29), (1,26), (1,28), то получим одно из условий для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0

Это условие будет следующее:

$$\frac{\mu(\varkappa_1-1)-\mu_1(\varkappa-1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'(R_1\eta)\sum_{=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{R_1\eta-\alpha_\nu}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}(R_1\eta)^{-k}\right\}+$$

$$+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'(R_1\eta)\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu'R_1}{R_1\eta-\alpha_\nu}-\sum_{k=1}^{\infty}A'_{-\nu}\eta^{-k}\right\}+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right)\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{R_1g_\nu}{\eta-\alpha_\nu R_1}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}R_1^k\eta^{-k}\right\}+$$

$$\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(R_1\eta)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa+1)}\psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=1}^{n-1}(B'_{-k}-R_1^{-k}B_{-k})\eta^{-k}+$$

$$+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{R_1g'_\nu-g_\nu}{R_1\eta-\alpha_\nu}\cdot\sum_{k=1}^{n-2}k\bar{A}_n(R_1\eta)^{-[k+1]}-b_0=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{Rg'_k-g_k}{R_1\eta-\alpha_k}P'_1(\alpha_k)+N(\eta), \qquad (1,40)$$

где $N(\eta)$ известная функция $N(\eta)=N_1(\eta)+N_2(\eta)$, а

$$N_2(\eta)=-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{R_1\eta-\alpha_\nu}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n}k\bar{h}_k(R_1\eta^{-[k+1]}+\frac{Rp}{2}(R_1\eta)^{-2}\right\}-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{4}\sum_{k=1}^{n+1}D_{-k}(R_1\eta)^{-k}+\frac{Rp}{2}\left(\frac{h_0}{R_1^2\eta^2}+\frac{h_1}{R_1\eta}\right)\right\}+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{g_\nu}{R_1\eta-\alpha_\nu}+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}(R_1\eta)^{-1}-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{\bar{g}_nR_1}{\eta-R_1\alpha_\nu}-$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{R_1}{\eta}; \qquad (1,41)$$

$$N(\infty)=0.$$

Возьмем условие (1,38). Интегралы, входящие в это условие, будут равны:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}P'_1(R_1\eta)\frac{d\sigma}{\sigma-\eta}=\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}P'_1(R_1\eta)-\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{R_1g'_\nu P'_1(\alpha_\nu)}{R_1\eta-\alpha_\nu}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\nu\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}P'_2(R_1\eta)\frac{d\sigma}{\sigma-\eta}=-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}A_k'\eta^k+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}B_k'\eta^k-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{Rp}{4}D'_k+\frac{Rp}{2}\frac{h'_{k+2}}{R_1^2}\right)\eta^k;$$

где

$$A'_k=\sum_{\nu=1}^{n-\kappa+1}\frac{\nu h_{\nu+\kappa+1}\alpha_\nu}{R_1^{\nu+1}}; \quad D'_k=\sum_{\nu=1}^{n-[k+1]}\frac{\nu\bar{h}_\nu h'_{\nu+\kappa+1}}{R_{\nu+1}};$$

$$B'_k=\sum_{\nu=1}^{n-[\kappa+1]}\frac{\nu A_\nu h'_{\nu+k+1}}{R_1^{\nu+1}}. \qquad (1,42)$$

Подставляя в (1,38) полученные значения интегралов, значения входящих функций, взятых из (1,24) и (1,33), и значение $\overline{C}_0$, получим второе условие, связывающее коэффициенты функций φ_0 и ψ_0

$$\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\overline{\varphi}_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)+\frac{\mu_1(\varkappa-1)-\mu(\varkappa_1-1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}A_k(R_1\eta)^k-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n+2}A_k\left(\frac{\eta}{R_1}\right)^k-\left\{\sum_{\kappa=0}^{n-2}B_k(R_1\eta)^k\right\}\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}B'_k\eta^k-$$

$$-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}A'_k\eta^k+\frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)-\omega\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}P'_1(R_1\eta)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(R_1g'_\nu-g_\nu)P'_1(a_\nu)}{R_1\eta-a_\nu}+b_0=M(\eta), \tag{1,43}$$

