



МВО СРСР

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XII

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ТРЕТІЙ

ВИДАННЯ ЛЬВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

1949





МВН ССРС
ЛВВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XII

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ТРЕТІЙ

ВИДАННЯ ЛВВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ — 1949

МВО СРСР
ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИВ. ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XII

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК ТРЕТИЙ

Редакційна колегія:

Дійсний член АН УРСР професор Б. В. Гнеденко, професор О. С. Кованько (відповідальний редактор), доцент В. С. Міліанчук, Дійсний член АН УРСР професор Г. М. Савін

Друкується за розпорядженням
Ректора Львівського університету
Дійсного члена АН УРСР
Г. М. Савіна

Г. М. САВІН

О. С. ПАРАСЮК

ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ ДОВКОЛА КРУГОВОГО ОТВОРУ В ПЛОСКОМУ НЕРІВНОМІРНО НАПРУЖЕНОМУ ПОЛІ

Пружний стан в нескінченній пластинці, ослабленій круговим отвором, яка розтягується на безконечності зусиллями

$$\begin{aligned}\sigma_x^\infty &= p, \\ \sigma_y^\infty &= 0 \quad \tau_{xy}^\infty = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

визначається, як відомо [7], формулами для компонентів напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{4R^2}{\rho^2} + \frac{3R^4}{\rho^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{\rho^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} &= -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{\rho^2} - \frac{3R^4}{\rho^4}\right) \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{2}$$

де ρ, θ — полярні координати, R — радіус отвору.

З цих формул видно, що при $\rho = R$ маємо

$$\tau_{\max} = \sigma_{\theta\max} = 3p,\tag{3}$$

тобто максимальне напруження σ_θ дорівнює потроєному значенню розтягуючого зусилля.

Таким чином, ця задача дає теоретичну базу під давно відомий з практики факт, що коло отворів виникає концентрація напружень.

Інтуїтивно зовсім ясно, що коли концентрація досягне певної межі, що визначається якістю матеріалу, з якого зроблена пластинка, матеріал в області довкола отвору перестане бути пружним.

Якщо припустити, що матеріал в області довкола отвору буде вести себе, як ідеально пластичне тіло, то можна поставити таку так звану пружно-пластичну задачу для випадку плоскої деформації.

Розглянемо площину xoy з коловим отвором радіуса R з центром в початку координат, по контуру γ якого прикладені зусилля

$$\begin{aligned}\sigma_n &= f_1(s) \\ \tau_{ns} &= f_2(s),\end{aligned}\tag{4}$$

¹ В цій статті ми даємо розгорнутий виклад результатів, раніше опублікованих в [1] [2] [3] [4] і [5].

Функції $U_1(x, y)$ і $U_2(x, y)$ є бігармонічні; отже, функція $U_3(x, y) = U_2 - U_1$ також бігармонічна і, значить, її можна записати, за формулою Гурса, в такому виді:

$$U_3(x, y) = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi_3^*(z) + \chi_3^*(z)], \quad (16)$$

де $\varphi_3^*(z)$ і $\chi_3^*(z)$ є функції голоморфні в області існування функції $U_3(x, y)$.

Покладемо:

$$\varphi_3^{*'}(z) = \Phi_3^*(z) \quad \chi_3^{*''}(z) = \psi_3^*(z). \quad (17)$$

Поставлена вище задача формулюватиметься в нових позначеннях таким способом.

Знайти дві голоморфні назовні контура L функції $\Phi_3^*(z)$ і $\psi_3^*(z)$ за такими умовами

$$\operatorname{Re} \Phi_3^*(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } L \\ \operatorname{Re} \Phi_2^*(z) - \frac{p}{2} - \frac{k}{2} - k \ln \frac{\rho}{R} \end{cases} \quad (18)$$

при $z \rightarrow \infty$

$$[\bar{z} \Phi_3^{*'}(z) + \psi_3^*(z)] = \begin{cases} 0 & \text{на } L \\ [\bar{z} \Phi_2^{*'}(z) + \psi_2^*(z)] - k e^{-2i\theta}, \end{cases} \quad (19)$$

при $z \rightarrow \infty$

де $\theta = \arg z$.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод Л. А. Галіна [6], тобто в'їдобразимо область S_2 площини xoy зовнішню у відношенні до L , на зовнішність одиночного кола Γ площини $\zeta o \eta$ за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + g(\zeta), \quad (20)$$

де $g(\zeta)$ — функція голоморфна назовні Γ і $g(\infty) = 0$; c — довільна константа.

Введемо, нарешті, такі позначення:

$$\begin{aligned} \Phi_3^*(\omega(\zeta)) &= \Phi_3(\zeta) \\ \psi_3^*(\omega(\zeta)) &= \psi_3(\zeta). \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді на основі (18) (19) будемо мати

$$\operatorname{Re} [\Phi_3(\zeta)] = \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma \\ \operatorname{Re} [a_1 c \zeta + a_2 c^2 \zeta^2 + \dots + a_n c^n \zeta^n] + \\ + k \ln R + \frac{p}{2} - \frac{k}{2} - k \ln |\zeta| - k \ln c \end{cases} \quad (22)$$

при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \psi_3(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma \\ \frac{\bar{c} \zeta}{c \zeta} \Phi_2^{*'}(c\zeta) + \psi_2^*(c\zeta) - k e^{-2i\theta_1}, \end{cases} \quad (23)$$

при $\zeta \rightarrow \infty$

де $\theta_1 = \arg \zeta$.

Покажемо, як із співвідношень (22), (23) можна, взагалі кажучи визначити функції $\Phi_3(\zeta)$, $\psi_3(\zeta)$, $\omega(\zeta)$.

Зауважимо, що найважливіше знайти функцію $\omega(\zeta)$, бо, знаючи її, ми будемо знати границю пластичної зони, тобто контур L .

Для визначення цих функцій з умов (22), (23) візьмемо константу „ c “ так, щоб

$$Rea_0 + k \ln R + \frac{p}{2} - \frac{k}{2} k \ln c = 0,$$

тобто

$$c = Re \frac{1}{k} \left(Rea_0 - \frac{k+p}{2} \right)$$

Умова (22) буде задовольнятися, якщо $\Phi_s(\zeta)$ взяти в такому виді:

$$\Phi_s(\zeta) = a_1 c \zeta - \bar{a}_1 c \frac{1}{\zeta} + a_2 c^2 \zeta^2 - \bar{a}_2 c^2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + a_n c^n \zeta^n - \bar{a}_n c^n \frac{1}{\zeta^n} - k \ln \zeta. \quad (24)$$

Легко переконатися, що при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\left[\frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \Phi_s'(\zeta) \right] = c \bar{\zeta} \Phi_2^{**}(c \zeta) - k e^{-2i\theta}, \quad (25)$$

тому на основі (23)

$$\psi_s(\zeta) = \psi_2^*(c \zeta) + M(\zeta),$$

де $M(\zeta)$ — функція регулярна назовні Γ і $M(\infty) = 0$.

Тепер, коли функція $\Phi_s(\zeta)$ відома повністю, і, крім того, відомий вид функції $\psi_s(\zeta)$, перша умова (23) перепишеться так:

$$[\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \Phi_s'(\zeta)]_r = - [\omega'(\zeta) \psi_s(\zeta)]_r \quad (26)$$

Це і є основне функціональне рівняння, за допомогою якого в кожному конкретному випадку будемо визначати функцію $z = \omega(\zeta)$.

При цьому ми будемо діяти таким способом:

Припускаючи можливість розкладу $\omega(\zeta)$ в ряд виду

$$z = \omega(\zeta) = c \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \dots, \quad (27)$$

будемо мати на основі (26)

$$\begin{aligned} & \left[\left(c \frac{1}{\zeta} + \bar{c}_1 \zeta + \bar{c}_2 \zeta^2 + \dots + \bar{c}_n \zeta^n \right) \Phi_s'(\zeta) \right]_r = \\ & = - \left[c - c_1 \frac{1}{\zeta^2} - c_2 \frac{2}{\zeta^3} - c_3 \frac{3}{\zeta^4} - \dots \right] [\psi_s(\zeta)]_r \end{aligned} \quad (28)$$

Тому що $\Phi_s(\zeta)$ нам відома повністю, а функція $\psi_s(\zeta)$ відома з точністю до регулярної частини назовні Γ , то для визначення коефіцієнтів функції $\omega(\zeta)$ із співвідношень (28) досить порівняти коефіцієнти при додатніх степенях ζ . Тоді ми одержимо безконечну систему рівнянь, з якої треба буде визначити коефіцієнти функції $\omega(\zeta)$ так, щоб ряд (27) схилювався всюди назовні Γ .

Вибираючи поліноми $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(z)$ (14) відповідного виду, одержимо розв'язання ряду практично важливих задач.

ЧИСТИЙ ЗГИН БАЛКИ¹

У цьому випадку, як відомо, поліноми (14) мають вид

$$\Phi_2^*(z) = \frac{iM}{4I} z \quad \psi_2^*(z) = -\frac{iM}{4I} z, \quad (29)$$

де M — величина згинаючого моменту;

I — момент інерції поперечного перерізу балки ширини 1 (рис. 1).

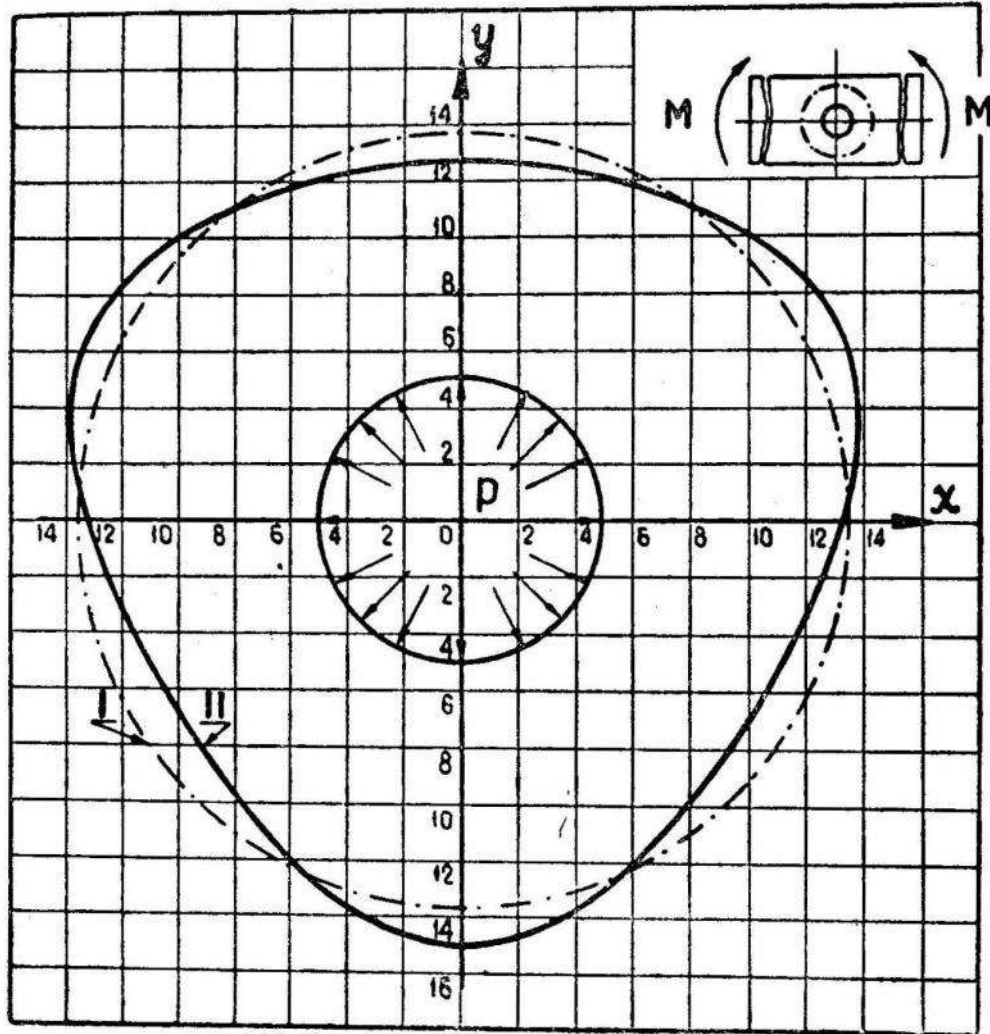


Рис. 1

На основі (24) будемо мати

$$\begin{aligned} \Phi_3(\zeta) &= \frac{iM}{4I} c\zeta + \frac{iM}{4I} c \frac{1}{\zeta} - k \ln \zeta \\ \Phi_3'(\zeta) &= \frac{iM}{4I} c - \frac{iM c}{4I \zeta^2} - \frac{k}{\zeta} \\ \psi_3(\zeta) &= -\frac{iM}{4I} c\zeta + M(\zeta), \end{aligned} \quad (30)$$

¹ Цей випадок вперше був розглянутий Л. А. Галіним [6].

де $M(\zeta)$ — функція голоморфна назовні Γ і $M(\infty) = 0$.

Основне співвідношення (26) матиме вид:

$$\left[\left(c \frac{1}{\zeta} + \bar{c}_1 \zeta + \bar{c}_2 \zeta^2 + \dots + \bar{c}_n \zeta^n \right) \left(i \frac{Mc}{4I} - \frac{k}{\zeta} - \frac{iM}{4I} \frac{c}{\zeta^2} \right) \right] = \\ = \left\{ \left(c - c_1 \frac{1}{\zeta^2} - c_2 \frac{2}{\zeta^3} - c_3 \frac{3}{\zeta^4} - \dots \right) \left(i \frac{M}{4I} c \zeta - M(\zeta) \right) \right\}. \quad (31)$$

Введемо позначення

$$\alpha = \frac{iMc}{4I}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при додатних степенях ζ , одержуємо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів c_k функції $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned} k \bar{c}_1 + \alpha \bar{c}_2 &= 0 \\ \alpha \bar{c}_1 - k \bar{c}_2 - \alpha \bar{c}_3 &= c \alpha \\ \alpha \bar{c}_2 - k \bar{c}_3 - \alpha \bar{c}_4 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha \bar{c}_n - k \bar{c}_{n+1} - \alpha \bar{c}_{n+2} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Для розв'язання цієї системи зауважимо, що, починаючи з третього рівняння, ми маємо однорідне рівняння в скінченних різницях

$$\bar{c}_{n+2} + \frac{k}{\alpha} \bar{c}_{n+1} - \bar{c}_n = 0, \quad (33)$$

загальне розв'язання якого має вид:

$$\bar{c}_n = A v_1^n + B v_2^n,$$

де v_1, v_2 — корені характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} v^2 + \frac{k}{\alpha} v - 1 &= 0 \\ v_{1,2} &= -\frac{k}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\alpha^2} + 1}. \end{aligned}$$

Корінь v_2 по модулю більший від одиниці і тому його треба відкинути; тоді

$$\bar{c}_n = A v^n \quad n \geq 2.$$

Тепер з перших двох рівнянь нашої системи визначимо $\bar{c}_1$ і A

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{c \alpha^2}{\alpha^3 + k^2 + \alpha k v_1} \\ A &= -\frac{c \alpha}{\left(\frac{\alpha^2}{k} + k \right) v_1^2 + \alpha v_1^3}. \end{aligned}$$

Остаточно для $\omega(\zeta)$ одержуємо:

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{\bar{A} \bar{v}_1^2}{\zeta(\zeta - v_1)}. \quad (34)$$

2. ЗГИН СМУГИ СТАЛОЮ ПЕРЕРІЗУЮЧОЮ СИЛОЮ Q .

Якщо поліноми $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(\zeta)$ (14) взяти у виді:

$$\Phi_2^*(z) = \frac{iQ}{8I} z^2 - iQ \frac{(l-a)}{4I} z \quad (35)$$

$$\psi_2^*(z) = -\frac{iQ}{4I} z^2 + \frac{iQ}{4I} (l-a)z - \frac{Qh^2}{2I} i,$$

то пружний стан на безконечності буде відповідати згину консолі сталою перерізуючою силою Q [8]:

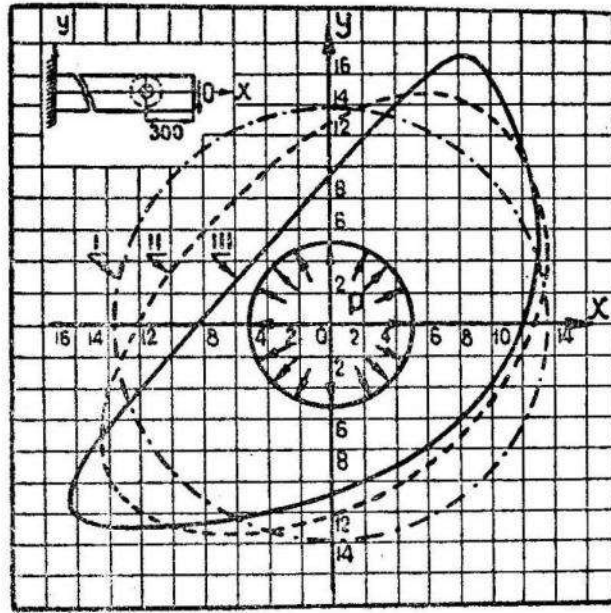


Рис. 2.

де Q — величина перерізуючої сили,
 I — момент інерції поперечного перерізу смуги товщини одиниці.
 Введемо позначення:

$$\alpha = \frac{iQh^2}{2I} \quad \beta = -i \frac{Qc(l-a)}{4I} \quad \gamma = \frac{iQc^2}{4I}.$$

Тоді система рівнянь, одержана з (28), матиме вид

$$\begin{aligned} c\gamma - k\bar{c}_1 - \beta\bar{c}_2 - \gamma\bar{c}_3 &= \alpha c - c_1\gamma \\ \beta\bar{c}_1 - k\bar{c}_3 - \beta\bar{c}_3 - \gamma\bar{c}_4 &= \beta c \end{aligned} \quad (36)$$

$$\gamma \bar{c}_1 + \beta \bar{c}_2 - k \bar{c}_3 - \beta \bar{c}_4 - \gamma \bar{c}_5 = \gamma c$$

$$\gamma \bar{c}_2 + \beta \bar{c}_3 - k \bar{c}_4 - \beta \bar{c}_5 - \gamma \bar{c}_6 = 0$$

.....

$$\gamma \bar{c}_n + \beta \bar{c}_{n+1} - k \bar{c}_{n+2} - \beta \bar{c}_{n+3} - \gamma \bar{c}_{n+4} = 0$$

Для розв'язання цієї системи знову розглядаємо рівняння в скінченних різницях

$$\gamma \bar{c}_{n+4} + \beta \bar{c}_{n+3} + k \bar{c}_{n+2} - \beta \bar{c}_{n+1} - \gamma \bar{c}_n = 0. \quad (37)$$

Загальне розв'язання цього рівняння має вигляд

$$\bar{c}_n = K_1 v_1^n + K_2 v_2^n + K_3 v_3^n + K_4 v_4^n,$$

де $K_i (i=1, 2, 3, 4)$ — довільні константи,

а $v_i (i=1, 2, 3, 4)$ — корені характеристичного рівняння

$$\gamma v^4 + \beta v^3 + k v^2 - \beta v - \gamma = 0. \quad (38)$$

Покажемо, що при відповідних обмеженнях, накладених на коефіцієнти рівняння (38), воно матиме корені, що задовольняють такі умови

$$\begin{aligned} |v_1| < 1 & \quad |v_2| < 1 \\ |v_3| > 1 & \quad |v_4| > 1. \end{aligned}$$

Дійсно, запишемо рівняння (38) у виді:

$$v^4 + \frac{\beta}{\gamma} v^3 + \frac{k}{\gamma} v^2 - \frac{\beta}{\gamma} v - 1 = 0$$

або, поклавши $\frac{\beta}{\gamma} = a$, $\frac{k}{\gamma} = bi$, будемо мати:

$$v^4 + av^3 + biv^2 - av - 1 = 0.$$

Напишемо тепер розклад

$$v^4 + av^3 + biv^2 - av - 1 = (v^2 + pv + q)(v^2 + p_1v + q_1).$$

Після легких обчислень одержимо таке рівняння для q :

$$\left(q - \frac{1}{q}\right)\left(q^2 + 2 + \frac{1}{q}\right) - a^2\left(q - \frac{1}{q}\right) = bi\left(q^2 + \frac{1}{q^2} + 2\right).$$

Поклавши

$$yi = q - \frac{1}{q},$$

одержимо

$$-y^3 + by^2 + (4 - a^2)y - 4b = 0. \quad (39)$$

Позначимо через y_0 дійсний корень рівняння (39), тоді легко знайти, що

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= \frac{-a \left(1 + \frac{y_0}{2} i + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2} \right)}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2}} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{a^2 \left(1 + y_0 \frac{i}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2} \right)}{16 \left(1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2 \right)} - \frac{y_0 i}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2}}, \\ v_{3,4} &= \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2} + \frac{y_0}{2} i \right)}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2}} \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2} + \frac{y_0}{2} i \right)^2}{16 \left(1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2 \right)} - \frac{y_0 i}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Тому що, підбираючи коефіцієнти в (39), можемо зробити y_0 досить великим по модулю, то легко бачити, що $v_{1,2}$ попаде в середину, а $v_{3,4}$ — назовні одиничного кола.