где

$$M(\eta)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\sum_{\kappa=0}^{n-2}\left(\frac{Rp}{4}D_k'+\frac{Rp}{2}\frac{h'_{k+2}}{R_1^2}\right)\eta^k\right\}-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\sum_{\kappa=0}^{n-2}\left(\frac{Rp}{4}D_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Rp}{2}h_{k+2}\right)R_1^k\eta^k\right\}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=0}^{n}h_kR_1^k\eta^k-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{2}R_1\eta-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{Rp}{2}\frac{\eta}{R_1}+\frac{Rp}{4}\sum_{\kappa=0}^{n}h_k\left(\frac{\eta}{R_1}\right)^k\right\} \tag{1,44}$$

Полученные соотношения (1,40) и (1,43) решают поставленные задачи, то есть из них определяются коэффициенты a_ν и b_ν функций φ_0 и ψ_0, а по ним коэффициенты всех введенных функций.

В самом деле, в равенстве (1,40) каждый член левой части — регулярная функция вне круга радиуса единицы и может быть представлена в виде ряда по отрицательным степеням η.

Благодаря наличию членов B_k, A_k и A_{-k} см. (1,25) и (1,22), коэффициент при η первой степени будет содержать n первых коэффициентов функции φ_0, при второй степени η будет содержать $n+1$ коэффициент функции φ_0 и т. д.

Так что при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях η в равенстве (1,40) мы получим бесконечную систему уравнений вида

$$\begin{gathered}\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\ldots+\alpha_{1n}a_n+\beta_1b_1=l_1;\\ \alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\ldots+\alpha_{2n}a_n+\alpha_{2,n+1}a_{n+1}+\beta_2b_2=l_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{k1}a_1+\alpha_{k2}a_2+\ldots+\alpha_{kn}a_n+\ldots+\alpha_{k,n+\kappa-1}a_{n+\kappa-1}+\beta_kb_k=l_k;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{1,45}$$

где α_{ki}, β_k и l_k известные числа, подсчитанные из (1,40).

В соотношении (1,43) член

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)-\overline{\omega}\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}\,P_1'(R_1\eta)\cdot$$

имеет нуль n-го порядка и только через этот член (1,43) входит функция ψ_0, коэффициенты которой определяются.

Если разложить левую часть (1,43) около нуля, то коэффициенты при степенях η, начиная от 0 до $n-1$ включительно, за исключением b_0, не будут содержать коэффициентов функции ψ_0, а будут содержать $n-1$ первых коэффициентов функции φ_0, которые появятся от членов как непосредственно содержащих функцию φ_0, так и благодаря наличию членов A_k и B_k, $k=0,1,2,\ldots(n-2)$. Каждый член A_k и B_k является линейной комбинацией из $n-1$ первых коэффициентов функций φ_0.

При сравнении коэффициентов правой и левой части при одинаковых степенях η, мы получим n первых линейных уравнений, которые будут содержать n неизвестных, $n-1$ коэффициент функции φ_0 и b_0.

Решая эту систему, мы определим входящие в нее неизвестные. Присоединяя теперь к уравнениям (1,45) уравнения, полученные из (1,43), в результате сравнения коэффициентов, начиная от степени n и выше, мы получим бесконечную систему уравнений, которая решается последовательно, при этом каждый раз приходится решать систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Поступая таким образом, мы определим коэффициенты функций φ_0 и ψ_0 в такой форме:

$$a_k=\delta_k+\sum_{\kappa=1}^{n+1}\gamma_k P_1'(\alpha_k),$$

$$b_k=\delta_k'+\sum\gamma_k' P_1'(\alpha_k),$$

где δ_k, δ_k', γ_k, и γ_k' известные числа, а $P_1'(\alpha_k)$ неизвестные.
Некоторые из чисел $P_1'(\alpha_k)$ могут быть одинаковыми.
Возьмем теперь выражение для функции $P_1(\zeta)$ и заменим функции $\overline{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ и $\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ соответствующими рядами. Возьмем в этих рядах l членов функции ψ_0 и m членов функции φ_0. Так как ряды этих функций есть ряды, сходящиеся на круге радиуса единицы, то коэффициенты их должны стремиться к нулю. Мы можем взять l и m настолько большими, что $l+1$-ый коэффициент функции ψ_0 и $m+1$-ый коэффициент функций φ_0 не будут влиять на принятую точность вычислений, при решении конкретного примера, а поэтому мы можем положить в функции ψ_0 все коэффициенты, начиная с $l+1$-го, а в функции φ_0 начиная с $m+1$-го, равными нулю.