Покладаючи $K_3 = K_4 = 0$ (бо інакше ряд для $\omega(\zeta)$ був би розбіжний), будемо мати

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= K_1 v_1^2 + K_2 v_2^2 \\ \bar{c}_n &= K_1 v_1^n + K_2 v_2^n. \end{aligned} \quad (40)$$

Підставляючи в друге і третє рівняння системи (36), одержуємо

$$K_1 = - \frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1}$$

$$K_2 = \frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1}$$

Підставляючи в перше рівняння системи (36), знайдемо

$$\begin{aligned} c_1 \gamma - \bar{c}_1 [k + \beta (v_1 + v_2) + \gamma (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] = \\ = c \{ \alpha - \gamma - [\beta (v_1 + v_2) + \gamma (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] \}. \end{aligned}$$

Функція $z = \omega(\zeta)$ буде мати вид:

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{\bar{K}_1 \bar{v}_1^2}{\zeta(\zeta - \bar{v}_1)} + \frac{\bar{K}_2 \bar{v}_2^2}{\zeta(\zeta - \bar{v}_2)}, \quad (41)$$

Для порівняння наводимо деякі графіки і числові приклади.

1. Чистий згин (рис 1). Дано $\frac{M}{I} = 28,8$, $R = 5$ см, $2h = 100$ см, $p = 3k$. Функція $z = \omega(\xi)$ буде

$$z = 13,6\xi - \frac{0,133}{\xi} + \frac{1,357i}{\xi(\xi + 0,100i)}.$$

2. Згин сталою перерізуючою силою (рис. 2.) Q .

$l - a = 300$ см, $2h = 100$ см, $p = 3k$,
при $Q = 4000$ кг рівняння контура буде

$$x = 13,56 \cos \theta + 3,26 \sin \theta - \frac{0,16\alpha + 0,68\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y = 13,64 \sin \theta + 3,26 \cos \theta - \frac{0,68\alpha - 0,16\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

де $\alpha = \cos 2\theta + 0,05 \sin \theta$,

$\beta = \sin 2\theta - 0,05 \cos \theta$.

При $Q = 6000$ кг

$$x = 13,45 \cos \theta + 5,23 \sin \theta - \frac{0,73\alpha + 1,92\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y = 13,75 \sin \theta + 5,23 \cos \theta - \frac{1,92\alpha - 0,73\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

де $\alpha = \cos 2\theta + 0,14 \sin \theta$,

$\beta = \sin 2\theta - 0,14 \cos \theta$.

На рис. 1 і 2 крива I є круг радіуса $c_0 = Re^{\frac{p-k}{2k}}$ і являє собою границю пластичної області навколо кругового отвору радіуса R , коли по контуру цього отвору прикладено тиск $p = 3k$, при нулевому напруженому стані на безконечності.

Крива II на рис. 1 являє собою границю пластичної зони навколо отвору, по контуру якого прикладений тиск $p = 3k$, при напруженому стані на безконечності, що відповідає чистому згину з моментом M . Криві II та III на рис. 2 є границі пластичної зони навколо кругового отвору, коли по контуру цього отвору діє тиск $p = 3k$, а напруження на безконечності відповідні згину консолі (плоска деформація) із сталою перерізуючою силою Q . Для кривої II $Q = 4000$ кг, а для кривої III $Q = 6000$ кг.

Розглянемо тепер випадок, коли по контуру кругового отвору прикладені як нормальні, так і дотичні зусилля.

$$\sigma_\theta = a$$

$$\tau_{\theta\theta} = b, \quad (42)$$

а на безконечності

$$\sigma_x^\infty = A$$

$$\sigma_y^\infty = B. \quad (43)$$

Розв'язання рівнянь (7) при умовах (42) на контурі будуть

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(1)} &= k \left[2lg(\sqrt{\rho^2 - C} + \sqrt{\rho^2 + C}) - \frac{\sqrt{\rho^4 - C^2}}{\rho^2} \right] + Dk \\ \sigma_\theta^{(1)} &= k \left[2lg(\sqrt{\rho^2 - C} + \sqrt{\rho^2 + C}) + \frac{\sqrt{\rho^4 - C^2}}{\rho^2} \right] + Dk \\ \tau_{\rho\theta} &= \frac{Ck}{\rho^2}\end{aligned}\quad (44)$$

де $C = \frac{bR^2}{k}$

$$D = \frac{a}{k} - \left[2lg(\sqrt{R^2 + C} + \sqrt{R^2 - C}) - \frac{\sqrt{R^4 - C^2}}{R^2} \right]$$

ρ, θ — полярні координати.

Перейдемо до компонент напружень в декартових координатах і запишемо їх в таких комбінаціях:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} &= 2k [2lg(\sqrt{\rho^2 - C} + \sqrt{\rho^2 + C})] + 2Dk \\ \sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2\tau_{xy}^{(1)}i &= (\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta}) e^{-2i\theta} = \\ &= 2k \left[\frac{\sqrt{\rho^4 - C^2}}{\rho^2} + \frac{Ci}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta}\end{aligned}\quad (45)$$

Наша задача полягає в тому, щоб знайти контур L , дві функції $\Phi_2^*(z)$ і $\psi_2^*(z)$ голоморфні назовні L , щоб задовольнялися такі співвідношення:

$$\begin{aligned}4\operatorname{Re}\Phi_2^*(z) &= 2k [2lg(\sqrt{\rho^2 - C} + \sqrt{\rho^2 + C})] + 2Dk \text{ на } L \\ &= A + B \quad \text{при } z \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (46)$$

$$\begin{aligned}2[z\Phi_2^{*'}(z) + \psi_2^*(z)] &= 2k \left[\frac{\sqrt{\rho^4 - C^2}}{\rho^2} + \frac{Ci}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta} \text{ на } L \\ &= B - A \quad \text{при } z \leftarrow \infty.\end{aligned}\quad (47)$$

В такій постановці знайти точне розв'язання було б досить важко і тому ми замінимо умову (47) наближеною:

$$2[z\Phi_2^*(z) + \psi_2^*(z)] = 2ke^{-2i\theta} \text{ на } L. \quad (47a)$$

Якщо $C=0$, то умова (47a) є зовсім точна.

Для розв'язання цієї задачі відобразимо область зовнішню до контура L на область, зовнішню до одиничного кола Γ площини, за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n} \quad (48)$$

і покладемо

$$\begin{aligned}\Phi_2^*(\omega(\zeta)) &= \Phi_2(\zeta) \\ \psi_2^*(\omega(\zeta)) &= \psi_2(\zeta).\end{aligned}\quad (49)$$

Тоді співвідношення (46) (47а) дають

$$4\operatorname{Re}\Phi_2(\zeta) = \begin{cases} 2k[2lg\sqrt{\omega(\zeta)\bar{\omega}(\zeta)} - C + \sqrt{\omega(\zeta)\bar{\omega}(\zeta)} + C] + 2Dk & \text{на } \Gamma \\ A + B & \text{при } z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (50)$$

$$2\left[\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi_2'(\zeta) + \psi_2(\zeta)\right] = \begin{cases} 2k\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega(\zeta)} & \text{на } \Gamma \\ B - A & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (51)$$

Функції $\Phi_2(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ будемо шукати в виді

$$\Phi_2(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \quad (52)$$

$$\psi_2(\zeta) = b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots$$

Враховуючи, що на γ $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, помножимо перше рівняння (51)

на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$, де ζ — точка в середині кола Γ і проінтегруємо по Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{\Phi_2'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_2(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} k \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)} \frac{1}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (53)$$

На основі теореми Харнака [7] умова (53) еквівалентна умові (51). Простим підрахунком можна переконатися, що

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)} = \frac{\bar{c} \frac{1}{\sigma} + \bar{c}_1 \sigma + \bar{c}_2 \sigma^2}{c\sigma + \frac{c_1}{\sigma} + \frac{c_2}{\sigma^2}} = \frac{\bar{c}_1}{c} \sigma + \frac{\bar{c}_2}{c} + M(\sigma), \quad (54)$$

де $M(\sigma)$ функція голоморфна назовні Γ і $M(\infty) = 0$.

Точно так само

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) = -\frac{\bar{c}_2}{c} a_1 + N(\sigma), \text{ де } N(\sigma) \quad (55)$$

голоморфна назовні Γ і $N(\infty) = 0$.

Внаслідок (54), (55) із (53) одержуємо

$$-\frac{c_2}{c} a_1 + \frac{B - A}{2} = k \left[\frac{\bar{c}_2}{c} \zeta + \frac{\bar{c}_1}{c} \right], \quad (56)$$

якщо покласти, що

$$z = \omega(\sigma) = c\sigma + \frac{c_1}{\sigma} + \frac{c_2}{\sigma^2}, \quad (57)$$

Із (56) маємо $\bar{c}_2 = 0$, $\bar{c}_1 = c_1 = \frac{D-C}{2k} c = \beta c$,

де покладено $\beta = \frac{D-C}{2k}$.

Отже,

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right). \quad (58)$$

Залишається визначити константу c так, щоб задовольнити першу умову (50). Легко бачити, що при достатньо малому C це завжди можна зробити.

Якщо $C=0$, то із (50) маємо

$$\begin{aligned} \Phi_2(\zeta) &= klg \frac{c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right)}{R} + \frac{p}{2} + \frac{k}{2} - klg \zeta = \\ &= klg c - klg R + klg \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) + \frac{p}{2} + \frac{k}{2} - klg \zeta. \end{aligned} \quad (59)$$

Щоб задовольнити другу умову (50), треба взяти c так, щоб

$$A + B = 4 \left(klg c - klg R + \frac{p}{2} + \frac{k}{2} \right), \quad (60)$$

звідки

$$c = \text{Exp} \left[\frac{B + A}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k} \right] \quad (61)$$

Дальше з першої умови (51)

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) &= k \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{\omega(\zeta)} - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{\omega'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) = k \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{\omega(\zeta)} - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{\omega'(\zeta)} \left[k \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} - \frac{k}{\zeta} \right] = \\ &= k \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\zeta}, \end{aligned}$$

тобто ми одержуємо розв'язання Л. А. Галіна [6].

Дана таблиця ілюструє наведені розв'язання для $R=1$:

	Напруження на безконечності		Напруження по контуру отвору		c	$\beta = \frac{B-A}{2k}$
	$\sigma_x^\infty = A$	$\sigma_y^\infty = B$	$\tau_{\varphi\theta}$	σ_φ		
1	$-1,23769 k$	$-0,57102 k$	$0,5 k$	$-4 k$	3	$\frac{1}{3}$
2	$-1,23769 k$	$-0,57102 k$	0	$-4 k$	2,8514	$\frac{1}{3}$
3	$1,4965 k$	$1,8965 k$	$0,5 k$	0	1,5	0,2
4	$0,4965 k$	$0,8965 k$	$0,5 k$	$-k$	1,5	0,2
5	$0,45299 k$	$1,11965 k$	$0,5 k$	$-k$	1,5	$\frac{1}{3}$
6	$0,47759 k$	$1,14425 k$	0	$-k$	1,5	$\frac{1}{3}$

З цих прикладів видно, що величина пластичної зони збільшується від того, що по контуру отвору, крім нормальних, прикладені ще й дотичні зусилля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Бігармонічні розв'язання рівняння

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2. \quad \text{Доповіді АН УРСР, № 3, 1947.}$$

2. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Характеристики бігармонічного пластичного стану. Доповіді АН УРСР, № 4, 1947.

3. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Пружно-пластичні задачі з бігармонічним пластичним станом. Доповіді АН УРСР, № 4, 1947.

4. Г. М. Савін та О. С. Парасюк. — Вплив нерівномірно напруженого поля на пластичну зону навколо отвору. Доповіді АН УРСР, № 3, 1948.

5. О. С. Парасюк. — Упруго-пластическая задача с небигармоническим состоянием. Доклады АН СССР, том LXIII, № 4, 1948.

6. Л. А. Галин. — Плоская упруго-пластическая задача. Прикл. мат. и мех. т. X, вып. 3, 1946.

7. Н. И. Мусхелишвили. — Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, стр. 158, 1935.

8. Г. Н. Савин. — Концентрация напряжений возле отверстий в неоднородно-напряженном плоском поле. Труды ДИСИ, вып. 2), 1937.

9. С. Г. Михлин. — Математическая теория пластичности — в книге «Некоторые новые вопросы механики сплошной среды», Из-во АН СССР, 1938.

Г. Н. САВИН и О. С. ПАРАСЮК. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ В НЕОДНОРОДНО НАПРЯЖЕННОМ ПЛОСКОМ ПОЛЕ

Резюме

В этой статье дано изложение результатов, опубликованных ранее в наших работах [1—5]. Принимая функцию напряжения в пластической области в виде (12), рассмотрен вопрос о влиянии неоднородно напряженного упругого поля на пластическую зону

возле отверстия для случая, когда напряжения этого неоднородно напряженного упругого поля заданы полиномами (14).

Для случая, когда полиномы (14) второй и первой степени, приведено подробное решение: характер влияния изгибающего момента M и перерезывающей силы Q на пластическую зону возле отверстия для некоторых частных случаев ясно виден из приведенных графиков на рисунках 1-м и 2-м. Кривая I на рис. 1-м и 2-м есть круг

радиуса $R = ce^{\frac{p-k}{2k}}$ и представляет собою границу пластической области возле кругового отверстия радиуса R , когда к контуру этого отверстия приложено давление $p = 3k$ при нулевом напряженном состоянии на бесконечности.

Кривые II и III на рисунках 1-м и 2-м представляют собой границы пластических зон возле отверстия при одновременном действии давления $p = 3k$ по контуру кругового отверстия и напряженного состояния на бесконечности, соответствующего как чистому изгибу моментом M (рис. 1-й), так и изгибу консоли постоянной перерезывающей силой Q (рис. 2-й).

Далее дано решение задачи об определении пластической области возле кругового отверстия, по контуру которого действуют усилия (42), а на бесконечности (43). Как частный случай, получается при этом решение задачи Л. А. Галина [6].

А. С. КОВАНЬКО

О НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ И МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Введение

Вопрос о мероопределении поверхности весьма сложен и в последнее время является предметом многочисленных исследований со стороны многих ученых. Одно из определений меры поверхности принадлежит польскому математику Банаху¹, но, к сожалению, это определение не свободно от системы координат, так что сам Банах не смог доказать независимость этой меры от выбранной системы координат. Следуя примерно аналогичной идее, нам удалось несколько видоизменить определение меры поверхности по Банаху и дать такое определение, из свойств которого доказывается его инвариантность относительно операции преобразования координат.

Мы ограничиваем также класс функций φ , ψ , χ , определяющих данную поверхность в параметрической форме:

$$[x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)].$$

Некоторые, более частные, результаты по этому вопросу были получены нами в двух наших статьях („Интеграл Стильтьеса Риммана от функций двух переменных с двумя добавочными функциями“, Изв. НИИММ, ТГУ, т. II, 1938 г. и „Интеграл Стильтьеса Лебега от функций двух переменных с двумя добавочными функциями“, Ученые Записки Ивановского Пединститута, т. I, 1941 г.).

§ 1. ГОМЕОМОРФНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Пусть мы имеем в плоскости переменных (u, v) некоторую односвязную область Ω и пару непрерывных функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ таких, что преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} (T)$$

осуществляет гомеоморфное² преобразование Ω в область S в плоскости переменных (x, y) . Предположим еще, что T есть прямое соответствие, т. е. соответственные контуры в S и Ω описываются в одном направлении (против или по часовой стрелке). Будем называть пару функций φ и ψ прямой гомеоморфной парой. Рассмотрим в (u, v)

¹ Fundamenta Math., t. VII.

² Взаимнооднозначное и взаимнонепрерывное.

бесконечно убывающую (несчетную) систему областей $\{\Omega'\}$, определяющих данную предельную точку и соответствующую им систему областей в (x, y) $\{S'\}$. Она также определяет предельную точку, соответствующую с первой. Пусть области $\{\Omega'\}$ все квадрируемы. Тогда среди областей $\{S'\}$ могут быть квадрируемые и неквадрируемые. Легко доказать, что множество неквадрируемых областей $\{S'\}$ самое большое счетное. Мы скажем, что такая область Ω' , которой соответствует квадрируемая область S' , принадлежит к классу K .

Из сказанного следует, что любая точка области Ω может быть покрыта бесконечно убывающей последовательностью областей $\Omega_1 \supset \supset \Omega_2 \supset \supset \Omega_3 \supset \dots$ класса K .

Пусть E любое B — множество в Ω и E — его образ в S . Как известно из теории гомеоморфного соответствия, E также некоторое B множество и одного класса с E . Введем следующее обозначение:

$$[\varphi, \psi]_E = |E|^{1 \rightarrow 1}.$$

Отсюда следует, что $[\varphi, \psi]_{\Omega} = |S|$.

В частности $[u, v]_E = |E|$.

Рассмотрим теперь два прямых гомеоморфных соответствия

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\} (T_1) \quad \left. \begin{array}{l} x = \varphi_2(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\} (T_2).$$

Составим третье непрерывное соответствие

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \right\} (T_3).$$

Легко проверить, что (T_3) есть также гомеоморфное соответствие и что

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E. \quad (1)$$

Рассмотрим преобразование, обратное T_1 . Обозначим его через T_1^{-1} , тогда преобразование $T_2 T_1^{-1}$ переводит S_1 в S_2 и, будучи произведением двух прямых гомеоморфных преобразований, оно само является прямым и гомеоморфным преобразованием. Причем значения ординат Y при этом преобразовании не меняются. Пусть точке $(x_1, y) \in S_1$ соответствует точка $(x_2, y) \in S_2$. Очевидно, $x_2 = f(x_1, y)$, где f есть символ непрерывной возрастающей функции. Это легко усмотреть, если мы заставим точку в S_1 описывать против часовой стрелки прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Пусть S_2 есть область, в которую преобразовывается Ω через T_3 .

Очевидно, что преобразование $T_3 T_1^{-1}$ переводят точку $(x_1, y) \in S_1$ в точку $(x_1 + f(x_1, y), y) \in S_3$ и так как $x_1 + f(x_1, y)$ есть возрастающая функция x_1 , то отсюда легко заключить, что соответствие между S_1 и S_3 прямое и гомеоморфное.

Следовательно, соответствие T_3 также гомеоморфное. Покажем теперь справедливость (1).

¹ $|E|$ означает меру E .

Предположим, что в качестве E выбрана такая область, что ее образы через преобразования T_1, T_2 и T_3 будут $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ и $\tilde{S}_3$, причем хотя бы одна из них, например $\tilde{S}_1$, пересекается всякой прямой $\parallel ox$ по одному отрезку, концы которого суть x_1' и x_2' . Легко видеть, что $\tilde{S}_2$ и $\tilde{S}_3$ обладают тем же свойством. Пусть соответствующие концы суть x_1'', x_2'' и x_1''', x_2''' . Совершенно ясно, что $x_2''' - x_1''' = (x_2' - x_1') + (x_2'' - x_1'')$. Интегрируя это равенство по всем значениям y , получим

$$|\tilde{S}_3| = |\tilde{S}_1| + |\tilde{S}_2|.$$

Доказав такое соотношение, мы легко переходим к случаю любой области (путем сложения и вычитания областей) и вообще к любому открытому множеству. Используя метод дополнительных множеств, мы приходим к справедливости (1) для замкнутого множества. Затем мы переходим к множествам B типа F_σ , их дополнениям и т. д. Вообще, путем рекуррентности мы доказываем его справедливость для любого B множества.

Совершенно аналогично имеем:

$$[\varphi, \psi_1 + \psi_2]_E = [\varphi, \psi_1]_E + [\varphi, \psi_2]_E, \quad (2)$$

где (φ, ψ_1) и (φ, ψ_2) гомеоморфные пары. Вообще мы можем высказать более общее предложение.

Теорема 1. Если (τ_i, ψ_j) $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \end{smallmatrix} \right)$ прямые гомеоморфные пары, тогда $\left(\sum_1^n \varphi_i, \sum_1^m \psi_j \right)$ также гомеоморфная пара и $\left[\sum_1^n \varphi_i, \sum_1^m \psi_j \right]_E = \sum_1^n \sum_1^m [\varphi_i, \psi_j]_E$ где E — любое, B — множество $\subset \Omega$.

Теорема 2. Пусть (φ_i, ψ_j) , $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots \end{smallmatrix} \right)$ прямые гомеоморфные пары. Тогда, если $\sum_1^\infty \sum_1^\infty [\varphi_i, \psi_j]_\Omega$ сходятся, а также сходятся $\sum_1^\infty \varphi_i$ и $\sum_1^\infty \psi_j$, то пара $\left(\sum_1^\infty \varphi_i, \sum_1^\infty \psi_j \right)$ гомеоморфная и, кроме того, $\left[\sum_1^\infty \varphi_i, \sum_1^\infty \psi_j \right]_E = \sum_1^\infty \sum_1^\infty [\varphi_i, \psi_j]_E$, где E — любое, B — множество $\subset \Omega$.

Очевидны также следующие свойства символа $[\varphi, \psi]_E$:

$$(\alpha) \quad [a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E,$$

где a и b — положительные постоянные числа.

$$(\beta) \quad [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2},$$

если $E_1 E_2 = 0$.

Ясно, что если (τ, ψ) прямая гомеоморфная пара, то $(-\tau, \psi)$ или $(\varphi, -\psi)$ обратные гомеоморфные пары, также (ψ, φ) обратная гомеоморфная пара.