Таким образом, в выражение для функции $P_1(\zeta)$ будут входить $n+1$ неизвестных чисел $P_1'(\alpha_k)$. Продифференцируем полученное выражение по ζ и подставим в правую и левую часть $\zeta=\alpha_k$, $k=1,2,\ldots$

$\ldots, n+1$, мы получим, если все $P_1'(\alpha_k)$ различны, $n+1$ уравнение для определения $P_1'(\alpha_k)$.
Найденное из этих уравнений значение $P_1'(\alpha_k)$ подставим в выражение для коэффициентов функций φ_0, ψ_0 и мы определим коэффициенты функций φ_0, ψ_0 с принятой при вычислении точностью. Зная числовые значения коэффициентов функций φ_0, ψ_0 и числовое значение $P_1'(\alpha_k)$, мы определим значение коэффициентов всех введенных нами функций.

Если положить в $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{g_1}{\zeta} + \ldots + \frac{g_n}{\zeta^n}\right)$ все $g_\nu = 0$, $\nu = 2, 3, \ldots, n$, то условия (1,40) и (1,43) упростятся и после незначительных преобразований примут вид:

для $|\eta| \geqslant 1$

$$\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1\eta(1+mR_1^2\eta^2)}{R_1^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta)+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1\eta(R_1^2+m\eta^2)}{R_1^2\eta^2-m}\times$$

$$\times\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{\eta(R_1^2+m\eta^2)}{R_1(\eta^2-mR_1^2)}\varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right)+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(R_1\eta)+\frac{(R_1^2-m^2)(R^2-1)}{R_1^2}\frac{R_1\eta P_1'(\sqrt{m})}{R_1^2\eta^2-m}=$$

$$=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+m^2)R_1\eta}{\eta^2-mR_1^2}+\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}(2-m)\frac{(1-R_1^2)(m\eta^2-1)}{R_1\eta(R_1^2\eta^2-m)}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{(1+m^2)R_1\eta}{R_1^2\eta^2-m}-\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{R_1}{\eta}-\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}\frac{1}{R_1\eta} \qquad (1,44)$$

где $g_1 = m$;

для $|\eta| \leqslant 1$

$$\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\eta(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{(1-R_1^2)R_1\eta(m\eta^2-1)P_1'(R_1\eta)}{R_1^2\eta^2-m}+$$

$$+\frac{(1-R_1^2)(R_1^2-m^2)}{R_1^2}\frac{R_1\eta P_1'(\sqrt{m})}{R_1^2\eta^2-m}=\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}(m-2)\frac{\eta}{R_1}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{Rp}{4}R_1\eta(m-2). \qquad (1,45)$$

Эти условия дают решение задачи о растяжении бесконечной пластинки с впаянным эллиптическим кольцом, материал которого отличен от материала пластинки.

Функции P_1, P_2, Q_1, Q_2, соответствующие этой задаче, получатся из формул (1,23), (1,24), (1,25), (1,26), если произвести в них необходимое упрощение, вытекающее из принятых допущений относительно коэффициентов g_ν в отображающей функции.

Нами произведены вычисления напряжений в отдельных точках, расположенных по контуру спая и по внутреннему контуру кольца при следующих данных:

$$m = 0{,}2356, \quad R_1 = 0{,}68644, \quad \mu = 4{,}42 \cdot 10^5,$$

$$\mu_1 = 8{,}10 \cdot 10^5, \quad \varkappa = \varkappa_1 = 2{,}08.$$

При этих данных отношение больших полуосей, ограничивающих кольцо, будет равно 1,2, т. е. $\frac{a_1}{a_2} = 1{,}2$, материал кольца — сталь, пластинки — медь.

Результат вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру для двух видов растяжения пластинки приводится в таблице 1-й.

Пластинка ориентирована так, что большая полуось впаянного кольца лежит на оси OX.