Условимся писать $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$; тогда соотношение (а) обобщается на любые постоянные a и b . Рассмотрим теперь пару (φ, φ) ; очевидно, что преобразование $\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\varphi(u,v) \end{cases}$ переводит E в некоторое линейное множество, лежащее на прямой $y=x$. Следовательно, плоская мера этого множества равна 0. Поэтому мы условимся считать, что $[\varphi, \varphi]_E = 0$.

§ 2. ОГРАНИЧЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВ

Пусть нам даны две прямые гомеоморфные пары (φ_1, ψ) и (φ_2, ψ) на области Ω . Тогда ясно, что $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$ вообще негомеоморфная пара, но мы для нее определим символ $[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E$ следующим образом:

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E. \quad (3)$$

Легко показать, что величина (2) зависит только от разности $(\varphi_1 - \varphi_2)$, но не от φ_1 и φ_2 . В самом деле, предположим, что функцию $\varphi_1 - \varphi_2$ можно еще представить иным способом, как $\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2$, где $(\bar{\varphi}_1, \psi)$ и $(\bar{\varphi}_2, \psi)$ прямые гомеоморфные пары.

Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2$, откуда $\varphi_1 + \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1 + \varphi_2$; и тогда, согласно (2), имеем $[\varphi_1 + \bar{\varphi}_2, \psi]_E = [\bar{\varphi}_1 + \varphi_2, \psi]_E$, но $[\varphi_1 + \bar{\varphi}_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi]_E$, а $[\bar{\varphi}_1 + \varphi_2, \psi]_E = [\bar{\varphi}_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E$. Откуда следует, что $[\varphi_1, \psi]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi]_E = [\bar{\varphi}_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E$ или $[\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E = [\bar{\varphi}_1, \psi]_E - [\bar{\varphi}_2, \psi]_E$, что и требуется доказать.

Совершенно аналогично полагаем, если (φ, ψ_1) и (φ, ψ_2) прямые гомеоморфные пары, что

$$[\varphi, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi, \psi_1]_E - [\varphi, \psi_2]_E \quad (3')$$

Рассмотрим дальнейшее расширение нашего символа. Пусть имеются четыре прямые гомеоморфные пары (φ_i, ψ_j) ($i=1,2 \dots$, $j=1,2 \dots$).

На основании (2) имеем:

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1]_E = [\varphi_1, \psi_1]_E + [\varphi_2, \psi_1]_E,$$

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_2]_E + [\varphi_2, \psi_2]_E.$$

Вычитая одно из другого, на основании (3') и ранее выведенного мы можем написать

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E. \quad (4)$$

Установив это, расширим символ для пары $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E. \quad (5)$$

Следует показать, что эта величина зависит только от разности $(\varphi_1 - \varphi_2)$, а не от φ_1 и φ_2 . Оба члена правой части (5) зависят, как мы

видели выше, только от $\psi_1 - \psi_2$. Пусть $\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, где $(\bar{\varphi}_1, \psi_1)$, $(\bar{\varphi}_1, \psi_2)$, $(\bar{\varphi}_2, \psi_1)$, $(\bar{\varphi}_2, \psi_2)$ прямые гомеоморфные пары. Имеем $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = \varphi_1 + \varphi_2$.

Согласно (4) имеем

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E &= [\bar{\varphi}_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E, \\ [\varphi_1 + \bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E &= [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E. \end{aligned}$$

Но левые части одинаковы, а поэтому

$$[\bar{\varphi}_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E + [\bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E.$$

Откуда

$$[\bar{\varphi}_1, \psi_1 - \psi_2]_E - [\bar{\varphi}_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1 - \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E,$$

что и требовалось доказать.

Разворачивая правую часть (5) дальше, получим

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E = [\varphi_1, \psi_1]_E - [\varphi_1, \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1]_E + [\varphi_2, \psi_2]_E. \quad (6)$$

В этом смысле пара $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$ называется ограниченной, так как

$$|[\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2]_E| \leq |[\varphi_1, \psi_1]_E| + |[\varphi_1, \psi_2]_E| + |[\varphi_2, \psi_1]_E| + |[\varphi_2, \psi_2]_E|,$$

для всякого $E \subset \Omega$.

Аналогично и пары $(\varphi, \psi_1 - \psi_2)$ и $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$ называются ограниченными.

Отметим, что если (φ, ψ) ограниченная пара, то преобразование $x = a + \varphi$ (где a постоянное) переводит E в тот же образ, что и $y = \psi$ преобразование $\begin{cases} x = \varphi \\ y = \psi \end{cases}$, только смещенный на отрезок a , а поэтому

$$[a + \varphi, \psi]_E = [\varphi, \psi]_E.$$

Откуда, на основании (6), имеем

$$[a, \psi]_E = [a + \varphi, \psi]_E - [\varphi, \psi]_E = 0.$$

Совершенно так же имеем, что $[\varphi, a]_E = 0$.

Из данного нами определения символа $[\varphi, \psi]_E$ вытекают следующие очевидные его свойства:

- 1) $[\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2}$, если $E_1 E_2 = 0$;
- 2) $[a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E$ (где a и b постоянные);
- 3) $[\sum_1^n a_k \varphi_k, \sum_1^m b_i \psi_i]_E = \sum_1^n \sum_1^m a_k b_i [\varphi_k, \psi_i]_E$; (где a_k и b_i постоянные).
- 4) $[a, \psi]_E = [\varphi, a]_E = 0$, где a постоянное;

- 5) $[\varphi, \varphi]_E = 0$;
 6) $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$;
 7) $[u, v]_E = |E|$.

§ 3. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ, ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ВАРИАЦИИ

Пусть E некоторое фиксированное B множество в Ω . И пусть $\tilde{E}$ переменное B множество такое, что $\tilde{E} \subset E$.

$$\text{Положим } \bar{V}[\varphi, \psi]_E = \sup_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{E}} \quad -V[\varphi, \psi]_E = \inf_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$$

$$V[\varphi, \psi]_E = \bar{V}[\varphi, \psi]_E + \underline{V}[\varphi, \psi]_E.$$

$\bar{V}$ назовем положительной вариацией $[\varphi, \psi]_E$, $\underline{V}$ отрицательной вариацией и V полной вариацией. Эти названия даны потому, что $\bar{V} \geq 0$, а $\underline{V} \leq 0$, что легко проверить. Отметим ряд свойств $\bar{V}$, $\underline{V}$ и V , не приводя их доказательств¹.

- 1) $[\varphi, \psi]_{E_1} = \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_1} - V[\varphi, \psi]_{E_1}$.
 2) $\bar{V}$ и $\underline{V}$ — неотрицательные величины.
 3)
$$\left. \begin{aligned} \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_1} + \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_2} \\ \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_1} + \underline{V}[\varphi, \psi]_{E_2} \\ V[\varphi, \psi]_{E_1+E_2} &= V[\varphi, \psi]_{E_1} + V[\varphi, \psi]_{E_2} \end{aligned} \right\} \text{ если } E_1 E_2 = 0$$

 4)
$$\begin{aligned} \bar{V} \left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i \right]_E &\leq \sum_1^n \sum_1^m \bar{V}[\varphi_k, \psi_i]_E \\ \underline{V} \left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i \right]_E &\leq \sum_1^n \sum_1^m \underline{V}[\varphi_k, \psi_i]_E \\ V \left[\sum_1^n \varphi_k, \sum_1^m \psi_i \right]_E &\leq \sum_1^n \sum_1^m V[\varphi_k, \psi_i]_E. \end{aligned}$$

Определение. Выделим в области Ω точку (u, v) и опишем около нее как центра круг Γ_ϱ радиуса ϱ .

Возьмем $[\varphi, \psi]_E$, где $|E| > 0$ и имеет (u, v) как точку плотности E , и рассмотрим отношение

$$\frac{[\varphi, \psi]_{E \cap \Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \frac{[\varphi, \psi]_{E \cap \Gamma_\varrho}}{[u, v]_{\Gamma_\varrho}}$$

Рассмотрим две величины

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{[\varphi, \psi]_{E \cap \Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} \text{ и } \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{[\varphi, \psi]_{E \cap \Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|}.$$

¹ См. Saks. Théorie de l'intégrale.

Если эти две величины совпадают, то мы скажем, что $[\varphi, \psi]_E$ дифференцируемая функция в данной точке и общее значение этих величин обозначим через $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$, назвав его обобщенным Якобианом функций φ и ψ .

5) $[\varphi, \psi]_E$ дифференцируема почти в каждой точке E и $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$ почти в каждой точке плотности E зависит только от свойств φ и ψ и не зависит от E .

$$6) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{V}[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\epsilon}}{|\Gamma_\epsilon|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{V}[\varphi, \psi]_{E\Gamma_\epsilon}}{|\Gamma_\epsilon|} = \left| \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right|$$

почти всюду в E .

$$7) [\varphi, \psi]_E = \iint_E \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du dv + I(E),$$

$$\text{где } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(E\Gamma_\epsilon)}{|\Gamma_\epsilon|} = 0 \quad \text{почти всюду в } E.$$

Примечание. Вместо круга Γ_ϵ можно взять прямоугольник¹.

Определение. $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ называется абсолютно непрерывной функцией $\tilde{E} \subset E$, если, как бы мало ни было $\epsilon > 0$, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}| < \epsilon$, если $|\tilde{E}| < \delta$.

Мы скажем в этом случае, что пара (φ, ψ) абсолютно непрерывна.

8) Если $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ абсолютно непрерывна, то и $\overline{V}$, $\underline{V}$ и V абсолютно непрерывны.

9) Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ состоит в том, что

$$[\varphi, \psi]_{E^+} = \iint_{E^+} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du dv.$$

10) Если $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ абсолютно непрерывная функция $\tilde{E} \subset E$,

$$\text{то} \quad \overline{V}[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \iint_{E^+} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du dv$$

$$\text{и} \quad \underline{V}[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \iint_{E^-} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} du dv,$$

$$\text{где} \quad E^+ = E + \left\{ \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} > 0 \right\} \quad E^- = E - \left\{ \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} < 0 \right\}.$$

$$V[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \iint_{\tilde{E}} \left| \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right| du dv.$$

¹ С постоянным отношением сторон.

§ 4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ СИМВОЛА $[\varphi, \psi]_E$

Пусть Ω разбивается на счетное множество областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$,¹ на каждой из которых (φ, ψ) ограниченная пара простейшего типа, и пусть ряды $\sum_1^\infty \bar{V}[\varphi, \psi]_{\Omega_k}$ и $\sum_1^\infty V[\varphi, \psi]_{\Omega_k}$ сходятся. Тогда мы полагаем

$$[\varphi, \psi]_E = \sum_1^\infty [\varphi, \psi]_{\Omega_k}.$$

Легко проверить, что все свойства (1—7) § 2 сохраняются для этого обобщения; кроме того, очевидно, что это новое обобщение не содержит противоречий. В самом деле, для этого нам нужно предположить возможность другого разбиения Ω на области $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3', \dots$ и проверить совпадение указанных сумм наложением одной сетки делений на другую.

Если идет речь о расширении понятия символа $[\varphi, \psi]_{\tilde{\Omega}}$ для области $\tilde{\Omega}$, то здесь можно высказать следующее. Разобьем контур $\tilde{C}$ области $\tilde{\Omega}$ на n частей точками (u_i, v_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) ($u_n = u_0, v_n = v_0$) и рассмотрим сумму

$$\sum_1^n \varphi(u_i, v_i) [\psi(u_i, v_i) - \psi(u_{i-1}, v_{i-1})].$$

Если эта сумма стремится к определенному пределу, когда $n \rightarrow \infty$ и максимум $\sqrt{(u_i - u_{i-1})^2 + (v_i - v_{i-1})^2}$ стремится к 0, независимо от выбора точек деления, то мы его обозначим так:

$$\int_{\tilde{C}} \varphi(u, v) d\psi(u, v)$$

и положим

$$[\varphi, \psi]_{\tilde{\Omega}} = \int_{\tilde{C}} \varphi d\psi,$$

мы скажем, что пара (φ, ψ) локально ограничена на $\tilde{\Omega}$. Потребуем еще, чтобы $|[\varphi, \psi]_{\tilde{\Omega}}|$ было ограничено при всевозможных выборах $\tilde{\Omega}$ внутри Ω . Тогда легко проверить, что $[\varphi, \psi]_{\tilde{\Omega}}$ удовлетворяет всем свойствам (1—7), где E заменено через $\tilde{\Omega}$; пару (φ, ψ) мы опять назовем ограниченной.

Пусть существует две последовательности непрерывных функций $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), которые сходятся равномерно соответственно к φ и ψ . Причем (φ_n, ψ_n) — ограниченные пары. Пусть (φ, ψ) также ограниченная пара и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n, \psi_n]_E = [\varphi, \psi]_E.$$

Эта формула может служить для вычисления $[\varphi, \psi]_E$, когда мы умеем вычислять $[\varphi_n, \psi_n]_E$. Всякое множество E , для которого $[\varphi_n, \psi_n]_E$ существует, мы назовем допустимым множеством.

¹ Класа К.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть нам дана поверхность S , заданная уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned} \right\} (S), \text{ где } (u, v) \in \Omega$$

и где φ , ψ и χ — непрерывные и однозначные функции u , v . Здесь могут быть и двойные точки, так что под куском поверхности мы будем понимать множество всех точек (x, y, z) , определенных для всех $(u, v) \in \Omega$, и если среди них будут совпадающие, то мы их дублируем соответствующим образом. Предположим, что пары (ψ, χ) , (χ, φ) и (φ, ψ) локально ограниченные на E . Возьмем допустимое множество $E \subset \Omega$ и рассмотрим вектор:

$$\bar{R}_E = [\psi, \chi]_E \bar{i} + [\chi, \varphi]_E \bar{j} + [\varphi, \psi]_E \bar{K}.$$

Легко проверить, что этот вектор не зависит от системы координат, а зависит только от множества E . В самом деле, возьмем другую систему орт $\bar{i}', \bar{j}', \bar{K}'$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}' &= \alpha_{11} \bar{i} + \alpha_{21} \bar{j} + \alpha_{31} \bar{K}' \\ \bar{j}' &= \alpha_{12} \bar{i} + \alpha_{22} \bar{j} + \alpha_{32} \bar{K}' \\ \bar{K}' &= \alpha_{13} \bar{i} + \alpha_{23} \bar{j} + \alpha_{33} \bar{K}' \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \alpha_{mn} \text{ — девять косинусов преобразования координат.}$$

Формулы преобразования координат будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi \alpha_{11} + \psi \alpha_{12} + \chi \alpha_{13} \\ \psi' &= \varphi \alpha_{21} + \psi \alpha_{22} + \chi \alpha_{23} \\ \chi' &= \varphi \alpha_{31} + \psi \alpha_{32} + \chi \alpha_{33} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В новых координатах проекциями $\bar{R}_E$ на $\bar{i}', \bar{j}', \bar{K}'$ будут

$$[\psi', \chi']_E, [\chi', \varphi']_E, \text{ и } [\varphi', \psi']_E.$$

В самом деле, для этого достаточно показать, что

$$\left. \begin{aligned} [\psi', \chi']_E &= [\psi, \chi]_E \alpha_{11} + [\chi, \varphi]_E \alpha_{12} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{13} \\ [\chi', \varphi']_E &= [\psi, \chi]_E \alpha_{21} + [\chi, \varphi]_E \alpha_{22} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{23} \\ [\varphi', \psi']_E &= [\psi, \chi]_E \alpha_{31} + [\chi, \varphi]_E \alpha_{32} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{33} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} [\varphi', \chi']_E &= [\varphi \alpha_{21} + \psi \alpha_{22} + \chi \alpha_{23}, \varphi \alpha_{31} + \psi \alpha_{32} + \chi \alpha_{33}]_E = \\ &= [\varphi, \varphi]_E \alpha_{21} \alpha_{31} + [\psi, \varphi]_E \alpha_{12} \alpha_{31} + [\chi, \varphi]_E \alpha_{13} \alpha_{31} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{21} \alpha_{32} + \\ &+ [\psi, \psi]_E \alpha_{22} \alpha_{32} + [\chi, \psi]_E \alpha_{23} \alpha_{32} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{21} \alpha_{33} + [\psi, \chi]_E \alpha_{23} \alpha_{32} + \\ &+ [\chi, \chi]_E \alpha_{23} \alpha_{33} = [\psi, \chi]_E (\alpha_{23} \alpha_{32} - \alpha_{22} \alpha_{33}) + [\chi, \varphi]_E (\alpha_{23} \alpha_{31} - \alpha_{21} \alpha_{33}) + \\ &+ [\varphi, \psi]_E (\alpha_{21} \alpha_{32} - \alpha_{23} \alpha_{31}) = [\psi, \chi]_E \alpha_{11} + [\chi, \varphi]_E \alpha_{12} + [\varphi, \psi]_E \alpha_{13}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично проверяются 2-е и 3-е равенства (3). Рассмотрим теперь следующую величину:

$$\{\varphi, \psi, \chi\}_E = + \sqrt{R_E^2} = \sqrt{[\psi, \chi]_E^2 + [\chi, \varphi]_E^2 + [\varphi, \psi]_E^2}.$$

Разобьем теперь $E \subset \Omega$ на n допустимых множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$ и рассмотрим точную верхнюю границу $\sum_{k=1}^n \{\varphi, \psi, \chi\}_{E_k}$ при всевозможных выборах числа n и множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$. Обозначим ее через $W\{\varphi, \psi, \chi\}_E$. Это будет, по нашему определению, мера части поверхности S , соответствующая множеству E . Обозначим ее через S_E . Таким образом, $|S_E| = W\{\varphi, \psi, \chi\}_E$.

Может случиться, что $W = +\infty$, тогда поверхность будет называться неквадрируемой. В противном случае она квадрируема.

Приведем ряд свойств меры поверхности без доказательства¹.

$$1) |S_{E_1+E_2}| = |S_{E_1}| + |S_{E_2}|, \text{ если } E_1 E_2 = 0.$$

$$2) \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|S_{\Gamma_\varrho}|}{|\Gamma_\varrho|} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\{\varphi, \psi, \chi\}_{\Gamma_\varrho}}{|\Gamma_\varrho|} = \frac{D|S|}{D[u, v]} \text{ существует почти всюду в } \Omega.$$

(Γ_ϱ означает круг радиуса ϱ , описанный из точки (u, v) радиусом ϱ).

$$3) \frac{D|S|}{D[u, v]} = \sqrt{\left\{ \frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right\}^2}$$

почти всюду в Ω .

Определение. $|S_E|$ называется абсолютно непрерывной функцией E , если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что $|S_E| < \varepsilon$, коль скоро $|E| < \delta$.

4) Если $|S_E|$ абсолютно непрерывны, то

$$|S_E| = \iint_E \sqrt{\left\{ \frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right\}^2} du dv.$$

5) В общем случае:

$$|S_E| \geq \iint_E \sqrt{\left\{ \frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \right\}^2 + \left\{ \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right\}^2} du dv.$$

Теорема. а) Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности $S \begin{cases} x = \varphi \\ y = \psi \\ z = \chi \end{cases}$ состоит в том, что пары (ψ, χ) , (χ, φ) и (φ, ψ) ограничены.

в) Необходимое и достаточное условие представимости $|S_E|$ двойным интегралом (см. свойство 4-е) состоит в абсолютной непрерывности пар (ψ, χ) , (χ, φ) и (φ, ψ) .

¹ См. нашу статью Изв. НИИММ, Томск, том II, вып. II.

Доказательство. Справедливость теорем вытекает, очевидно из следующего соотношения.

$$\begin{vmatrix} [\psi, \chi]_E \\ [\chi, \varphi]_E \\ [\varphi, \psi]_E \end{vmatrix} \leq \sqrt{[\psi, \chi]_E^2 + [\chi, \varphi]_E^2 + [\varphi, \psi]_E^2} \leq |[\psi, \chi]_E| + |[\chi, \varphi]_E| + |[\varphi, \psi]_E|.$$

§ 6. РАССМОТРЕНИЕ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

1. $\left. \begin{matrix} x=u \\ y=f(u, v) \end{matrix} \right\} (T) \quad (u, v) \in \Omega \quad f(u, v)$ непрерывная функция.

Если $f(u, v)$ возрастающая функция v при любом u , то очевидно, что (T) — гомеоморфное прямое преобразование. Пусть $f(u, v)$ есть функция ограниченной вариации по отношению к переменному v для почти каждого значения u . Тогда $f(u, v) = f_1(u, v) - f_2(u, v)$, где f_1 и f_2 — две возрастающие функции для почти каждого значения u . Пусть E некоторое B множество в области Ω и соответствующее ему множество E через преобразование (T) такое, что абсцисса E и E одинаковы (поскольку $x=u$).

Зафиксируем x и будем рассматривать соответствующую этому значению x часть E . Обозначим ее через E_x . Пусть E_1 и E_2 — образы E через преобразования:

$$\left. \begin{matrix} x=u \\ y=f_1(u, v) \end{matrix} \right\} (T_1) \quad \left. \begin{matrix} x=u \\ y=f_2(u, v) \end{matrix} \right\} (T_2).$$

Их части, соответствующие данному x , пусть будут E_{1x} и E_{2x} . Тогда, ясно, что

$$[u, f_1(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{1x}| dx$$

$$[u, f_2(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{2x}| dx.$$

Откуда:

$$[u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{1x}| - |E_{2x}| dx.$$

Но $|E_{1x}| - |E_{2x}|$ почти для каждого x есть обыкновенная вариация $f(x, v)$ по переменному v на множестве E_u , где E_u есть часть E , соответствующая данному значению u .

Обозначим ее через $\omega_v^{E_u} f(x, v)$.

$$\text{Отсюда } [u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_v^{(E_u)} f(x, v) du.$$

Пусть $\bar{V}_v^E f$ есть положительная вариация $f(u, v)$, а $V_v^E f$ — отрицательная вариация $f(u, v)$ по переменному v на множестве E_u .

Ясно, что $\bar{V}[u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}_v^{(E_u)} f(u, v) du,$

$$V[u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} V_v^{(E_u)} f(u, v) du.$$

Тогда полная вариация $V[u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} V_v^{(E_u)} f(u, v) du$ получается

как результат сложения двух предыдущих величин. Предположим в частности, что E есть прямоугольник Γ с вершинами (u, v) $(u + \Delta u, v)$ $(u, v + \Delta v)$ $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Тогда

$$[u, f(u, v)]_\Gamma = \int_u^{u+\Delta u} [f(u, v + \Delta v) - f(u, v)] du = [f(u + \Theta \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Theta \Delta u, v)] \Delta u$$

($0 < \Theta < 1$) (теорема о среднем),

но выражение в скобках можно представить так:

$$\left\{ \frac{\partial f(u + \Theta \Delta u, v)}{\partial v} + \varepsilon \right\} \Delta v,$$

где $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \varepsilon = 0$, отсюда

$$\frac{D[u, f]}{D[u, v]} = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{[u, f(u, v)]_\Gamma}{\Delta u \Delta v} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\partial f(u + \Theta \Delta u, v)}{\partial v}.$$

Но по теореме Н. Лузина (C — свойство) можно определить такое совершенное множество $P \subset \Omega$, что $|\Omega \setminus P|$ как угодно мало и что на нем $\frac{\partial f}{\partial v}$ непрерывна. Поэтому, переходя асимптотически к пределу, так что

$$(u + \Theta \Delta u, v) \in P,$$

мы получим, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\partial f(u + \Theta \Delta u, v)}{\partial v} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v},$$

но так как по свойству ограниченности вариации $\frac{\partial f}{\partial v}$ существует почти всюду в Ω , а следовательно и в P , а потому асимптотический

предел существует и почти всюду в P равен $\frac{\partial f}{\partial v}$, т. е. почти всюду в Ω .

$$\text{Итак, } \frac{D[u, f]}{D[u, v]} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Если $f(u, v)$ абсолютно непрерывная функция v для почти каждого значения u , то очевидно, что

$$\omega_v^{E_u} f = \int_{E_u} \frac{\partial f}{\partial u} dv.$$

Отсюда

$$[u, f(u, v)]_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{E_u} \frac{\partial f}{\partial v} dv \right\} du.$$

2. Аналогично трактуется пара $(f(u, v), v)$.

$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} (T)$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ — непрерывные функции u и v .

Воспользуемся определением $[\varphi, \psi]_{\hat{\Omega}}$, данным в § 4.

$$[\varphi, \psi]_{\hat{\Omega}} = \int_{\hat{C}} \varphi d\psi, \text{ где } \hat{C} \text{ граница } \hat{\Omega}.$$

$$\text{Но } \int_{\hat{C}} d\psi = \int_{\hat{C}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right) = \iint_{\hat{\Omega}} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} du dv.$$

Отсюда видно, что $[\varphi, \psi]_{\hat{\Omega}}$ есть абсолютно непрерывная функция области. Откуда $[\varphi, \psi]_{\hat{E}} = \iint_{\hat{E}} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} du dv$.

$$\text{Отсюда также следует, что } \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}.$$

В частности, φ и ψ могут быть полиномами.

3. $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ где φ и ψ обладают условием Липшица.

Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ существуют почти всюду и являются ограниченными.

Не приводя доказательства, мы лишь укажем, что в этом случае

$$[\varphi, \psi]_E = \iint_E \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} du dv.$$

При определении величины площади поверхности мы заключаем легко в силу результатов § 5, что если поверхность выражается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v), \end{aligned}$$

где φ, ψ и χ удовлетворяют условию Липшица, то мера поверхности определяется классической формулой, т. е. двойным интегралом. Если же поверхность выражается уравнением $z = f(x, y)$, то пары $(x, f(x, y))$ и $(f(x, y), y)$ должны быть ограниченными. Это последнее условие равносильно тому, что $f(x, y)$ есть функция ограниченной вариации для каждого из переменных при почти всяком значении другого переменного и интегрируемы по этому второму переменному и полные вариации интегрируемы.

Если кроме этого $f(x, y)$ абсолютно непрерывная функция каждого из переменных для почти каждого значения другого переменного, то мера поверхности выражается классической формулой, то есть двойным интегралом.

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ

ПРО ОДНУ ОПЕРАЦІЮ В ТЕОРІЇ ТОЧКОВИХ МНОЖИН

I. ПОНЯТТЯ ОПЕРАЦІЇ A^m

1. Буквою C позначимо простір, а буквами A, B підмножини цього простору. Буквою O позначимо пусту множину, знаком A^c — різницю $C - A$ (доповнення множини A).

Нехай в просторі, що нами розглядається, кожній множині $A \subset C$ буде припорядкована однозначно якась множина цього простору, яку позначатимемо знаком A^d і яку назовемо похідною множини A .

2. Розглядатимемо такі простори, в яких поняття похідної задовольняє такі, незалежні одна від одної [5]¹, аксіоми:

$$\begin{aligned} \text{I } d: (A \subset C) \cdot \supset \cdot (A^d \subset B^d) \\ \text{II } d: (A + B)^d \subset A^d + B^d \\ \text{III } d: C^d = C \\ \text{IV } d: A^{dd} \subset A^d \\ \text{V } d: O^d = O. \end{aligned}$$

Позначимо тепер операцію A^m формулою:

$$A^m = A^{dcd} = \{(A^d)^c\}^d,$$

і, користуючись законами алгебри множин, виведемо деякі топологічні властивості цієї операції.

II. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНОЇ МНОЖИНИ

1. Для вияснення топологічного значення операції A^m будуть необхідні такі властивості поняття похідної, що їх можна вивести з аксіом I d — IV d:

$$\begin{aligned} 1d: (A + B)^d &= A^d + B^d & 5d: A^{dcdcdcd} &= A^{dcd} \\ 2d: (AB)^d &\subset A^d B^d & 6d: A^{dcd} &= A^{dcd} \\ 3d: A^d - B^d &\subset (A - B)^d & 7d: A^{dcdc} &= A^{dcd} \\ 4d: A^{dc} &\subset A^{cd} & 8d: A^{cdcd} &\subset A^{dcdcd} \end{aligned}$$

2. Доведення².

Формула $1d$ є еквівалентна сукупності двох аксіом $1d$ і $2d$.

¹ Див. літературу в кінці статті.

² Коло кожної реляції в доведеннях пишемо в дужках аксіоми, на основі яких ця реляція випливає з попередньої. Знак (Б) означає, що дана реляція випливає з законів алгебри Буля.

Формула $2d$ є еквівалентна аксіомі $1d$.

Доведення формули $3d$:

$$A = AC = A(B^c + B) = AB + AB \subset AB^c + B, \quad (Б)$$

$$A^d \subset (AB^c + B)^d \subset (AB^c)^d + B^d, \quad (1d), (II d).$$

$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} + B^d B^{dc} = (AB^c)^d B^{dc} \subset (AB^c)^d, \quad (Б)$$

тобто: $A^d - B^d \subset (A - B)^d$.

Доведення формули $4d$:

$$C - A^d = C^d - A^d \subset (C - A), \quad (3d), (III d),$$

отже: $A^{dc} \subset A^{cd}$.

Доведення формули $5d$:

$$(A^{dc})^{dc} \subset (A^{dc})^{cd}, \quad (4d)$$

$$(A^{dcd})^{dc} \subset (A^{dcd})^{cd}, \quad (4d)$$

$$A^{dcdc} \subset A^{dd} \subset A^d, \quad (Б), (IV d)$$

$$A^{dcdcdc} \subset A^{dcd}, \quad (Б)$$

$$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d, \quad (1d), (IV d)$$

$$A^{dc} \subset A^{dcdcdc}, \quad (Б)$$

$$(α) A^{dcd} \subset A^{dcdcdcd}, \quad (1d)$$

$$(β) A^{dcdcdcd} \subset A^{dcd} \subset A^{dcd}, \quad (1d), (IV d)$$

з $(α)$ і $(β)$ випливає $5d$.

Доведення формули $6d$:

$$(A^{dcd})^{dc} \subset (A^{dcd})^{cd}, \quad (4d)$$

$$(β) A^{dcd} \subset A^{dcd}, \quad (IV d)$$

$$A^{dcdcdc} \subset A^{dcd} \subset A, \quad (Б), (IV d)$$

$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcd}, \quad (1d)$$

$$(α) A^{dcd} \subset A^{dcd}, \quad (5d)$$

з $(α)$ і $(β)$ випливає $6d$.

Доведення формули $7d$:

$$(A^{dcd})^{cd} \subset (A^{dcd})^{cd}, \quad (4d)$$

$$A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}, \quad (6d)$$

Доведення формули $8d$:

$$A^{dc} \subset A^{cd}, \quad (4d)$$

$$A^{dcd} \subset A^{cd} \subset A^{cd}, \quad (1d), (IV d)$$

$$A^{cdc} \subset A^{dcdc}, \quad (Б)$$

$$A^{cdcd} \subset A^{dcdcd}, \quad (1d)$$

III. ТОПОЛОГІЧНЕ ЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЇ A^m

Зовнішньою точкою множини A (в евклідових просторах, де A_d є множиною точок скупчення множини A) називають таку точку, яка не є елементом множини A і не є її точкою скупчення. За цим означенням, множину всіх зовнішніх точок множини A можна записати у вигляді:

$$A^e = A^c A^{dc}.$$

Доведемо таку теорему:

T_1 . Множина A^m є тотожна похідній множини зовнішніх точок множини A . Треба довести, що $A^m = A^{dcd} = (A^c A^{dc})^d$.

Маємо:

$$(A^c A^{dc})^{dc} \subset (A^c A^{dc})^{cd} = (A + A^d)^d = A^d, \quad (4d), (1d), (IVd)$$

$$A^{dc} \subset (A^c A^{dc})^d, \quad (Б)$$

$$(\alpha) \quad A^{dcd} \subset (A^c A^{dc})^{dd} \subset (A^c A^{dc})^d, \quad (Id), (IVd).$$

З другого боку, маємо:

$$A^c A^{dc} \subset A^{dc}, \quad (Б)$$

$$(\beta) \quad (A^c A^{dc})^d \subset A^{dcd}, \quad (Id)$$

з (α) і (β) випливає наша теорема.

IV. АКСІОМИ ОПЕРАЦІЇ A^m

1. Доведемо, що в просторах, в яких похідна задовольняє аксіоми $Id - Vd$, операція A^m задовольняє такі умови:

$$I. \quad A^m + B^m \subset (A + B)^m$$

$$II. \quad A^{cm} \subset A^{mm}$$

$$III. \quad A^{mc} \subset A^{mm}$$

$$IV. \quad A^{cm} = A^m$$

$$V. \quad C^m = O.$$

2. Доведення:

$$I. \quad AB \subset A, \quad (Б)$$

$$AB \subset B, \quad (Б)$$

$$(AB)^d \subset A^d, \quad (Id)$$

$$(AB)^d \subset B^d, \quad (Id)$$

$$A^{dc} \subset (AB)^{dc}, \quad (Б)$$

$$B^{dc} \subset (AB)^{dc}, \quad (Б)$$

$$(\alpha) \quad A^{dcd} \subset (AB)^{dcd} \quad (Id)$$

$$(\beta) \quad B^{dcd} \subset (AB)^{dcd}, \quad (Id).$$

З (α) і (β) випливає:

$$A^{dcd} + B^{dcd} \subset (AB)^{dcd}, \quad (Б),$$

тобто:

$$A^m + B^m \subset (AB)^m.$$

$$II. \quad A^{cm} = A^{cdcd} \subset A^{dcdcd} = A^{dcdcdcd} = A^{mm}, \quad (8d), (6d).$$

$$III. \quad A^{mc} = A^{dcdc} \subset A^{dcddcd} = A^{dcdcdcd} = A^{mm}, \quad (7d), (6d)$$

$$IV. \quad A^{cm} = A^{dcdcdcd} = A^{dcd} = A^m, \quad (5d)$$

$$V. \quad C^m = C^{dcd} = C^{cd} = O^d = O, \quad (IIIId), (Б), (Vd).$$

3. Доведемо, що формули I — V незалежні одна від одної. Нехай простір C складається з трьох елементів:

$$C = \{a, b, c\}.$$

В нижченаведеній таблиці знайдемо для кожної множини $A \subset C$, в окремих стовпцях, такі означення операції A^m , які задовольняють всі формули I — V, крім однієї, позначеної зверху відповідного стовпця. Це дасть нам підставу розглядати формули I — V як аксіоми операції A^m .

	I	II	III	IV	V
$Om =$	C	C	O	C	C
$\{a\}$	O	C	O	$\{b\}$	C
$\{b\}$	O	C	O	C	C
$\{c\}$	O	C	O	C	C
$\{a, b\}$	C	$\{c\}$	O	O	C
$\{b, c\}$	C	$\{a\}$	O	O	C
$\{c, a\}$	C	$\{b\}$	O	O	C
$Cm =$	O	O	O	O	C

V. ВИСНОВКИ З АКСІОМИ I – V

1. Виведемо такі властивості операції A^m :

- 1) $(A \subset B) \cdot \supset \cdot (B^m \subset A^m)$
- 2) $(A + B)^m \subset A^m B^m \subset A^m + B^m \subset (AB)^m$
- 3) $A^m - B^m \subset (A - B)^m$
- 4) $A^{mmm} = A^m = A^{mcm}$
- 5) $(A \subset B) \cdot \supset \cdot (A^{mm} \subset B^{mm})$
- 6) $(AB)^{mm} \subset A^{mm} B^{mm} \subset A^{mm} + B^{mm} \subset (A + B)^m$
- 7) $A^{cmcm} \subset A^{cm}$
- 8) $A^{cmcm} \subset A^m$
- 9) $O^m = C$
- 10) $A^m + A^{mm} = C$
- 11) $A^{mm} \neq A^m$
- 12) $A \neq A^m$

2. Доведення.

1) $A^m + B^m \subset (AB)^m$, (I)

$$(A \subset B) \cdot \supset \cdot (A^m + B^m \subset A^m), \quad (\text{Б})$$

$$B^m \subset A^m \quad (\text{Б})$$

2) Реляція $A^m B^m \subset A^m + B^m$ очевидна.

а) $A \subset A + B$, (Б)

$B \subset A + B$, (Б)

$$(A + B)^m \subset A^m \quad (1)$$

$$(A + B)^m \subset B^m \quad (1)$$

$$(A + B)^m \subset A^m B^m \quad (\text{Б})$$

б) $AB \subset A$, (Б)

$AB \subset B$, (Б)

$$A^m \subset (AB)^m, \quad (1)$$

$$B^m \subset (AB)^m, \quad (1)$$

$$A^m + B^m \subset (AB)^m \quad (\text{Б})$$

$$3) A - B = AB^c \subset A, \quad (Б)$$

$$A^m (A - B)^m, \quad (1)$$

$$A^m - B^m \subset (A - B)^m, \quad (Б)$$

4) З уваги на аксіому IV треба тільки довести, що $A^{m,m} = A^{mm,m}$

$$(\alpha) (A^m)^{m,c} \subset A^{mm,m}, \quad (II)$$

$$(\beta) A^{m,c} \subset A^{mm}, \quad (III)$$

$$A^{mm,m} \subset A^{m,m,c}. \quad (1)$$

Отже:

$$A^{m,m} = A^{mm,m}.$$

$$5) (A \subset B) \cdot \supset \cdot (B^m \subset A^m), \quad (1)$$

$$(B^m \subset A^m) \cdot \supset \cdot A^{mm} \subset B^{mm}. \quad (1)$$

6) Реляції цієї формули впливають безпосередньо з твердження 5-го.

$$7) (A^{m,c})^{m,c} \subset (A^{m,c})^{mm} = A^c, \quad (II), (4).$$

$$8) A^{m,c} \subset A^{mm}, \quad (II)$$

$$A^{mm,m} \subset A^{cmm} \quad (II)$$

$$A^{mm,m,c} \subset A^{cmm,c} = A^{m,c}, \quad (Б) \quad (4).$$

$$9) C^{m,c} \subset C^{mm}, \quad (III)$$

$$O^c = C \subset O^m, \quad (V), (Б)$$

$$O^m = C, \quad (Б)$$

$$10) A^{m,c} \subset A^{mm}, \quad (III)$$

$$A^{m,c} A^{mm,c} = O, \quad (Б)$$

$$A^m + A^{mm} = C, \quad (Б)$$

11) Припустимо, що існує така множина $A \subset C$, для якої $A^{mm} = A^m$. Тоді ми мали б:

$$а) A^{mm} A^{m,c} = O, \quad (Б),$$

$$A^{m,c} = O, \quad (II)$$

$$A^m = C, \quad (Б)$$

$$б) A^m A^{mm,c} = O, \quad (Б)$$

$$A^{m,c} + A^{mm} = C, \quad (Б)$$

$$A^{mm} = C, \quad (II)$$

$$A^{mm,m} = A^m = C^m = O, \quad (4)$$

Суперечність $A^m = O$ і $A^m = C$ доводить, що припущення $A^{mm} = A^m$ неможливе.

12) Припущення $A^m = A$ веде до рівності $A^{mm} = A^m$, яка є суперечна з (11).

VI. ІТЕРАЦІЇ ОПЕРАЦІЙ A^m І A^c

1. Позначимо буквою σ будь-яку скінчену послідовність, членами якої є букви m і c (наприклад: $\sigma_1 = m m c m$, $\sigma_2 = c m c m m m$ і т. д.) Вирішимо такі два питання:

1) Які різні множини A^σ існують у найзагальнішому випадку?

2) Які реляції $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ існують при $\sigma_1 \neq \sigma_2$ і $A^{\sigma_1} \neq A^{\sigma_2}$?

Відповіді на обидва питання дають нижченаведені дві таблиці, де $A \rightarrow B$ пишемо замість $A \subset B$.

$$(T_1) \quad \begin{array}{ccc} & A^{cm} & \\ A^{cmmc} \swarrow & & \searrow A^{mm} \\ & A^{mc} & \end{array} \quad (T_2) \quad \begin{array}{ccc} & A^m & \\ A^{mmc} \swarrow & & \searrow A^{cmm} \\ & A^{cmc} & \end{array}$$

Всі реляції таблиці (T_1) були вже доведені, як формули (7), (8), (II) і (III), для довільної множини $A \subset C$. Таблицю (T_2) одержуємо, підставляючи в першій таблиці A^c замість A .

З доведеної формули (4) виходить, що не існує жодна множина A^c , відмінна від кожної з 8 множин, які містяться в таблицях (T_1) і (T_2) .

2. Наведемо приклад, який покаже, що в загальному випадку множини A , A^c і всі множини, які містяться в (T_1) і (T_2) , є відмінні одна від одної, і що нема між ними інших реляцій $A^{c_1} \subset A^{c_2}$, крім тих, що відмічені в таблицях.

Таким прикладом є множина $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, де:

- A_1 = множина несумірних чисел інтервалу (1,2),
- A_2 = множина дійсних чисел: $3 \leq x < 4$,
- A_3 = множина дійсних чисел: $4 < x < 5$,
- A_4 = множина, єдиним елементом якої є число 6.

VII. ВСЮДИ ЩІЛЬНІ, НІДЕ НЕЩІЛЬНІ І ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ

1. Користуючись лише діями алгебри множин, не можна за допомогою операції A^m визначити поняття похідної A^d . Нехай, наприклад, елементи множини A будуть: число 0 і обернені вартості всіх натуральних чисел. Маємо: $A^d = \{0\}$. Але: $A^m = C$, $A^{cm} = 0$. Ясно, що, повторюючи операцію A^m і виконуючи на одержаних множинах дії алгебри множин, в результаті завжди одержимо або увесь простір, або пусту множину, і ніколи не одержимо множини, єдиним елементом якої є число 0.

Не можна, таким способом, визначити за допомогою операції A^m поняття замкненої і відкритої множин. Але деякі інші основні поняття можна визначити легко за допомогою цієї ж операції.

2. Множину A називають всюди щільною, якщо $A^d = C$. Доведемо таку теорему:

T_2 . Кожна з наступних п'яти реляцій є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була всюди щільна:

- 1) $A^m = 0$, 2) $A^m \subset A$, 3) $A^{mm} = C$, 4) $A^{mmc} = A$, 5) $A^m \subset A^{mm}$.

Доведення:

1) Якщо $A^d = C$, то $A^m = A^{dcd} = C^{cd} = 0^d = 0$.

Треба ще довести, що з умови $A^m = 0$ випливає $A^d = C$.