Таблица 1-я

РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ OX

Град.	В пластинке			В кольце	
	Напряжения по контуру спая			По конт. спая	На своб. конт.
ϑ	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\varrho\varrho}/p$	$\widehat{\varrho\theta}/p$	$\theta\theta/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$
0	0,234	0,618	−0,000	0,250	−5,88
10	0,270	0,598	−0,399	0,349	−3,97
20	0,365	0,545	−0,646	0,556	−1,13
30	0,491	0,468	−0,712	0,793	0,67
40	0,622	0,382	−0,657	1,03	1,67
50	0,737	0,303	−0,548	1,26	2,23
60	0,824	0,243	−0,426	1,46	2,55
70	0,883	0,201	−0,277	1,52	2,72
80	0,919	0,175	−0,137	1,63	2,81
90	0,932	0,165	−0,000	1,64	2,83

Таблица 2-я

РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ *ОУ*

Град.	В пластинке			В кольце	
	Напряжения по контуру спая			По конт. спая	По своб. конт.
ϑ	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\varrho\varrho}/p$	$\widehat{\varrho\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$
0	1,25	1,15	0,000	2,01	10,4
10	1,22	1,01	0,656	1,99	7,70
20	1,11	0,719	1,01	1,89	3,77
30	0,896	0,461	1,06	1,52	1,34
40	0,653	0,290	0,950	1,13	0,0275
50	0,429	0,190	0,764	0,753	—0,714
60	0,246	0,140	0,562	0,411	—1,15
70	0,114	0,120	0,339	0,164	—1,38
80	0,379	0,109	0,184	0,0435	—1,49
90	0,442	0,104	0,000	0,0144	—1,52

Для большей наглядности на рис. 1-м даны графики распределения напряжений по контуру спая кольца B с пластинкой A при раз-

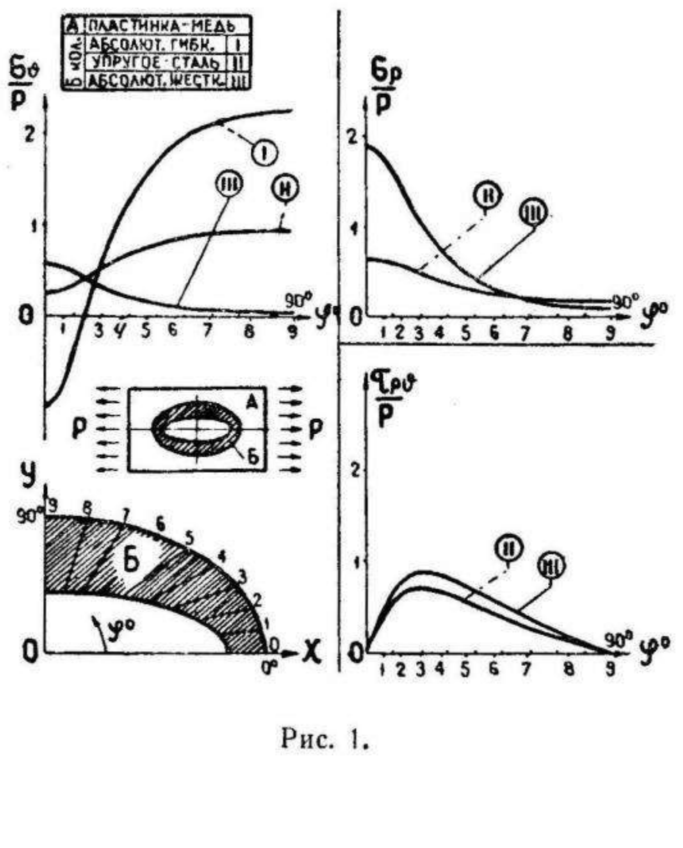

Рис. 1.

личных жесткостях кольца, когда пластинка растягивается вдоль большой полуоси OX. Первый вариант — в пластинку A не впаяно кольцо или, как мы говорим, впаяно абсолютно гибкое кольцо. Второй вариант, когда в медную пластинку впаяно стальное кольцо и третий — пластинка с впаянным, абсолютно жестким кольцом. (Рис. 1).