Маємо:

$$A^m = (A^c A^{dc})^d = (A + A^d)^{cd} = 0.$$

Але

$$(A + A^d)^{dc} \subset (A + A^d)^{cd}, \quad (4d)$$

отже,

$$(A + A^d)^{dc} = (A^d + A^{dd})^c = A^{dc} \subset O,$$

тобто

$$A^{dc} = O, \quad A^d = C.$$

2) Треба тільки довести, що з $A^m \subset A$ випливає:

$$A^m = O.$$

З умови $A^m \subset A$ випливає:

$$A^m \subset A^{mm} \quad (1).$$

Але

$$A^{mc} \subset A^{mm}, \quad (II),$$

отже,

$$A^m + A^{mc} \subset A^{mm},$$

тобто

$$C \subset A^{mm}, \quad A^{mm} = C, \quad A^{mmm} = C^m = O, \quad A^m = O, \quad (4).$$

$$3) \quad \begin{array}{ll} \text{а) } A^{mm} = C & \text{б) } A^m = O \\ A^{mmm} = A^m = C^m = O, \quad (4), \quad (V) & A^{mm} = O^m = C \quad (9) \end{array}$$

$$4) \quad \begin{array}{ll} \text{а) } A^{mmc} \subset A & \text{б) } A^m = O \\ A^m \subset A^{mmcm} = A^{mm}, \quad (1), \quad (IV) & A^{mmc} = O^{mc} = C^c = O \subset A, \quad (9), \quad (V), \\ A^{mc} \subset A^{mme} \quad (III) & \\ C = A^m + A^{mc} \subset A^{mm} \quad (Б) & \\ A^{mm} = C & \\ A^{mmm} = A^m = C^m = O, \quad (4), \quad (V) & \end{array}$$

$$5) \quad A^m \subset A^{mm}$$

$$A^{mc} \subset A^{mm} \quad (III)$$

$$C = A^m + A^{mc} \subset A^{mm}, \quad A^{mm} = C, \quad A^m = A^{mmm} = C^m = O.$$

Доведемо ще теорему, яка робить можливим визначення всюди щільної множини за допомогою зв'язку між похідною і операцією A^m .

Т₃. Кожна з двох реляцій 1) $A^m \subset A^d$ і 2) $A^m \subset A^{d^n}$ (для довільного скінченного натурального числа n) є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була всюди щільна.

Знаком A^{d^n} позначаємо тут n -у похідну множини A .

Доведення:

1) Треба тільки довести, що з умови $A^m \subset A^d$ випливає:

$$A^d = C.$$

Маємо:

$$A^m \subset A^d, \quad A^m A^{dc} = O,$$

тобто

$$A^{dcd} A^{dc} = O.$$

Але

$$A^{ddc} \subset A^{dcd} \quad (4d),$$

отже:

$$\begin{aligned} A^{ddc} A^{dc} &\subset A^{dcd} A^{dc} = O \\ (A^{dd} + A^d)^c &\subset O \quad (Б) \\ A^{ds} &\subset O \quad (IVd) \\ A^d &= C. \end{aligned}$$

2) Маємо

$$A^{dn} \subset A^d \quad (IVd),$$

отже, $A^m \subset A^{dn} \subset A^d$ і задовольняється умова першої частини нашої теореми. Якщо ж $A^m = O$, то очевидно:

$$A^m \subset A^{dn}.$$

3. В евклідових просторах називають множину A ніде нещільною, якщо кожна точка простору є точкою скупчення множини зовнішніх точок множини A , тобто, коли

$$(A^c A^{dc})^d = A^{dcd} = C.$$

Приймаючи умову $A^m = C$ як означення поняття нещільності множини A , можна довести таку теорему:

Кожна з формул:

$$\begin{aligned} 1) A^m &= C, \quad 2) A \subset A^m, \quad 3) A^{mm} = O, \quad 4) A \subset A^{mmc}, \\ 5) A^{mm} &\subset A^m, \quad 6) A^d \subset A^m \quad 7) 8) A^{dn} \subset A^m \end{aligned}$$

є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була ніде нещільна.

Згадуємо доведення цієї теореми, бо воно аналогічне доведенню еквівалентності різних означень поняття всюди щільної множини.

Ми довели, що для жодної множини $A \subset C$ не може бути $A = A^m$ (12). З цього випливає, що жодна множина не може бути одночасно всюди щільною і ніде нещільною.

4. Множину A називають граничною множиною, якщо її відкрите ядро є пусте, тобто якщо:

$$A^{ccc} = (A^c + A^{cd})^c = A A^{cdc} = O.$$

Доведемо, що умова $A A^{cdc} = O$ еквівалентна умові $A^{cm} = O$. Доведемо, насамперед, що умова $A A^{cdc} = O$ еквівалентна умові $A^{cdc} = O$.

З $A A^{cdc} = O$ випливає:

$$\begin{aligned} A^c + A^{cd} &= C \quad (Б), \\ A^d + A^{cdd} &= C^d, \quad (1d), \\ A^{cd} &= C \quad (IVd), \quad (III d), \end{aligned}$$

отже,

$$A^{cdc} = O.$$

Далі:

$$\begin{aligned} A^{cdd} &\subset A^{cd} \quad (IVd) \\ A^{cdc} &\subset A^{cddc} \subset A^{cdcd} = A^{cm}, \quad (4d). \end{aligned}$$

Отже, якщо:

$$A^{cm} = O,$$

то й

$$A^{cdc} = O,$$

З другого боку, з умови $A^{cdc} = O$ випливає:

$$A^{cdcd} = A^{cm} = O$$

Таким чином, ми довели, що умова $A^{cm} = O$ є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була гранична.

Бачимо, що множина A є гранична тоді і тільки тоді, якщо її доповнення є всюди щільне і з теорем (T_2) і (T_3) випливає така теорема:

T_4 . Кожна з наступних формул є достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була граничною множиною:

- 1) $A^{cm} = O$, 2) $A \subset A^{cmc}$, 3) $A^{ctm} = C$, 4) $A \subset A^{ctmc}$,
5) $A^{cm} \subset A^{ctm}$, 6) $A^{cm} \subset A^{cd}$, 7) $A^{cm} \subset A^{cdn}$

(для довільного натурального n).

VIII. ОПЕРАЦІЯ A^m І ЗАМКНЕННЯ МНОЖИНИ A

1. Позначимо знаком A^r замкнення множини A , тобто:

$$A^r = A + A^d.$$

Гаусдорф¹ назвав множину $A^c = A^{rc}$ множиною зовнішніх точок множини A . Ясно, що його означення, в кожному абстрактному просторі, еквівалентне означенню $A^c = A^c A^{dc}$, якими ми тут користувались.

Доведемо, що операція A^m визначається за допомогою A^r і за допомогою A^d однаково побудованими формулами.

T_5 .

Доведення.

$$A^{rcr} = (A + A^d)^c + (A + A^d)^{cd} = A^c A^{dc} + (A^c A^{dc})^d = A^c A^{dc} + A^{dcd}. \quad (T_1)$$

Досить тепер довести, що $A^{dc} \subset A^{dcd}$

$$\begin{aligned} A^{dd} &\subset A^d \quad (IVd) \\ A^{dc} &\subset A^{ddc} \subset A^{dcd}, \quad (B), (4d) \\ A A^{dc} &\subset A^{dcd}, \quad (B), \end{aligned}$$

отже,

$$A^{rcr} = A^{dcd}.$$

2. Деякі властивості операції A^m розглядав уже Гаусдорф (в наведених книгах). Усі вони випливають безпосередньо з аксіом I—V і з виведених з них формул. Наприклад, його теорема про те, що кожна частина ніде нещільної множини є також ніде нещільна, є безпосереднім висновком з теорем (T_4) і (T_5) .

Справді, множина A є ніде нещільна тоді і тільки тоді, коли $A^{mm} = O$. Але з $B \subset A$ випливає $B^{mm} \subset A^{mm} = O$.

¹ Hausdorff: 1) Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 250; 2) Mengenlehre, 1927, стор. 139 (Гаусдорф позначає в першій з цих книг, стор. 251, множину A^m знаком $\mathcal{Q}$).

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

И. Г. СОКОЛОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

1. Пусть $f(x)$ непрерывная на промежутке $[0; 1]$ функция. Ее модуль непрерывности

$$\omega(t) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq t} |f(x_1) - f(x_2)|$$

есть функция, определенная на промежутке $[0; 1]$. Очевидно $\omega(t)$ не убывает, непрерывна, равна нулю при $t=0$ и при $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

$$0 \leq \omega(t_2) - \omega(t_1) \leq \omega(t_2 - t_1). \quad (1)$$

Наоборот, непрерывная функция $\omega(t)$, равная нулю при $t=0$ и удовлетворяющая условию (1), есть модуль непрерывности (самой себя).

2. Обозначим через K_ω , где $\omega(t)$ есть некоторый модуль непрерывности, класс функций, определенных на промежутке $[0; 1]$ удовлетворяющих на этом промежутке условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|). \quad (2)$$

Пусть $B_n[f; x]$ есть полином Бернштейна n -го порядка, построенный для функции $f(x)$

$$B_n[f; x] = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (3)$$

Рассмотрим верхнюю грань

$$E_n = E_n(K_\omega; x) = \sup_{f \in K_\omega} |f(x) - B_n(f; x)| \quad (4)$$

уклонений функций f от их полиномов Бернштейна n -го порядка в точке x , распространенную на класс K_ω . Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Имеет место равенство

$$E_n[K_\omega; x] = \sum_{k=0}^n \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (5)$$

Асимптотическое значение $E_n[K_\omega; x]$ дается следующей теоремой.

Теорема 2.

$$E_n[K_\omega; x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+\infty} \omega_1 \left[|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right] e^{-\frac{t^2}{2}} dt + O \left[\omega \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) \right], \quad (6)$$

где $\omega_1(t) = \omega(t)$ при $0 \leq t \leq 1$, и $\omega_1(t) = 0$ при $t > 1$, α — произвольно малое положительное число.

Остаточный член ε_n понимается в том смысле, что существует некоторая константа C , не зависящая от n , но зависящая от x и α , что

$$|\varepsilon_n| < C \omega \left[\frac{1}{n^{1-\alpha}} \right].$$

Эти теоремы являются обобщением результата, полученного мною ранее для частного случая $\omega(t) = t^\alpha$ [1] и обобщают результаты М. Кац и Попович (см. [6] и [7]).

3. Доказательству теоремы 1-й предположим лемму:

Лемма 1. Если непрерывная функция $f_x(t)$ удовлетворяет условию (2) на промежутке $(0; x)$ и $(x; 1)$ $0 < x < 1$ и в точке x достигает экстремума, то она удовлетворяет условию (2) и на всем промежутке $[0; 1]$. Доказательство этой леммы проводится совершенно так же, как и для частного случая $\omega(t) = t^\alpha$ [2].

Доказательство теоремы 1.

Пусть $f(t) \in K_\omega$. Тогда функция

$$\varphi_x(t) = f(t) - f(x),$$

очевидно, также принадлежит к K_ω и обращается в нуль в точке x . Легко видеть, что

$$f(x) - B_n[f; x] = \varphi_x(x) - B_n[\varphi_x; x]. \quad (7)$$

Следовательно,

$$|f(x) - B_n(f; x)| = |B_n(\varphi_x; x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| \varphi_x \left(\frac{k}{n} \right) - \varphi_x(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

и в силу условия (2)

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \sum_{k=0}^n \omega \left(\left| \frac{k}{n} - x \right| \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (8)$$

С другой стороны, функция $\omega(|t - \omega|)$ удовлетворяет условию (2) на промежутках $[0; x]$ и $[x; 1]$ и в точке x достигает минимума. В силу леммы 1-й $\omega(|t - x|)$ принадлежит к классу K_ω .

Для этой функции в формуле (8) достигается знак равенства и, следовательно, теорема 1-я доказана.

4. Рассмотрим теперь некоторые свойства модуля непрерывности.

Лемма 2. Если $\omega(t)$ есть модуль непрерывности функции $f(x)$ не равной постоянной, то существует такая положительная постоянная H_ω , что для всех δ $[0 \leq \delta \leq 1]$

$$\omega(\delta) \geq H_\omega \delta. \quad (9)$$

Очевидно, достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} > 0.$$

Пусть, наоборот, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = 0$. Тогда существует последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, стремящаяся к нулю, такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n} = 0. \quad (10)$$

Используя неравенство

$$k \cdot \omega(\delta) \geq \omega(k\delta), \quad (10a),$$

справедливое для целого k , получим:

$$\omega(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\left[\frac{1}{\delta_n}\right] \delta_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\delta_n}\right] \omega(\delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(\delta_n)}{\delta_n} = 0.$$

Таким образом, $\omega(\delta)$ тождественный нуль и, следовательно, $f(x) \equiv C$. Эта лемма по существу является небольшим видоизменением известного свойства модуля непрерывности (см. 3).

Лемма 3.

При любых δ_1 и δ_2 ($0 \leq \delta_1 \leq 1$); ($0 \leq \delta_2 \leq 1$) имеем

$$\omega(\delta_1 \delta_2) \geq \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \omega(\delta_2). \quad (11)$$

В самом деле, пусть сначала $\delta_1 = \frac{1}{k}$, где k целое. Тогда в силу (10a) получим:

$$k\omega\left(\frac{1}{k} \cdot \delta_2\right) \geq \omega(\delta_2); \quad \omega\left(\frac{1}{k} \delta_2\right) \geq \frac{1}{k} \omega(\delta_2). \quad (11a)$$

Для произвольного δ_1 возьмем два последовательных целых числа, таких, что

$$\frac{1}{k-1} > \delta_1 > \frac{1}{k}.$$

В силу того, что $\omega(t)$ монотонно не убывает, получим из (11a):

$$\omega(\delta_1 \delta_2) \geq \omega\left(\frac{1}{k} \delta_2\right) \geq \frac{1}{k} \omega(\delta_2) = \delta_1 \omega(\delta_2) \frac{1}{\delta_1 k}, \quad (11b)$$

но $\delta_1 k < 1 + \delta_1 \leq 2$. Следовательно, из (11b) получим (11).

Лемма 4. Если $\frac{k}{n} - x < n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}$, где ε сколь угодно малое положительное число, то

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{e^{-\frac{t_k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} (1 + \alpha_n), \quad (12)$$

где

$$t_k = \frac{k - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \quad (0 < x < 1) \quad (13)$$

и

$$\alpha_n = O(n^{3s-\frac{1}{2}}).$$

Формула (12), справедливая, как известно, для случая $|t_k| < A$ (где A постоянная), справедлива и для нашего случая. Доказательство этой леммы не отличается от доказательства локальной теоремы Лапласа в теории вероятностей (см., напр., Бернштейн. Теория вероятностей, ГТТИ, 1934, стр. 210-213).

Лемма 5. При всех $x(0 < x < 1)$ имеет место оценка

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}} e^{-\left(\frac{t_k}{2}\right)^2}, \quad (14)$$

где t_k определяется формулой (13) и k удовлетворяет обоим неравенствам

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \frac{1}{10} x; \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| < \frac{1}{10} (1-x).$$

Доказательство см. [4].

Лемма 6. Для всех n $0 \leq x \leq 1$ имеем оценку

$$\sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{A_S}{n^S} \quad (15)$$

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| > n^{-\frac{1}{3}},$$

где S любое положительное число и A_S зависит только от S . Доказательство см. [5].

Доказательство теоремы 2.

Сумму, стоящую в правой части формулы (5), представим в виде

$$\sum_{k=0}^n \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}} + \sum_{n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq n^{-\frac{1}{3}}} +$$

$$+ \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > n^{-\frac{1}{3}}} = I_1 + I_2 + I_3, \quad (16)$$

где ε некоторое, сколь угодно малое, положительное число.

Сумма I_1 .

Согласно лемме 4-й имеем:

$$I_1 = \sum_{\substack{n^{\varepsilon} \\ |t_k| < \frac{n^{\varepsilon}}{\sqrt{x(1-x)}}}} \omega\left\{|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} \frac{e^{-\frac{t_k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} (1 + \alpha_n) = \\ = \frac{1 + \beta_n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t^k=A_n}^{B_n} \omega\left\{|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} e^{-\frac{t_k^2}{2}} \Delta t_k, \quad (17)$$

где $\beta_n = O(n^{3\varepsilon - \frac{1}{2}})$; $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$; A_n и B_n числа вида $\frac{k - nx}{\sqrt{nx(1-x)}}$, A_n ближайшее большее, чем $-\frac{n^{\varepsilon}}{\sqrt{x(1-x)}}$, B_n ближайшее меньшее $\frac{n^{\varepsilon}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Положим

$$B'_n = B_n + \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

Очевидно

$$A_n = O(n^{\varepsilon}); \quad B_n = O(n^{\varepsilon}); \quad B'_n = O(n^{\varepsilon}). \quad (18)$$

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t^k=A_n}^{B_n} \omega\left[|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right] e^{-\frac{t_k^2}{2}} \Delta t_k = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n}^{B'_n} \omega\left\{|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Delta_n,$$

где

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t^k=A_n}^{B_n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t_k^2}{2}} - \right. \quad (19)$$

$$\left. - \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right\} dt \quad (20)$$

или, так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n}^{B'_n} \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \\ + \Delta_n + o(e^{-kn^{2\varepsilon}}), \quad (21)$$

то, где k положительная постоянная, $\omega_1(t) = \omega(t)$ при $0 \leq t \leq 1$; $\omega_1(t) = 0$ при $t > 1$. Мы получим в силу леммы 2-й из (19) и (21)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k=A_n}^{B_n} \omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t_k^2}{2}} \Delta t_k = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Delta_n + o\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение Δ_n представим в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k=A_n}^{B_n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) - \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \right] \left(e^{-\frac{t_k^2}{2}} + \right. \\ & \left. + e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{t_k=A_n}^{B_n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(e^{-\frac{t_k^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \left[\omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) + \right. \\ & \left. + \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \right] dt = \Delta'_n + \Delta''_n. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как в области интегрирования $|t_k - t| < \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$, мы получим согласно формуле (1)

$$\left| \omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) - \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

и поэтому

$$\Delta'_n < K_1 \omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (24)$$

С другой стороны, имеем в области интегрирования

$$e^{-\frac{t_k^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_k^2}{2} \right) e^{-\frac{t_k^2}{2}} < \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} |t| e^{-\frac{t_k^2}{2}}$$

и

$$\frac{1}{2} \left\{ \omega\left(|t_k| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) + \omega\left(|t| \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \right\} < \omega\left(\xi \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),$$

где $\xi = \max(|t_k|; |t|)$.

Мы, принимая во внимание формулы (18), легко получим

$$|\Delta''_n| < K_2 \omega(n^{\varepsilon-\frac{1}{2}}) n^{-\frac{1}{2}}$$

($K_2 > 0$ — постоянная) или, используя опять лемму 3-ю,

$$|\Delta''_n| < \frac{K_2}{2} \omega[n^{-1+\varepsilon}]. \quad (25)$$

Замечая, наконец, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1 \left(t \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = O[\omega(n^{-\frac{1}{2}})], \quad (26)$$

из формул (17), (22), (23), (24), (25) и (26) получаем:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1 \left(t \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n^{1-3\varepsilon}}\right)\right]. \quad (27)$$

Сумма I_2 .

Принимая во внимание лемму 5, получим для всех n таких, что

$$n^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{10}x; \quad n^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{10}(1-x)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq n^{-\frac{1}{2}}} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}} \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq n^{-\frac{1}{2}}} \omega\left|\frac{k}{n} - x\right| e^{-\frac{t_k^2}{4}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2nx(1-x)}} \omega(n^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{n^{2\varepsilon}}{4x(1-x)}} \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq n^{-\frac{1}{2}}} 1 < \frac{K_3}{n}, \end{aligned}$$

где K_3 постоянная, зависящая от ε и x . И, согласно лемме 2-й,

$$I_2 < K'_3 \omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (28)$$

Сумма I_3 оценивается непосредственно по лемме 6-й.

$$I_3 = \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > n^{-\frac{1}{2}}} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{C}{n} < D\omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (29)$$

где C и D положительные постоянные.

Из формул (16), (27), (28) и (29) получаем

$$E_n[K_\omega; x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1 \left(t \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n^{1-3\varepsilon}}\right)\right]$$

и так как ε — сколь угодно малое положительное число, то теорема 2-я доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Соколов. — Про наближення функцій, що задовольняють умові Ліпшица поліномами Бернштейна. Наукові записки ЛДУ, том V, вип. 1-й, 1947.
 2. С. М. Никольский. — Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами, Труды матем. Ин-та им. Стеклова, 1945.
 3. Н. И. Ахнезер. — Лекции по теории аппроксимаций, ОГИЗ, 1947.
 4. Г. Лоренц. — К теории полиномов Бернштейна, Матем. сб., т. 2 (44), 3, 1937.
 5. Л. Канторович. — О некоторых разложениях по полиномам Бернштейна, ДАН СССР, 1939, № 21, 22.
 6. М. Кас. — *Studia Mathematica*, t. VII.
 7. М. Кас. — *Studia Mathematica*, t. VIII.
-

А. Н. КОСТОВСКИЙ

КВАДРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ВИДА: $x = \varphi(u), y = \psi(v), z = f(u, v)$

Наиболее полно разработана теория квадратуемости поверхностей вида: $z = f(x, y)$. Весьма существенные и законченные результаты в теории площади этих поверхностей получил И. Я. Верченко в своей докторской диссертации [1]¹.

В 1938 — 1947 гг. А. С. Кованько в работах [2], [3] исследовал квадратуемость некоторых частных видов непрерывных поверхностей, заданных параметрически, а именно: цилиндра, конуса, поверхности переноса и т. д.

Цель настоящей работы — исследовать квадратуемость одного общего класса непрерывных, неспрямляемых поверхностей, заданных параметрически в виде:

$$x = \varphi(u), y = \psi(v), z = f(u, v).$$

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Рассмотрим на координатной плоскости uv произвольный прямоугольник $I_0 = E_{u,v} \{a_1 \leq u \leq b_1; a_2 \leq v \leq b_2\}$ со сторонами, параллельными осям координат.