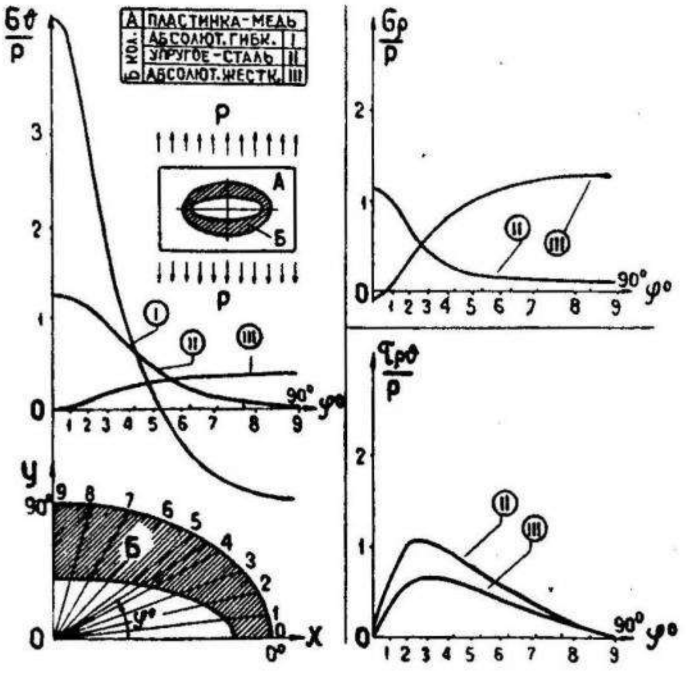

Рис. 2.

При построении графиков точкам 0, 1, 2, 3, и т. д. соответствует изменение угла 0, 10, 20, 30 и т. д.

На рис. 2-м сделано то же самое, но только для случая, когда пластинка растягивается вдоль малой полуоси.

Если же взять отображающую функцию $z=\left(\zeta+\frac{g_n}{\zeta^n}\right)$ и положить в ней $n=2$, $g_n=0{,}11186$ и $R_1=0{,}69491$, а потом произвести соответствующие упрощения в выражениях как для функций P_1, P_2, Q_1, Q_2, так и в граничных условиях на внутреннем контуре кольца, то условия (1.40) и (1.43) превратятся в условия для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0 в растянутой пластинке с впаянным криволинейным треугольным кольцом. Результаты вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру кольца приведены в 3-й таблице.

Таблица 3-я

Результаты вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру кольца.

	Град.	В пластинке по контуру спая			В кольце по конт. спая	В кольце по своб. конт.
	ϑ	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\rho\rho}/p$	$\widehat{\rho\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$
0	0	0,209	0,595	0,000	—2,023	—9,105
1	10	0,255	0,498	—0,285	—0,222	—3,082
2	20	0,328	0,332	—0,470	1,110	—0,682
3	30	0,405	0,199	—0,498	0,687	0,0288
4	40	0,510	0,0953	—0,468	0,0533	0,345
5	50	0,623	0,0344	—0,453	0,732	0,540

Продолжение таблицы 3

	Град.	В пластинке по контуру спая			В кольце по конт. спая	В кольце по своб. конт.
	ϑ	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\varrho\varrho}/p$	$\widehat{\varrho\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$
6	60	0,738	0,0146	−0,433	1,772	0,719
7	70	0,870	0,0188	−0,404	2,194	0,951
8	80	0,993	0,0710	−0,380	2,087	1,303
9	90	1,082	0,206	−0,299	1,954	1,867
10	100	1,102	0,456	−0,0619	1,504	2,894
11	110	0,979	0,847	0,437	0,161	5,002
12	120	0,872	1,087	1,133	−0,256	3,215
13	130	0,950	0,936	1,388	1,290	−3,228
14	140	0,933	0,799	1,083	−1,374	−2,942
15	150	0,821	0,793	0,695	−0,184	−2,455
16	160	0,737	0,812	0,404	−0,797	−2,161
17	170	0,686	0,838	0,219	0,0883	−2,004
18	180	0,666	0,863	0,000	0,744	−1,954

На рис. 3-м приведены графики распределения напряжений по контуру спая кольца с пластинкой для тех же самых вариантов, что и для эллиптического кольца.

В 4-й таблице даны числовые значения напряжений по контуру спая и по свободному контуру криволинейного прямоугольного кольца. Отображающая функция была следующей

$$z=0{,}98347\left(\zeta+\frac{0{,}259866}{\zeta}-\frac{0{,}039710}{\zeta^3}\right) \text{ и } R_1=0{,}76590.$$

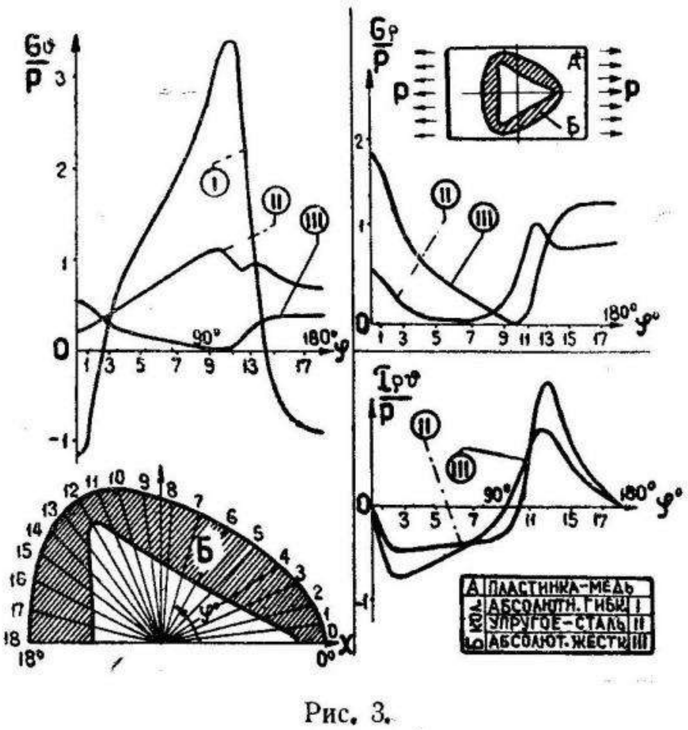

Рис. 3.

Таблица 4-я

Прямоугольное упругое кольцо, растяжение вдоль оси OX

Напряжения в пластинке по контуру спая					Напряжение в кольце	
					По контуру спая	По свобод. контуру
	град. ϑ	$\widetilde{\theta\theta}/p$	$\widetilde{\varrho\varrho}/p$	$\widetilde{\varrho\theta}/p$	$\widetilde{\theta\theta}/p$	$\widetilde{\theta\theta}/p$
1	0	0,155	0,259	—0,000	—0,3546	—1,295
2	10	0,204	0,292	—0,364	—0,309	—1,184
3	20	0,349	0,392	—0,716	—0,797	—0,514
4	30	0,527	0,548	—0,913	0,832	1,787
5	40	0,720	0,585	—0,757	1,015	3,896
6	50	0,908	0,412	—0,454	1,558	3,302
7	60	0,999	0,216	—0,237	1,833	2,451
8	70	1,019	0,085	—0,114	1,845	1,959
9	80	1,012	0,019	—0,049	1,836	1,722
10	90	1,004	0,00240	—0,000	1,832	1,653

На рис. 4-м построены графики распределения напряжений по контуру спая. Принцип построения графика был тот же, что и для всех предыдущих колец.

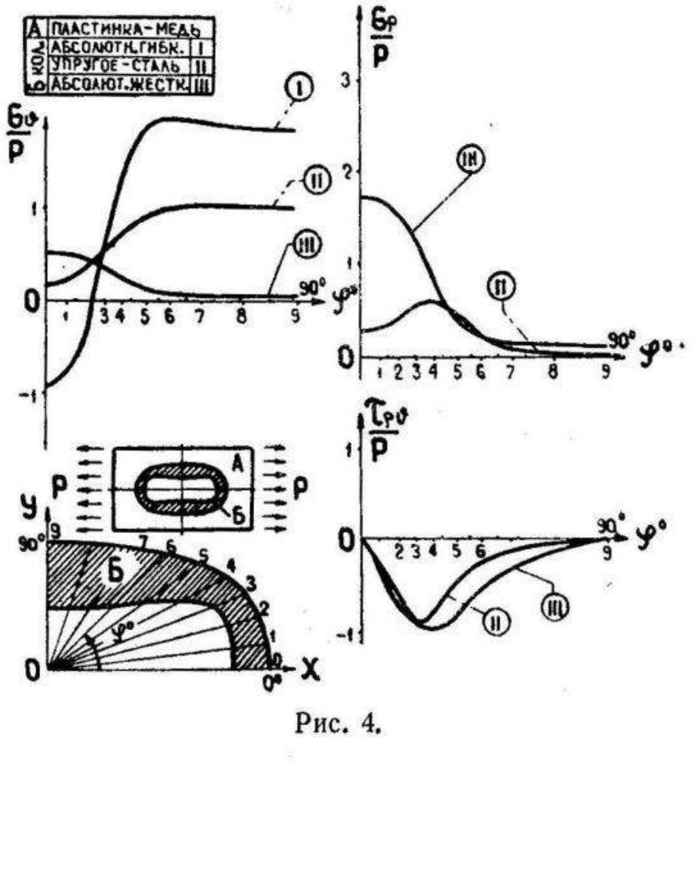

Рис. 4.