Пусть на прямоугольнике I_0 заданы три функции

$$\varphi(u, v), \psi(u, v), f(u, v), \quad (1,1)$$

однозначные и непрерывные по совокупности переменных.

Множество точек $E_{x,y,z} \{x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = f(u, v);$

$(u, v) \in I_0\}$ будем называть *непрерывной поверхностью* S , заданную системой уравнений:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = f(u, v); (u, v) \in I_0. \quad (1,2)$$

В дальнейшем, конечно, не предполагается, что поверхность S на прямоугольнике I_0 не имеет двойных точек.

Непрерывную поверхность будем называть *полиэдром* и обозначать через P , если ее можно представить однозначными, непрерывными функциями в виде:

$$P: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v); (u, v) \in I_0 \quad (1,3)$$

¹В квадратных скобках указана литература, помещенная в конце настоящей статьи.

такими, что существует разбиение прямоугольника I_0 на конечное число треугольников¹, не пересекающих друг друга, на каждом из которых все три функции (1,3) — линейны относительно переменных u и v .

Обозначим эти треугольники через $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$.

Множество точек, которое в силу (1,3) соответствует треугольнику $\Delta_i \subset I_0$, будем называть *гранью* полиэдра P и обозначать через p^i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Сумму площадей в смысле элементарной геометрии всех граней полиэдра P будем называть *площадью* полиэдра на I_0 и обозначать символом.

$$L(P; I_0) \text{ или } L(x, y, z; I_0) = \sum_{i=1}^m |p^i|,$$

где $|p^i|$ обозначает площадь грани p^i полиэдра P .

Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют почти всюду в I_0 частные производные, то есть за исключением множества точек меры нуль, соответствующих граням и вершинам полиэдра.

Как известно, площадь полиэдра, заданного системой уравнений (1,3), выражается двойным классическим интегралом:

$$L(P; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv \quad (1,4)$$

Двойной интеграл равенства (1,4), а следовательно, и площадь полиэдра $L(P; I_0)$ не зависят от параметрического представления полиэдральной поверхности P , в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

2. Введем теперь понятие расстояния между двумя непрерывными поверхностями S и S_1 в смысле *Фреше*.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (1,2), а поверхность S_1 уравнениями:

$$x = \varphi_1(\bar{u}, \bar{v}), y = \psi_1(\bar{u}, \bar{v}), z = f_1(\bar{u}, \bar{v}); (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{I}_0. \quad (1,5)$$

Две односвязные области, ограниченные кривыми Жордана, как известно, можно бесчисленным множеством способов топологически² отобразить одну на другую. Пусть

$$T: \bar{u} = \alpha(u, v), \bar{v} = \beta(u, v)$$

есть одно из таких отображений прямоугольника I_0 в $\bar{I}_0$.

Обозначим символом

$$M_T = \max_{(u, v) \in I_0} \{ [\varphi(u, v) - \varphi_1(\alpha(u, v), \beta(u, v))]^2 + [\psi(u, v) - \psi_1(\alpha(u, v), \beta(u, v))]^2 + \\ + [f(u, v) - f_1(\alpha(u, v), \beta(u, v))]^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

¹Здесь не обязательно треугольники, но практически это наиболее удобная фигура, тем более, что всякий многоугольник в плоскости uv можно всегда разбить на треугольники.

²Здесь лучше — „гомеоморфно“.

Точную нижнюю грань величин M_T при всевозможных топологических отображениях T прямоугольника I_0 в $\bar{I}_0$ будем называть *расстоянием* между поверхностями S и S_1 в смысле *Фреше* на I_0 и обозначать символом: $[S, S_1]$
В силу определения расстояния между двумя поверхностями, имеем:

$$\begin{aligned} [S, S_1] &= [S_1, S] \geq 0, [S, S] = 0, \\ [S, S_2] &\leq [S, S_1] + [S_1, S_2]. \end{aligned} \quad (1,6)$$

Будем говорить, что последовательность $\{S_n\}$ непрерывных поверхностей (в частности полиэдров) сходится к поверхности S , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S, S_n] = 0.$$

Пусть $\{P_n\}$ — последовательность полиэдров сходится к поверхности S , заданной системой уравнений (1,2).

$\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, I_0)$ может не существовать, но всегда существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, I_0)$, равный конечному или бесконечному значению.

Определение.

Нижняя грань значений $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, I_0)$ для всевозможных последовательностей полиэдров, сходящихся к поверхности S , т. е. $\inf_{\{P_n\}} \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, I_0)$, называется *площадью* поверхности в смысле *Лебега* и обозначается символом:

$$L(S, I_0) \text{ или } L(f, \varphi, \psi; I_0).$$

Как явствует из определения, площадь поверхности в смысле Лебега есть функция полунепрерывная снизу; площадь не зависит от параметрического представления поверхности S и, если $[S_1, S_2] = 0$, то $L(S_1, I_0) = L(S_2, I_0)$.

Из определения площади поверхности в смысле Лебега немедленно следуют теоремы.

Теорема (I, I)

Пусть последовательность $\{S_n\}$ непрерывных поверхностей, выраженных системой уравнений:

$$x = \varphi_n(u, v), y = \psi_n(u, v), z = f_n(u, v); (u, v) \in I_0, n = 1, 2, 3, \dots$$

сходится к непрерывной поверхности S , заданной системой уравнений (1,2), тогда имеют место следующие неравенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n, I_0) \geq L(S, I_0) \quad (1,7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi_n, \psi_n; I_0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, \varphi, \psi; I_0) \geq L(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (1,8)$$

Теорема (I, II).

Пусть дана непрерывная поверхность S . Тогда существует такая последовательность полиэдров $\{P_n\}$, сходящаяся к поверхности S , что:

$$L(S, I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, I_0).$$

§ 2. ВВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

1. Рассмотрим сначала квадратуемость непрерывных поверхностей вида:

$$x = \varphi(u), y = \psi(v), z = f(u, v); (u, v) \in I_0 = E\{a_1 \leq u \leq b_1; a_2 \leq v \leq b_2\}, \quad (2,1)$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица. Поэтому во всех вспомогательных теоремах §§ 2 — 5 этого раздела мы можем считать, что функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица. Но все же некоторые теоремы из этих параграфов мы докажем для поверхностей с накладыванием более слабых ограничений на функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, чем условие Липшица, а именно:

$$x = \varphi(u), y = \psi(v), z = f(u, v); (u, v) \in I_0, \quad (2,1)$$

где функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — ограниченной вариации соответственно на отрезках $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$.

Определение I.

Будем говорить, что функция $f(u, v)$ *ограниченной вариации* в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на прямоугольнике I_0 если:

- а) почти для каждого значения $\bar{u} \in [a_1, b_1]$ и $\bar{v} \in [a_2, b_2]$ функции $f(\bar{u}, v)$ и $f(u, \bar{v})$ имеют ограниченную вариацию соответственно по переменным $v \in [a_2, b_2]$ и $u \in [a_1, b_1]$. Обозначим эти вариации соответственно через $\bar{V}_{a_2}^{b_2}(f, \bar{u})$ и $\bar{V}_{a_1}^{b_1}(f, \bar{v})$;

$$\int_{a_1}^{b_1} \bar{V}_{a_2}^{b_2}(f, \bar{u}) d\bar{V}(\varphi) < \infty; \int_{a_2}^{b_2} \bar{V}_{a_1}^{b_1}(f, \bar{v}) d\bar{V}(\psi) < \infty,$$

Определение II.

Будем говорить, что функция $f(u, v)$ *абсолютно непрерывна* в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на прямоугольнике I_0 , если:

- а) почти для каждого значения $\bar{u} \in [a_1, b_1]$ и $\bar{v} \in [a_2, b_2]$ функции $f(\bar{u}, v)$ и $f(u, \bar{v})$ — абсолютно непрерывны соответственно по переменным $v \in [a_2, b_2]$ и $u \in [a_1, b_1]$;
б) функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0 относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

2. Поставим в соответствие непрерывной поверхности S , заданной системой уравнений (2,1) на прямоугольнике $I = \{a_1 \leq u \leq \beta_1; a_2 \leq v \leq \beta_2\} \in I_0$ выражения, аналогичные выражениям, введенным в теорию

измерения площади поверхностей вида: $z=f(x,y)$ венгерским математиком З. Гетце в 1916 г.¹

$$G_1(f, \varphi; I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |f(u, \beta_2) - f(u, \alpha_2)| d\overset{u}{V}(\varphi),$$

$$G_2(f, \psi; I) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} |f(\beta_1, v) - f(\alpha_1, v)| d\overset{v}{V}(\psi), \quad (2,2)$$

$$G_3(\psi, \varphi; I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |\psi(\beta_2) - \psi(\alpha_2)| d\overset{u}{V}(\varphi) = |\psi(\beta_2) - \psi(\alpha_2)| \overset{\beta_1}{\alpha_1} V(\varphi),$$

$$G(f, \varphi, \psi; I) = \{[G_1(f, \varphi; I)]^2 + [G_2(f, \psi; I)]^2 + [G_3(\psi, \varphi; I)]^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2,3)$$

Если функции f, φ, ψ фиксированы, то иногда будем писать: $G_1(f, \varphi; I) = G_1(I)$, $G_2(f, \psi; I) = G_2(I)$, $G_3(\psi, \varphi; I) = G_3(I)$,

$$G(f, \varphi, \psi; I) = G_0(I) = G(I).$$

Теорема (2,1).

Для непрерывной поверхности S , заданной системой уравнений (2,1), выражения $G_i(I)$, $i=0,1,2,3$ — есть непрерывные функции прямоугольника $I \in I_0$.

Доказательство.

Доказательство проведем для функции $G_1(f, \varphi; I)$. Функции $f(u, v)$ и $\varphi(u)$ — непрерывны по предположению, следовательно, непрерывна и полная вариация $V(\varphi)$ функции, поэтому для любого положительного числа ε существует такое число $\eta > 0$, что для каждой пары значений $v_1, v_2 \in [\alpha_2, \beta_2]$ и $u_1, u_2 \in [\alpha_1, \beta_1]$ неравенства $|v_2 - v_1| < \eta$ и $|u_2 - u_1| < \eta$ влекут одновременно неравенства

$$|f(u, v_2) - f(u, v_1)| < \varepsilon \quad (2,4)$$

$$\overset{u_2}{\underset{u_1}{V}}(\varphi) < \varepsilon.$$

Обозначим через M — верхнюю грань функции $f(u, v)$ на прямоугольнике I_0 ,

Возьмем теперь произвольный прямоугольник

$$I = E_{u, v} \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \} \in I_0$$

с площадью меньше η , т. е. $|I| < \eta$, тогда или $|\beta_1 - \alpha_1| < \eta$ или $|\beta_2 - \alpha_2| < \eta$. В первом случае, в силу (2,4), имеем:

$$G_1(f, \varphi; I) \leq 2M \cdot \overset{\beta_1}{\underset{\alpha_1}{V}}(\varphi) \leq 2M\varepsilon,$$

¹Гетце. О спрямляемых поверхностях (на венгерском яз.), Math. és term. tud. értesítő, T. 34, стр. 337—354. (1916)

а во втором случае, находим:

$$G_1(f, \varphi; I) < \varepsilon \frac{\beta_1}{\alpha_1} V(\varphi) \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1} V(\varphi) \varepsilon.$$

Так что в обоих случаях неравенство $|I| < \eta$ влечет неравенство $G_1(f, \varphi; I) < \left(2M + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \varepsilon$. В силу произвольности числа ε следует справедливость теоремы.

Доказательство непрерывности функции $G_2(f, \psi; I)$ прямоугольника производится аналогично. Для $G_3(\psi, \varphi; I)$ теорема очевидна.

Наконец, непрерывность функций $G_1(I)$, $G_2(I)$ и $G_3(I)$ в силу (2,3) немедленно влечет непрерывность функции $G(f, \varphi, \psi; I)$ прямоугольника $I \in I_0$.

Обозначим через $I_n = \{I_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ произвольное подразделение прямоугольника $I = E_{u,v} \{\alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2\}$ на более мелкие прямоугольники $I_1, I_2, \dots, I_n$, со сторонами, параллельными осям координат, эти прямоугольники полностью покрывают прямоугольник I и попарно не перекрываются между собой. Обозначим диаметр подразделения I_n (т. е. наибольшую из диагоналей прямоугольников $I_1, I_2, \dots, I_n$) через $\delta(I_n)$.

Введем обозначение:

$$G_i(I_n) = \sum_{k=1}^n G_i(I_k), \quad i=0,1,2,3.$$

Теорема (2,II).

Пусть $I_n = \{I_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ произвольное подразделение прямоугольника $I = E_{u,v} \{\alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2\} \in I_0$, тогда имеют место неравенства:

$$G_i(I) \leq G_i(I_n), \quad i=0,1,2,3. \quad (2,5)$$

Доказательство.

Докажем справедливость теоремы для $G_1(f, \varphi; I)$. Для этого в подразделении I_n продолжим все стороны прямоугольников $I_1, I_2, \dots, I_n$, параллельные координатной оси ou , до пересечения со сторонами прямоугольника I . Пусть эти прямые пересекут стороны прямоугольника I в точках с абсциссами $u_0 = \alpha_1, u_1, u_2, \dots, u_q = \beta_1$. Прямоугольник I подразделится на полосы-прямоугольники

$$J_i = E_{u,v} \{u_i \leq u \leq u_{i-1}; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2\}, \quad i=1,2,\dots,q; \quad I = \sum_{i=1}^q J_i.$$

При этом, некоторые из прямоугольников $I_1, I_2, \dots, I_n$ подразделения I_n подразделяются прямыми, проведенными выше, на более мелкие прямоугольники; обозначим подразделение прямоугольника I_k через $I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, \dots, I_k^{(p_k)}$, где $p_k \geq 1$, причем:

$$I_k = \sum_{j=1}^{p_k} I_k^{(j)}.$$

Если произвольный прямоугольник $\bar{I} \in I_0$ разделить на два прямоугольника $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ прямой, параллельной оси ou , то в силу равенства (2,2), получим:

$$G_1(f, \varphi; \bar{I}_1 + \bar{I}_2) = G_1(f, \varphi; \bar{I}_1) + G_1(f, \varphi; \bar{I}_2), \quad (2,6)$$

если же разделить прямой, параллельной оси ou , то в силу того же равенства, находим:

$$G_1(f, \varphi; \bar{I}_1 + \bar{I}_2) \leq G_1(f, \varphi; \bar{I}_1) + G_1(f, \varphi; \bar{I}_2). \quad (2,7)$$

В силу (2,6), имеем:

$$G_1(f, \varphi; I) = \sum_{i=1}^q G_1(f, \varphi; J_i) \quad (2,8)$$

Каждый из прямоугольников J_k подразделен, в свою очередь, сторонами прямоугольников подразделения I_n , параллельными оси ou , на более мелкие прямоугольники

$$J_k^{(1)}, J_k^{(2)}, \dots, J_k^{(r_k)}, r_k \geq 1.$$

Очевидно, что прямоугольники $J_k^{(1)}, J_k^{(2)}, \dots, J_k^{(r_k)}, k=1, 2, \dots, q$ есть только другое обозначение прямоугольников

$$I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, \dots, I_k^{(r_k)}, k=1, 2, \dots, n; \sum_{k=1}^q r_k = \sum_{k=1}^n p_k.$$

Применяя к каждому из прямоугольников J_k неравенство (2,7), получим:

$$G_1(f, \varphi; J_k) \leq \sum_{j=1}^{r_k} G_1(f, \varphi; J_k^{(j)}), k=1, 2, \dots, q. \quad (2,9)$$

На основании (2,8), (2,9) и последнего замечания, имеем:

$$G_1(f, \varphi; I) \leq \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{r_k} G_1(f, \varphi; J_k^{(j)}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} G_1(f, \varphi; I_k^{(j)}).$$

Наконец, группируя вместе прямоугольники $I_k^{(1)}, I_k^{(2)}, \dots, I_k^{(p_k)}$, составляющие прямоугольник I_k , и, применяя равенство (2,6), получим:

$$G_1(f, \varphi; I) \leq \sum_{k=1}^n G_1(f, \varphi; I_k) = G_1(f, \varphi; I_n).$$

Аналогично производится доказательство неравенства (2,5) для $G_2(f, \psi; I)$, для $G_3(\psi, \varphi; I)$, — оно тривиально.

Применяя затем известное неравенство

$$\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2,10)$$

немедленно получим:

$$G(f, \varphi, \psi; I) \leq G(f, \varphi, \psi; I_n). \quad (2,11)$$

Теорема доказана полностью.

Пусть дана последовательность подразделений $\{I_n\}$ прямоугольника $I \in I_0$ с одним условием, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(I_n) = 0$. Если для каждого k подразделение I_k является продолжением подразделения I_{k-1} , то на основании теоремы (2, II) выражение $G_i(I_n), i=0,1,2,3$ не убывает при возрастании числа подразделений n , следовательно, каждое из выражений $G_i(I_n), i=0,1,2,3$ сходится к своему пределу — конечному или бесконечному, обозначим его соответственно через $H_i(I), i=0,1,2,3$

Теорема (2, III).

Каждая из последовательностей $\{G_1(I_n)\}, \{G_2(I_n)\}, \{G_3(I_n)\}$ и $\{G(I_n)\}$ сходятся соответственно к пределу: $H_1(f, \varphi; I), H_2(f, \psi; I), H_3(\psi, \varphi; I)$ и $H(f, \varphi, \psi; I)$ при $n \rightarrow \infty$ и $\delta(I_n) \rightarrow 0$. Эти пределы не зависят от последовательностей подразделений $\{I_n\}$ [прямоугольника $I \in I_0$] со свойствами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(I_n) = 0.$$

Доказательство.

Будем теперь рассматривать последовательности подразделений, у которых каждое подразделение не обязательно является продолжением предыдущего.

Пусть последовательность $\{I_n\}$ подразделений прямоугольника $I = E_{u,v} \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \}$ такая, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(I_n) = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} G_1(I_n) = H_1(I).$$

Обозначим через $\Phi_n(\bar{u}), \alpha_1 \leq \bar{u} \leq \beta_1$ сумму абсолютных величин приращений функции $f(u, v)$ на отрезках, на которые сечется прямая $u = \bar{u}$ прямоугольниками подразделения I_n .

С одной стороны, имеем:

$$G_1(I_n) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Phi_n(\bar{u}) d\bar{V}_{\alpha_1}(\varphi)$$

для любого $n=1,2,\dots$

С другой стороны, в силу непрерывности функции $f(u, v)$, можем записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(\bar{u}) = \bar{V}_{\alpha_2}^{\beta_2}(f, \bar{u}).$$

Применяя лемму Фату [4, гл. 1, § 12], можем записать в силу двух предыдущих соотношений:

$$H_1(I) \geq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \bar{V}_{\alpha_2}^{\beta_2}(f, \bar{u}) d\bar{V}_{\alpha_1}(\varphi). \quad (2,12)$$

Но для каждого подразделения I прямоугольника $I \in I_0$, имеем очевидно:

$$G_1(I) \leq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V(f, \bar{u}) d\bar{u} d\varphi.$$

Следовательно:

$$\bar{H}_1(I) \leq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V(f, \bar{u}) d\bar{u} d\varphi. \quad (2,13)$$

На основании неравенства (2,12) и (2,13), получаем:

$$H_1(I) = \underline{H}_1(I) = \bar{H}_1(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V(f, \bar{u}) d\bar{u} d\varphi. \quad (2,14)$$

Аналогично получим:

$$H_2(I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V(f, \bar{v}) d\bar{v} d\psi; \quad H_3(I) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} V(\psi) d\bar{u} d\varphi = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V(\psi) d\varphi.$$

Для доказательства справедливости теоремы для $G(f, \varphi, \psi; I)$ необходимо предварительно установить некоторые неравенства.

В силу (2,3) имеем:

$$\left. \begin{aligned} G_1(I) &\leq \\ G_2(I) &\leq \\ G_3(I) &\leq \end{aligned} \right\} G(I) \leq G_1(I) + G_2(I) + G_3(I).$$

Отсюда для любого подразделения I прямоугольника I_0 , находим

$$\left. \begin{aligned} G_1(I) &\leq \\ G_2(I) &\leq \\ G_3(I) &\leq \end{aligned} \right\} G(I) \leq G_1(I) + G_2(I) + G_3(I).$$

Переходя к пределу, получим:

$$\left. \begin{aligned} H_1(I_0) &\leq \\ H_2(I_0) &\leq \\ H_3(I_0) &\leq \end{aligned} \right\} H(I_0) \leq \bar{H}(I_0) \leq H_1(I) + H_2(I) + H_3(I). \quad (2,15)$$

Определение.

Вариацией функции $G(I)$ прямоугольника I вдоль отрезка D , параллельного координатной оси ou или ov и принадлежащего прямоугольнику I , будем называть число

$$W_I(G, D) = \lim_{\substack{Q \in I \\ \delta Q \rightarrow 0}} |G(Q)|,$$

где Q семейство прямоугольников из подразделения I_n прямоугольника I , имеющие общие точки с отрезком D , и $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(I_n) = 0$.

Из этого определения следует, что при $\bar{H}(f, \varphi, \psi; I_0) < \infty$ множество отрезков $D \in I_0$, параллельных координатным осям ou и ov , вдоль которых

$$W_{I_0}(G, D) > 0 \quad (2,16)$$

не больше чем счетное множество.

Действительно, множество отрезков D , параллельных осям координат, для которых $W_{I_0}(G, D) > \frac{1}{n}$ не больше, чем $n \cdot \bar{H}(f, \varphi, \psi; I_0) < \infty$. Следовательно, утверждение (2,16) — справедливо.