Приведенные таблицы и графики дают возможность судить о влиянии жесткости кольца на распределение напряжений по контуру спая. Из приведенных графиков видно, что числовые значения напряжений по контуру спая в пластинке с впаянным упругим кольцом будут находиться между числовыми значениями напряжений для соответствующих точек с впаянными, абсолютно гибким и абсолютно жестким кольцами[1].

Если для пластинки изменить условие на бесконечности и взять его таким, чтобы ему соответствовали функции φ и ψ в виде полинома n-ой степени, то есть, чтобы функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на бесконечности имели бы полюс n-го порядка, то метод решений задачи будет тот же. В условиях (1,40) изменится только функция $N(\eta)$ и функция $M(\eta)$ в условиях (1,43); что касается левой части, то она останется без изменения. Так, например, если для пластинки с впаянным эллиптическим кольцом функции φ и ψ взять в таком виде:

$$\varphi(\zeta)=\frac{A_tR^2}{8}\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)^2+\varphi_0(\zeta); \qquad \psi(\zeta)=-\frac{A_tR^2}{8}\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)^2+\psi_0(\zeta),$$

что будет соответствовать изгибу (3)[2].

Условия для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0 в этом случае будут следующие:

для $|\eta|<1$

$$\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{R_1\eta(1+mR_1^2\eta^2)}{R_1^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta)+$$

$$+\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^2+m\eta^2)R_1\eta}{R_1^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(R_1^2+m\eta^2)}{R_1(\eta^2-mR_1^2)}\varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right)+$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(R_1\eta)-\frac{\mu_1-\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)-b_0=\frac{1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{A_tR^2}{8}M_{21}(\eta)-$$

$$-\frac{(1-R_1^2)(m^2-R_1^2)}{2R_1^2}\left(\frac{P_1'(\sqrt{m})}{R_1\eta-\sqrt{m}}+\frac{P_1'(-\sqrt{m})}{R_1\eta+\sqrt{m}}\right),$$

где

$$M_{21}(\eta)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu_1m(2-m)(R_1^4-1)+(1-m)^2\mu(R_1^4+\varkappa_1)}{R_1^2\eta^2}+$$

$$+2\{\mu(1-m)^2+\mu_1(m^2\varkappa-1)+2m\mu_1\}\cdot\frac{(1-R_1^2)(m\eta^2-1)}{R_1^2\eta^2(R_1^2\eta^2-m)};$$

для $|\eta|\leqslant 1$

$$\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{\varkappa_1\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)+b_0+\frac{(1-R_1^2)(m\eta^2-1)}{R_1^2\eta^2-m}P_1'(R_1\eta)=$$

$$=\frac{1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{A_tR^2}{8}M_{11}(\eta),$$

---

[1] Активное участие в составлении графиков и таблиц принимали студентки Львовского госуниверситета: Козлинская А. В., Старухина С. Я. и Петракова Л. С., за что и выражаю им благодарность.

[2] В статье (3) вкралась неточность. Эта формула исправляет ее.

где

$$M_{11}(\eta) = \frac{(1-m)^2(\varkappa_1\mu R_1^4 - 1) - [\varkappa\mu_1 m^2 - (2m-1)\mu_1](1+R_1^4)}{R_1^2}\cdot\eta -$$

$$-2\{\mu(1-m)^2(\varkappa_1 - 1) + 2\mu_1(m\varkappa + 1 + m^2) - 2m\mu_1\}.$$

Если полученное условие сравнить с условиями (1,44), (1,45), то они будут отличаться только правыми частями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. — Некоторые задачи математической теории упругости, издание АН СССР, 1935.
2. Г. Н. Савин. — О некоторых контактных задачах теории упругости, Труды Тбилисского математического института, т. XIV, 1946.
3. М. П. Шереметьев. — Чистий згин полоси (балки), ослабленої еліптичним кільцем, або шайбою, Наукові записки Львівського держуніверситету ім. Ів. Франка, т. V, випуск I, 1947.