Переходим теперь к доказательству теоремы (2,1) для выражения $G(f, \varphi, \psi; I)$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем такое подразделение $J = \{J_k\}_{k=1,2,\dots,m}$ прямоугольника

$$I = E_{u,v} \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \} \in I_0,$$

чтобы имело место неравенство:

$$G(f, \varphi, \psi; J) > \bar{H}(f, \varphi, \psi; I) - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2,17)$$

Очевидно, что в силу (2,15) предел $H(f, \varphi, \psi; I)$ существует в случае, когда по крайней мере один из пределов $H_1(f, \varphi; I)$, $H_2(f, \psi; I)$, $H_3(\psi, \varphi; I) = \infty$, и что он тоже равен $+\infty$.

Остается рассмотреть случай, когда $H_i(I) < \infty$, $i=1,2,3$, тогда в силу неравенства (2,15), имеем:

$$\bar{H}(f, \varphi, \psi; I) < \infty. \quad (2,18)$$

Обозначим через $D_1, D_2, \dots, D_r$ все стороны прямоугольников подразделения J , исключая стороны прямоугольника I . В силу непрерывности функции $G(I)$, неравенства (2,18) и замечания, относящегося к неравенству (2,16), можно положить вариацию функции $G(I)$ вдоль каждой из сторон прямоугольников равной нулю [при надлежащем выборе подразделения J].

Отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что для произвольной, конечной системы Q прямоугольников, принадлежащих прямоугольнику I , попарно неперекрывающихся и каждый из которых имеет общие точки со сторонами $D_1, D_2, \dots, D_r$ прямоугольников, неравенство $\delta(Q) < \eta$ влечет неравенство

$$G(f, \varphi, \psi; Q) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2,19)$$

Можно предположить, что η не превышает длины ни одной из сторон $D_1, D_2, \dots, D_r$ прямоугольников подразделения.

Установив это, рассмотрим произвольное подразделение $I = \{I_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ прямоугольника I с одним условием $\delta(I) < \eta$.

Разделим прямоугольники подразделения I на два класса: а) к классу I' отнесем прямоугольники, которые имеют общие точки со сторонами $D_1, D_2, \dots, D_r$ прямоугольников подразделения J . Видоизменив соответственно обозначение в подразделении I , мы всегда можем положить, что класс I' состоит из прямоугольников $I_1, I_2, \dots, I_q$; б) к клас-

су I'' отнесем все остальные прямоугольники подразделения I , очевидно, это будут прямоугольники, каждый из которых целиком принадлежит одному из прямоугольников подразделения J .

Условимся писать: $G(f, \varphi, \psi; (J_i I_k)) = 0$, если $J_i I_k = 0$.

На основании (2,19) можем записать:

$$G(f, \varphi, \psi; I') < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу последнего неравенства и неравенства (2,19) имеем:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q G(J_i I_k) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2,20)$$

где в качестве прямоугольников служат прямоугольники класса I' , разбитые сторонами $D_1, D_2, \dots, D_r$ на более мелкие.

Таким образом, на основании неравенств (2,11), (2,17) и (2,20), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{H}(f, \varphi, \psi; I_0) - \frac{\varepsilon}{3} < G(J) \leq G(I) + \left[\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^q G(J_i I_k) - \sum_{k=1}^q G(I_k) \right] \leq G(I) + \\ + \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство справедливо для каждого подразделения I прямоугольника I с $\delta(I) < \eta$, то:

$$\bar{H}(I) < \underline{H}(I) + \varepsilon.$$

Наконец, в силу произвольности числа ε получаем:

$$H(I) = \bar{H}(I) = \underline{H}(I).$$

Теорема (2,III) доказана полностью.

Теорема (2,IV).

Для того, чтобы выражение $H(f, \varphi, \psi; I)$, соответствующее непрерывной поверхности S , заданной системой уравнений (2,1), имело конечное значение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(u, v)$ была ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, которые по условию также имеют ограниченную вариацию на I_0 .

Из неравенств (2,5) для любого прямоугольника $I \in I_0$ немедленно следует:

$$G_i(I) \leq H_i(I), i = 0, 1, 2, 3. \quad (2,21)$$

§ 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $H_1(I)$, $H_2(I)$, $H_3(I)$ и $H(I)$ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема (3,I).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x = \varphi(u), y = \psi(v), z = f(u, v); (u, v) \in I_0.$$

Если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ ограниченной вариации, а функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли

относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, тогда соответствующие выражения $H_1(f, \varphi; I)$, $H_2(f, \psi; I)$, $H_3(\psi, \varphi; I)$ и $H(f, \varphi, \psi; I)$ есть аддитивные, непрерывные и неотрицательные функции прямоугольника $I \in I_0$ и имеет место равенство:

$$H'_3(u, v) = \left| \frac{D(\psi, \varphi)}{D(u, v)} \right| = |\psi'(u) \cdot \varphi'(v)| \quad (3,1')$$

почти всюду в I_0 .

Если, кроме того, функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, то справедливы почти всюду в I_0 следующие равенства:

$$H'_1(u, v) = \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi'(u) \right|; H'_2(u, v) = \left| \frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \psi'(v) \right|, \quad (3,1)$$

$$H'(u, v) = \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\psi, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi'(u) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \psi'(v) \right]^2 + \left[\varphi'(u) \cdot \psi'(v) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3,2)$$

Доказательство.

Доказательство аддитивности и непрерывности производится очень просто, поэтому мы его опускаем.

Покажем справедливость равенств (3,1).

Пусть прямоугольник $I = E \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \} \in I_0$, тогда для любого значения $u \in [\alpha_1, \beta_1]$, в силу теорем [4; гл. IV, § 7, теор. (7,4) и (7,9)], имеем:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} V(f, u) \geq \int_{\alpha_2}^{\beta_2} V'(f, u) dv = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} dv. \quad (3,3)$$

На основании теоремы Фубини [4; гл. III, § 8, т. (8,1)] получим:

$$H_1(f, \varphi; I) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} V(f, u) dV_{\alpha_1}^u(\varphi) \geq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{\partial f}{\partial v} dv \right] dV_{\alpha_1}^u(\varphi) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{\partial f}{\partial v} \cdot V'_{\alpha_1}(\varphi) du dv.$$

Применяя теорему [4; гл. IV, § 7, т. (7,9)], находим:

$$H_1(f, \varphi; I) \geq \iint_I \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' du dv.$$

Отсюда:

$$H'_1(u, v) \geq \left| \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' \right| \quad (3,4)$$

почти всюду в I .

Пусть $\{J_n\}$ — последовательность интервалов из $[a_2, b_2]$ с рациональными концами. Тогда согласно теорем [4; гл. III, § 8, т. (8,1); гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)] для каждого $n=1,2,\dots$ получим:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (f,u) dV_{\alpha_1}^u(\varphi) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (f,u) |\varphi'| du = H_1(f, \varphi; I) = \iint_I H'_1(u,v) du dv = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} H'_1(u,v) dv \right] du. \end{aligned}$$

Итак, для каждого интервала J_n имеем:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (f,u) |\varphi'| du = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{J_n} H'_1(u,v) dv \right] du.$$

Отсюда:

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} (f,u) |\varphi'| \geq \int_{J_n} H'_1(u,v) dv$$

почти для каждого значения $u \in [a_1, b_1]$.

Пусть E_n — множество всех точек $u \in [a_1, b_1]$, для которых последнее неравенство несправедливо. Положим $E = \sum_{(u)} E_n$; так как $|E_n| = 0$, то и $|E| = 0$. Итак, неравенство

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} (f,u) |\varphi'| \geq \int_J H'_1(u,v) dv$$

выполняется для всех подинтервалов $J \in [a_2, b_2]$ с рациональными концами и для каждой точки $u \in [a_1, b_1]$, исключая точки множества E .

Если теперь рассматривать для каждого значения u , не принадлежащего множеству E , два члена этого неравенства как функции интервала J , то получим посредством дифференцирования по отношению к этому интервалу неравенство, справедливое почти для каждого значения $v \in [a_2, b_2]$.

$$V'(f,u) |\varphi'(u)| = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \cdot |\varphi'(u)| \geq H'_1(u,v). \quad (3,5)$$

Производные $H'_1(u,v)$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$, как известно, есть измеримые функции, поэтому в силу теоремы Фубини [4; гл. III, § 8, т. (8,6)] заключаем, что множество точек (u,v) , где неравенство (3,5) не выполняется, имеет плоскую меру нуль.

Неравенства (3,4) и (3,5) показывают справедливость первого равенства в (3,1), доказательство второго равенства в (3,1) производится аналогично.

Покажем теперь справедливость равенства (3,1'). В этом случае предполагается, что функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ имеют ограниченную вариацию соответственно на (a_1, b_1) и (a_2, b_2) (если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, то справедливость равенства (3,1') следует из теоремы [4; гл. III, § 12, т. (12,1)]).

В силу теорем [4; гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)] можем записать:

$$\int_{a_1}^{\beta_1} V(\varphi) du \geq \int_{a_1}^{\beta_1} V(\varphi) du = \int_{a_1}^{\beta_1} |\varphi'| du; \quad \int_{a_2}^{\beta_2} V(\psi) dv \geq \int_{a_2}^{\beta_2} V(\psi) dv = \int_{a_2}^{\beta_2} |\psi'| dv, \quad (3,6)$$

тогда:

$$\begin{aligned} H_3(I) &= \int_{a_1}^{\beta_1} \int_{a_2}^{\beta_2} V(\psi) dV(\varphi) = \int_{a_1}^{\beta_1} V(\varphi) dV(\psi) \geq \int_{a_1}^{\beta_1} |\varphi'| du \cdot \int_{a_2}^{\beta_2} |\psi'| dv = \\ &= \iint_I |\psi' \varphi'| du dv. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$H'_3(u, v) \geq |\psi'(v) \cdot \varphi'(u)| \quad (3,7)$$

почти всюду в I_0 .

Повторяя дальше рассуждение, аналогичное приведенному выше для $H_1(I)$, получим:

$$H'_3(u, v) \leq |\psi'(v) \cdot \varphi'(u)| \quad (3,8)$$

всюду в I_0 , исключая множество точек $(u, v) \in I_0$ с плоской мерой, равной нулю. Из неравенств (3,7) и (3,8) следует наша теорема.

В силу равенств (3,1), (3,1') и теоремы [4; гл. VI, § 3, т. (3,8)], можем записать:

$$G'_1(u, v) = H'_1(u, v) = \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right|, \quad G'_2(u, v) = H'_2(u, v) = \left| \frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right|$$

$$G'_3(u, v) = H'_3(u, v) = \left| \frac{D(\psi, f)}{D(u, v)} \right|$$

почти всюду в I_0 .

Отсюда на основании теоремы [4; гл. V, § 3, т. (3,8)], равенства (2,3) и определения производной от функции прямоугольника, следует:

$$\begin{aligned} H'(u, v) = G'(u, v) &= \{[G'_1(u, v)]^2 + [G'_2(u, v)]^2 + [G'_3(u, v)]^2\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi'(u) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \psi'(v) \right]^2 + [\psi'(v) \cdot \varphi'(u)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

почти всюду в I_0 .

Теорема (3,1) полностью доказана.

Теорема (3, II).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v), \quad z = f(u, v); \quad (u, v) \in I_0,$$

где $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — функции с ограниченной вариацией.

Тогда:

1) если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f(u, v)$ абсолютно непрерывны, то функция $H(f, \varphi, \psi; I)$ прямоугольника I абсолютно непрерывна на I_0 , и имеет место равенство:

$$\begin{aligned} H(f, \varphi, \psi; I_0) &= \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\psi, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv = \\ &= \iint_I \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \psi' \right]^2 + \left[\psi' \varphi' \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv, \end{aligned} \quad (3,9)$$

2) и обратно, если $H(f, \varphi, \psi; I)$ абсолютно непрерывна, тогда функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, соответственно на $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, а функция $f(u, v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ почти всюду на множестве $(I_0 - E)$, где E — множество точек из I_0 , в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю.

При этом равенство (3,9) остается справедливым.

Доказательство.

Из неравенства (2,15) легко убедиться, что если $H_i(I) \cdot i = 1, 2, 3$ абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывна и функция $H(I)$ прямоугольника I и наоборот.

Докажем первую часть теоремы.

Пусть $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, а функция $f(u, v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, тогда, применяя теоремы [4; гл. III. § 8, т. (8,1); гл. IV, § 7, т. (7,4) и (7,9)], (3,1) для любого прямоугольника $I = E \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1, \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \} \in I_0$, можем записать:

$$\begin{aligned} H_1(f, \varphi; I) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{f(u, v)}{\varphi(u)} \right) du dv = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{f(u, v)}{\varphi(u)} \right) dv \right]_{\alpha_1}^{\beta_1} du = \\ &= \iint_I \left| \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' \right| du dv = \iint_I H'_1(u, v) du dv. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$H_2(f, \psi; I) = \iint_I H'_2(u, v) du dv.$$

Абсолютная непрерывность функции $H_3(\psi, \varphi; I)$ прямоугольника I следует также, например, в силу теоремы [4; гл. III, § 12, т. (12,1)]. Отсюда заключаем, что функции прямоугольника I :

$H_1(f, \varphi; I)$, $H_2(f, \psi; I)$, $H_3(\psi, \varphi; I)$ абсолютно непрерывны, следовательно $H(f, \varphi, \psi; I)$ — также абсолютно непрерывна на I_0 .

Справедливость равенства (3,9) следует в силу теорем (3,1) и [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)].

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Пусть теперь функция $H(f, \varphi, \psi; I)$ — абсолютно непрерывна на I_0 , тогда в силу сделанного замечания функции $H_1(I)$, $H_2(I)$, $H_3(I)$ также абсолютно непрерывны на I_0 .

Согласно теоремам (3,1) [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], для произвольного прямоугольника $I_\xi = E_{u,v} \{a_1 \leq u \leq \xi; a_2 \leq v \leq b_2\}$, где $a_1 \leq \xi \leq b_1$, имеем равенство:

$$H_3(I_\xi) = \int_{a_1}^{\xi} \int_{a_2}^{b_2} H'_3(u, v) du dv = \int_{a_1}^{\xi} \int_{a_2}^{b_2} |\psi' \varphi'| du dv = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'| du \cdot \int_{a_2}^{b_2} |\psi'| dv,$$

Отсюда, в силу (2,14), имеем:

$$\int_{a_1}^{\xi} V(\varphi) \cdot \int_{a_2}^{b_2} V(\psi) = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'| du \cdot \int_{a_2}^{b_2} |\psi'| dv.$$

Из неравенства (3,6) заключаем:

$$\int_{a_1}^{\xi} V(\varphi) = \int_{a_1}^{\xi} |\varphi'| du; \quad \int_{a_2}^{b_2} V(\psi) = \int_{a_2}^{b_2} |\psi'| dv. \quad (3,10)$$

Функция $\psi(v)$ ограниченной вариации, поэтому разность

$$\int_{a_2}^{\eta} V(\psi) - \int_{a_2}^{\eta} |\psi'| dv$$

— неотрицательная и неубывающая функция относительно переменной η , где $a_2 \leq \eta \leq b_2$, это следует из теоремы [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)]. Поэтому

$$\int_{a_2}^{\eta} V(\psi) = \int_{a_2}^{\eta} |\psi'| dv = \int_{a_2}^{\eta} V' dv.$$

Итак, полные вариации $\int_{a_2}^{\eta} V(\psi)$ и $\int_{a_1}^{\xi} V(\varphi)$ абсолютно непрерывны, следовательно, абсолютно непрерывны и сами функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ [4; гл. II, § 12, т. (12,1)].

Остановим наше внимание теперь на доказательстве абсолютной непрерывности функции $f(u, v)$ в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ $\psi(v)$.

Так как $H_1(I)$ абсолютно непрерывна, то по теореме (3,1) и [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], имеем:

$$H_1(I_\xi) = \int_{a_1}^{\xi} \int_{a_2}^{b_2} V(f, u) V' \frac{u}{a_1} du = \int_{a_1}^{\xi} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' \right| dv \right] du.$$

Дифференцируя это равенство по ξ , получим:

$$\int_{a_2}^{b_2} V(f, u) \cdot \frac{u}{a_1} V'(\varphi) = \int_{a_2}^{b_2} V(f, u) \cdot |\varphi'| = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \varphi' \right| dv = |\varphi'| \cdot \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| dv$$

почти для каждого значения $u \in [a_1, b_1]$.

Функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, поэтому $\varphi'(u)$ и $\psi'(v)$ существуют почти всюду в I_0 . Обозначим через A множество точек из $[a_1, b_1]$, где $\varphi'(u) = 0$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\int_{a_2}^{b_2} V(f, u) = \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| dv = \int_{a_2}^{b_2} V'(f, u) dv \quad (3.11)$$

это равенство справедливо, по крайней мере, почти всюду на множестве $\{[a_1, b_1] - A\}$.

Но для каждого значения u , для которого функция $f(u, v)$ имеет ограниченную вариацию по η , разность:

$$\int_{a_2}^{\eta} V(f, u) - \int_{a_2}^{\eta} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| du = \int_{a_2}^{\eta} V(f, u) - \int_{a_2}^{\eta} V'(f, u) dv$$

есть, в силу теоремы [4; гл. IV, § 7, т. (7,4)], неотрицательная, неубывающая функция переменного η .

Следовательно,

$$\int_{a_2}^{\eta} V(f, u) = \int_{a_2}^{\eta} V'(f, u) dv$$

почти для каждого значения $u \in \{[a_1, b_1] - A\}$.

Таким образом, полная вариация $\int_{a_2}^v V(f, u) dv$ — абсолютно непрерывна по переменному v , следовательно, абсолютно непрерывна и сама функция $f(u, v)$ по переменному V для почти каждого значения $u \in \{[a_1, b_1] - A\}$ [4; гл. II, § 12, т. (12,1)].

Посредством аналогичных рассуждений получим, что функция $f(u, v)$ — абсолютно непрерывна по переменному u почти для каждого значения $v \in \{[a_2, b_2] - B\}$, где B — множество точек из $[a_2, b_2]$, в которых $\psi'(v)$ равна нулю. По предположению $f(u, v)$ является функцией ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относитель-

но $\varphi(u)$ и $\psi(v)$; следовательно, функция $f(u,v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, почти для каждой точки $(u,v) \in (I_0 - E)$, где $E = A + B$ есть множество точек из I_0 , в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю.

Наконец, формула (3,9) есть следствие теорем (3,1) и [4; гл. IV, § 7. т. (7,4)].

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

При вычислении площади поверхности обычно используются частные производные функций, входящих в представление поверхности. Цель настоящего параграфа — изложить метод вычисления площади непрерывной поверхности, заданной системой уравнений (2,1), который применим и для случая, когда непрерывная функция $f(u,v)$, не имеет частных производных.

Теорема (4,1).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (2,1) и пусть последовательность произвольных непрерывных функций $\{f_n(u,v)\}$ сходится к функции $f(u,v)$ на I_0 . Тогда всегда имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \geq H(f, \varphi, \psi; I_0) \quad (4,1)$$

Доказательство.

Пусть $I_m = \{I_k\}_{k=1,2,\dots,m}$ — произвольное подразделение прямоугольника I_0 . В силу неравенства (2,21) для непрерывной поверхности S_n , заданной системой уравнений:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v), \quad z = f_n(u,v); \quad (uv) \in I_0,$$

для любого значения индексов n и m , можем записать:

$$H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \geq G(f_n, \varphi, \psi; I_m). \quad (4,2)$$

В силу леммы Фату [4; гл. I, § 12, т. (12,1)], имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(f_n, \varphi, \psi; I_m) \geq G(f, \varphi, \psi; I_m) \quad (4,3)$$

Из неравенств (4,2) и (4,3) выводим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} G(f_n, \varphi, \psi; I_m) \geq G(f, \varphi, \psi; I_m).$$

Последнее неравенство справедливо для любого значения индекса m . Переход к пределу по m дает неравенство (4,1). Теорема полностью доказана.

Теорема (4,II).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений: $x = \varphi(u)$, $y = \psi(v)$, $z = f(u,v)$; $(u,v) \in I_0$. Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица, то имеет место равенство:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) = H(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,4)$$

Доказательство.

Докажем сначала неравенство:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) \geq H(f, \varphi, \psi; I_0).$$

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность гладких поверхностей или безразлично полиэдров сходится к поверхности S на I_0 , где поверхность S_n задана системой уравнений:

$$x = \varphi_n(u), \quad y = \psi_n(v), \quad z = f_n(u, v); \quad (u, v) \in I_0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

причем последовательность выбрана так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi_n, \psi_n; I_0) = L(f, \varphi, \psi; I_0), \quad (4,5)$$

существование которой следует в силу теоремы (1, II).

На основании теоремы (1, I) можем записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi_n, \psi_n; I_0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi, \psi; I_0) \geq L(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,6)$$

Из (4,5) и (4,6) выводим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi, \psi; I_0) = L(f, \varphi, \psi; I_0) \quad (4,7)$$

Функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица по условию теоремы, а функция $f_n(u, v)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных в силу гладкости поверхности S_n , поэтому на основании теоремы Радó Т.¹ имеем:

$$L(f_n, \varphi, \psi; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f_n, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f_n, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv. \quad (4,8)$$

Функции $f_n(u, v)$, $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны; следовательно, в силу теоремы (3, II) можем записать:

$$H(f_n, \varphi, \psi; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f_n, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f_n, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv.$$

Из последнего равенства и равенства (4,8) следует:

$$L(f_n, \varphi, \psi; I_0) = H(f_n, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,9)$$

На основании теоремы (4, I) и равенств (4,7) и (4,9) получаем:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi, \psi; I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \geq H(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,10)$$

Докажем теперь обратное неравенство:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) \leq H(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,11)$$

Если функция $f(u, v)$ неограниченной вариации на прямоугольнике I_0 , то согласно теореме (2, IV) выражение $H(f, \varphi, \psi; I_0) = \infty$, а в этом

¹ Radó T. Über das Flächenmass rectifizirbarer Flächen, Mat. Annalen, vol. 100 (1928), s. 445 — 479, см. [2].

случае неравенство (4,11), очевидно, справедливо. Поэтому естественно предположить, что функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0 , относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Функцию $f(u, v)$ можно продолжить на всю плоскость uv с сохранением свойства непрерывности и ограниченности вариации в обобщенном смысле Тонелли.

В самом деле, пусть I' и I'' — прямоугольники, равные прямоугольнику I и имеющие с ним общие стороны, параллельные оси ou . Функция $f(u, v)$ может быть, очевидно, продолжена на прямоугольники I' и I'' посредством симметричного отображения относительно сторон прямоугольника I , параллельных оси ou .

Обозначим полученный прямоугольник через $R_0 = I' + I_0 + I''$. Поступая аналогично относительно прямоугольника R_0 (прикладываем только равные ему прямоугольники R' и R'' к сторонам, параллельным оси ov), функцию $f(u, v)$ можно продолжить на прямоугольник $Q = R' + R_0 + R''$ без нарушения указанных свойств. Очевидно, что этот процесс можно повторить любое количество раз и покрыть любой наперед заданный прямоугольник. Легко заметить, что $f(u, v)$ будет периодической функцией в отношении u и v .

Рассмотрим теперь функцию:

$$f_n(u, v) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} f(u + \xi, v + \eta) d\xi d\eta. \quad (4,12)$$

Функции $f_n(u, v)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ обладают следующими свойствами:

- а) Последовательность функций $\{f_n(u, v)\}$ сходится равномерно к функции $f(u, v)$ на прямоугольнике I_0 .
- б) Функции $f_n(u, v)$ допускают в I_0 непрерывные частные производные.

Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left[f\left(u + \frac{1}{n}, v + \eta\right) - f(u, v + \eta) \right] d\eta \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left[f\left(u + \xi, v + \frac{1}{n}\right) - f(u + \xi, v) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Функции $f_n(u, v)$, $\varphi(u)$, $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица, поэтому, в силу теоремы (3, II) и теоремы Радо T^1 , находим:

$$\begin{aligned} L(f_n, \varphi, \psi; I_0) &= \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f_n, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f_n, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\psi, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv = \\ &= H(f_n, \varphi, \psi; I_0). \end{aligned} \quad (4,13)$$

¹ Там же, стр. 71.

Следовательно, на основании последнего равенства и теоремы (1, I), имеем:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n, \varphi, \psi; I_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \quad (4, 14)$$

Пусть $I_m = \{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ произвольное подразделение прямоугольника I_0 ; обозначим через $I_m^{(\xi, \eta)}$ прямоугольник, полученный из прямоугольника I путем параллельного сдвига $u' = u + \xi$, $v' = v + \eta$. Аналогично обозначим через $I_m^{(\xi, \eta)}$ подразделение прямоугольника $I_0^{(\xi, \eta)}$, полученное из подразделения $I_m = \{I_k\}_{k=1, \dots, m}$ прямоугольника I_0 , путем вышеуказанного параллельного сдвига каждого из прямоугольников $I_1, I_2, \dots, I_m$.

В силу положительности подинтегрального выражения и теоремы Фубини [4; гл. III. § 8, т. (8, 1)] для любого прямоугольника $I = E_{u, v} \{ \alpha_1 \leq u \leq \beta_1; \alpha_2 \leq v \leq \beta_2 \} \in I_0$ находим:

$$\begin{aligned} G_1(f_n, \varphi; I) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |f_n(u, \beta_2) - f_n(u, \alpha_2)| d^u V(\varphi) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left| n^2 \int_0^1 \int_0^1 [f(u + \xi, \beta_2 + \eta) - \right. \\ &\quad \left. - f(u + \xi, \alpha_2 + \eta)] \cdot d\xi d\eta \right| d^u V(\varphi) \leq n^2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |f(u + \xi, \beta_2 + \eta) - f(u + \xi, \right. \\ &\quad \left. \alpha_2 + \eta)| d^u V(\varphi) \right\} d\xi d\eta = n^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(f, \varphi; I_m^{(\xi, \eta)}) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Применяя к каждому из прямоугольников подразделение I_m последнее неравенство и затем суммируя, получим:

$$\begin{aligned} G_1(f_n, \varphi; I_m) &\leq n^2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{(j, i)=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |f(u + \xi, \beta_i + \eta) - f(u + \right. \\ &\quad \left. + \xi, \alpha_i + \eta)| d^u V(\varphi) \right\} d\xi d\eta = n^2 \int_0^1 \int_0^1 G_1(f, \varphi; I_m^{(\xi, \eta)}) d\xi d\eta. \quad (4, 15) \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство получим для $G_2(f_n \psi; I_m)$.

Применяя известное неравенство

$$\left[\left(\int_E x dt \right)^2 + \left(\int_E y dt \right)^2 + \left(\int_E z dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \int_E (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dt,$$

в силу (4,15) получим:

$$\begin{aligned} G(f_n, \varphi, \psi; I) &= \{[G_1(f_n, \varphi; I)]^2 + [G_2(f_n, \psi; I)]^2 + [G_3(\varphi, \psi; I)]^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \{[G_1(f, \varphi; I^{\xi\eta})]^2 + [G_2(f, \psi; I^{\xi\eta})]^2 + \\ &+ [G_3(\varphi, \psi; I^{\xi\eta})]^2\}^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} G(f, \varphi, \psi; I^{\xi\eta}) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$G(f_n, \varphi, \psi; I_m) \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} G(f, \varphi, \psi; I_m^{\xi\eta}) d\xi d\eta. \quad (4,16)$$

В силу равномерной сходимости функции прямоугольника $G(f, \varphi, \psi; I_m^{\xi\eta})$ к $H(f, \varphi, \psi; I_0^{\xi\eta})$ относительно переменных ξ и η при $m \rightarrow \infty$ [4; гл. V, § 3, т. (3,4)] из неравенства (4,16) имеем:

$$H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} H(f, \varphi, \psi; I_0^{\xi\eta}) d\xi d\eta. \quad (4,17)$$

Площадь фигуры $R = [I_0 - (I_0 \cdot I_0^{\xi\eta})] + [I_0^{\xi\eta} - (I_0 \cdot I_0^{\xi\eta})]$, состоящая из четырех прямоугольников (при соответствующей разбивке) стремится к нулю при $\xi \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$.

Функция $H(f, \varphi, \psi; I_0^{\xi\eta})$ — аддитивная и непрерывная функция прямоугольника (теорема 3,1), следовательно:

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} H(f, \varphi, \psi; I_0^{\xi\eta}) = H(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,18)$$

На основании (4,14), (4,17), и (4,18), получаем:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n, \varphi, \psi; I_0) \leq H(f, \varphi, \psi; I_0). \quad (4,19)$$

Наконец, из неравенств (4,10), (4,19) следует наша теорема.

При $x=u$, $y=v$ из последней теоремы следует известная теорема Радó¹ [4; гл. V, § 7, т. (7,3)], доказанная им для поверхностей вида $z=f(x,y)$.

§ 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Из вышеприведенных исследований квадратируемости непрерывных поверхностей, заданных системой уравнений (2,1), основной результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x=\varphi(u), \quad y=\psi(v), \quad z=f(u,v); \quad (u,v) \in I_0.$$

¹ Radó T. Sur le calcul de l'aire des surfaces, Fundam. Math., vol. 10 (1927) p. 197 — 210.

Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяют условию Липшица на I_0 , то:

а) Для того чтобы поверхность S имела конечную площадь в смысле Лебега, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(u, v)$ была ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли¹, относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ на I_0 .

б) Если это так, то:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) \geq \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv. \quad (5,1)$$

в) Площадь $L(f, \varphi, \psi; I)$ есть тогда непрерывная и аддитивная функция прямоугольника $I \in I_0$ и имеет место почти для каждой точки $(u, v) \in I_0$ равенство:

$$L'(u, v) = \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5,2)$$

г) Если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, а функция $f(u, v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли² относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то площадь поверхности в смысле Лебега $L(S, I)$ абсолютно непрерывна на I_0 и имеет место равенство:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv \quad (5,3)$$

д) И, наоборот, если площадь $L(f, \varphi, \psi; I)$, рассматриваемая как функция прямоугольника $I \in I_0$, абсолютно непрерывна на I_0 , то функция $f(u, v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ почти всюду на множестве $I_0 - E$, где E — множество точек, в которых, по крайней мере, одна из производных $\varphi'(u)$ или $\psi'(v)$ равна нулю, причем формула (5,3) остается справедливой.

Доказательство.

Справедливость утверждения (а) следует из теорем (2, IV) и (4, II).

Справедливость утверждения (б) и (в) следует из теорем (3, I), (4, II) и [4; гл. IV, § 7, т. (7, 4)].

Справедливость утверждения (г) и (д) следует из теорем (3, II) и (4, II).

Из этой теоремы, в частности при $x=u$ и $y=v$, следуют известные результаты Л. Тонелли³ и С. Сакса⁴, полученные ими для поверхностей вида: $z=f(x, y)$.

¹ Там же, см. стр. 56.

² Там же, см. стр. 56.

³ Tonelli L. Sulla quadratura della superficie, Atti Accad. Naz. Lincei, vol. 3 (1926) p. 357—363, 445—450, 633—658. См. [4, гл. V].

⁴ Saks S. Sur l'aire des surfaces $z=f(x, y)$, Acta Litt. Sci. Szeged, 3 (1927), p. 170—176. См. [4, гл. V].

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Выше было проведено исследование квадратуемости непрерывных поверхностей вида S , заданных системой уравнений $(2,1')$ с весьма сильным ограничением, требующим, чтобы функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ удовлетворяли условию Липшица.

Переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда непрерывная поверхность задана системой уравнений $(2,1)$.

Покажем, что если непрерывная поверхность задана системой уравнений $(2,1)$, то среди всевозможных параметрических представлений этой поверхности существует, по крайней мере, такое представление:

$$x = \bar{\varphi}(\bar{u}), \quad y = \bar{\psi}(\bar{v}), \quad z = \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}); \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{I}_0, \quad (6,1)$$

в котором функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, исследование квадратуемости непрерывной поверхности, заданной системой уравнений $(2,1)$, сводится к выше рассмотренному исследованию, проведенному в §§ 1 — 5.

Следующая теорема указывает метод перехода от параметрического представления поверхности, заданной системой уравнений вида $(2,1)$, к представлению вида $(6,1)$. Эта теорема является обобщением результатов, полученных проф. А. С. Кованько для одного частного случая поверхностей [2].

Теорема (6,1).

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x = \varphi(u); \quad y = \psi(v), \quad z = f(u, v); \quad (u, v) \in I_0.$$

Тогда, если функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ имеют ограниченную вариацию на I_0 , после замены переменных u и v по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \overset{u}{V}(\varphi) + u = \alpha(u) \\ \bar{v} &= \overset{v}{V}(\psi) + v = \beta(v), \end{aligned} \quad (6,2)$$

где $\overset{u}{V}(\varphi)$ и $\overset{v}{V}(\psi)$ — полные вариации функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, получим новое параметрическое представление $(6,1)$ поверхности S , в котором функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица.

Доказательство.

Вариации $\overset{u}{V}(\varphi)$ и $\overset{v}{V}(\psi)$ функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ есть непрерывные, неотрицательные и неубывающие функции, следовательно, $\alpha(u)$ и $\beta(v)$ есть однозначные, непрерывные и возрастающие функции соответственно

по переменным u и v , поэтому такими свойствами будут обладать и им обратные функции $\lambda(\bar{u})$ и $\mu(\bar{v})$. Тогда

$$\begin{aligned} u &= \lambda(\bar{u}) \\ v &= \mu(\bar{v}) \end{aligned} \quad (6,3)$$

будут определены на конечных отрезках $[\alpha(a_1), \alpha(b_1)]$ и $[\beta(a_2), \beta(b_2)]$.

Покажем теперь, что функции $\varphi(\bar{u})$ и $\psi(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица. Действительно, пусть u_1 и u_2 два какие-нибудь значения u , а $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ — соответствующие им значения $\bar{u}$. Очевидно, если $u_1 > u_2$, то и $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$.

На основании (6,2) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 &= u_1 - u_2 + \left| \frac{u_1}{V(\varphi)} - \frac{u_2}{V(\varphi)} \right| \geq \left[\frac{u_1}{V(\varphi)} - \frac{u_2}{V(\varphi)} \right] = \frac{u_1 - u_2}{V(\varphi)} \geq \\ &\geq [\varphi(u_1) - \varphi(u_2)] = [\varphi(\lambda(\bar{u}_1)) - \varphi(\lambda(\bar{u}_2))]. \end{aligned}$$

Отсюда в общем виде получим:

$$|\varphi(\lambda(\bar{u}_1)) - \varphi(\lambda(\bar{u}_2))| \leq |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|.$$

Аналогично:

$$|\psi(\mu(\bar{v}_1)) - \psi(\mu(\bar{v}_2))| \leq |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|.$$

Теорема доказана полностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений (2,1). Возникает вопрос: что можно сказать о площади поверхности S в смысле Лебега в ее первоначальном параметрическом представлении (2,1), т. е. до сведения задания этой поверхности к виду (6,1).

На этот вопрос дает ответ следующая теорема, которую можно считать основным результатом настоящей работы:

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v), \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in I_0.$$

Тогда:

а) Если функции $\varphi(u)$, $\psi(v)$ ограниченной вариации, а функция $f(u, v)$ — ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то площадь поверхности S в смысле Лебега конечна.

б) Если площадь поверхности в смысле Лебега конечна, а функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ ограниченной вариации, то функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли на I_0 относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Доказательство.

Функции $\alpha(u)$, $\beta(v)$ и им обратные функции $\lambda(\bar{u})$, $\mu(\bar{v})$ являются однозначными, непрерывными и возрастающими, поэтому легко усмо-

треть, что свойство ограниченности вариации функции $f(u, v)$ в обобщенном смысле Тонелли — инвариантно относительно преобразования переменных с помощью формул (6,2) или (6,3). Отсюда в силу основной теоремы § 5 следует наша теорема.

В заключение докажем еще одну теорему.

Теорема.

Пусть непрерывная поверхность S задана системой уравнений

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v), \quad z = f(u, v); \quad (u, v) \in I_0.$$

Где функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны, а функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Пусть (6,1) есть параметрическое представление этой поверхности S , полученное преобразованием переменных посредством формул (6,2).

Тогда, если функция $\bar{f}(\bar{u}, \bar{v})$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ на $\bar{I}_0$, функция $f(u, v)$ — абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, и имеет место равенство:

$$L(f, \varphi, \psi; I_0) = \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv. \quad (7,1)$$

Доказательство.

В силу теоремы (6,1) функции $\bar{\varphi}(\bar{u})$ и $\bar{\psi}(\bar{v})$ удовлетворяют условию Липшица, а значит, абсолютно непрерывны. Применяя основную теорему § 5 и принимая во внимание, что площадь в смысле Лебега не зависит от параметрического представления поверхности, можем записать:

$$\begin{aligned} L(f, \varphi, \psi; I_0) &= L(\bar{f}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}; \bar{I}_0) = \iint_{\bar{I}_0} \left\{ \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\varphi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{D(\bar{\varphi}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\bar{u} d\bar{v}. \end{aligned} \quad (7,2)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\varphi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{\varphi}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &\left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{d\bar{u}} \cdot \frac{dv}{d\bar{v}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{d\bar{u}}{du} \cdot \frac{d\bar{v}}{dv}} = \\
 &= \frac{\left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\alpha'(u) \cdot \beta'(v)} \quad (7,3)
 \end{aligned}$$

Функция $\bar{f}(\bar{u}, \bar{v})$ абсолютно непрерывна по предположению, а функции $\alpha(u), \beta(v)$ — абсолютно непрерывны, так как функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — абсолютно непрерывны, а значит абсолютно непрерывны и их вариации $\overset{u}{a_1} \overset{v}{a_2} V(\varphi) V(\psi)$. Функции $\alpha(u)$ и $\beta(v)$ дают гомеоморфные преобразования переменных и возрастают. Используем теперь теорему [2, стр. 39]:

„Пусть $F(\bar{u}, \bar{v})$ есть функция, определенная на прямоугольнике $\bar{I}_0$, и пусть $\bar{u} = \alpha(u)$ и $\bar{v} = \beta(v)$ суть гомеоморфные преобразования переменных $\bar{u}$ и $\bar{v}$, такие, что α и β — абсолютно непрерывны и возрастают. Пусть I_0 — прямоугольник, в который преобразуется прямоугольник $\bar{I}_0$. Если $F(\bar{u}, \bar{v})$ суммируема в $\bar{I}_0$, а $[F(\alpha(u), \beta(v)) \cdot \alpha'(u) \beta'(v)]$ суммируема в I_0 , то:

$$\iint_{\bar{I}_0} F(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v} = \iint_{I_0} F(\alpha(u), \beta(v)) \alpha'(u) \beta'(v) du dv. \quad (7,4)$$

Положим:

$$F(\bar{u}, \bar{v}) = \left\{ \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\varphi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{\varphi}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда на основании (7,3) имеем:

$$F(\alpha(u), \beta(v)) \alpha'(u) \beta'(v) = \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7,5)$$

В силу основной теоремы § 5 функция $F(\bar{u}, \bar{v})$ суммируема. Из равенств (7,4) и (7,5) находим:

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\bar{I}_0} \left\{ \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\varphi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{f}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 + \left[\frac{D(\bar{\varphi}, \bar{\psi})}{D(\bar{u}, \bar{v})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\bar{u} d\bar{v} = \\
 &= \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} du dv. \quad (7,5)
 \end{aligned}$$

Покажем суммируемость функции $\left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, но суммируемость этой функции очевидна из неравенства

$$\begin{aligned} \iint_{I_0} \left\{ \left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dudv &\leq \iint_{I_0} \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| dudv + \\ &+ \iint_{I_0} \left| \frac{D(f, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv + \iint_{I_0} \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} V(f, u) dV(\varphi) + \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} V(f, v) dV(\psi) + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} V(\psi) dV(\varphi), \end{aligned}$$

где три интеграла правой части конечны, так как по предположению функция $f(u, v)$ ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, а функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ абсолютно непрерывны и, значит, ограниченной вариации. Из равенства (7,2) и (7,6) следует равенство (7,1) теоремы.

Докажем теперь абсолютную непрерывность функции $f(u, v)$. Для этого воспользуемся теоремой.¹

„Пусть абсолютно непрерывная функция $\bar{u} = \alpha(u)$, $u \in [a_1, b_1]$ существенно возрастает. Если $f(u)$ абсолютно непрерывна на $[\alpha(a_1), \alpha(b_1)]$, то $f(\alpha(u))$ — абсолютно непрерывна на $[a_1, b_1]$ “.

Функция $\bar{f}(\bar{u}, v)$ абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(\bar{u})$ и $\psi(v)$ по предположению. Поэтому в силу цитированной теоремы почти для каждого значения $v = \mu(v)$ функция $f(u, v) = \bar{f}(\alpha(u), \beta(v))$ абсолютно непрерывна по переменному $u \in [a_1, b_1]$. Аналогично функция $f(u, v) = \bar{f}(\alpha(u), \beta(v))$ абсолютно непрерывна по переменному v , почти для каждого значения $u = \lambda(u)$. Так как функция $f(u, v)$ — ограниченной вариации в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$, то она абсолютно непрерывна в обобщенном смысле Тонелли относительно $\varphi(u)$ и $\psi(v)$.

Теорема доказана полностью.

За постановку задачи, постоянный интерес к моей работе и многочисленные указания, имевшие для меня неоценимое значение, я глубоко благодарю моего руководителя профессора Александра Сергеевича Кованько.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верченко И. Я. — Исследования по теории площади поверхности (диссертация), Москва, 1949.
2. Кованько А. С. — Об одном прямом методе исследования некоторых квадратуемых поверхностей, НИИММ, Томск, т. 11, вып. 1, 1938.
3. Кованько А. С. — Про квадратуальність деяких окремих видів поверхонь в сенсі Лебега, Наукові записки ЛДУ, т. V, в. 1-й, 1947.
4. Сакс С. — Теория интеграла, Изд. ин. лит., Москва, 1949.

¹ Натансон И. П. Основы теории функций вещ. перем. Ленинград, 1941.

Т. Я. ЗАГОРСКИЙ
ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЛИПТИКО-
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1.

Краевые задачи для параболически вырожденных уравнений впервые подробно рассматривал Н. С. Пискунов [1,2]. Им рассмотрена первая краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + c \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f,$$

где все коэффициенты и начальные данные непрерывны и имеют производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам y_i и x .

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\left(x, t, y_1, \dots, y_m, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right) \quad (1,1)$$

с условиями:

$$\left. \begin{aligned} z &= f(t, y_1, \dots, y_m) & \text{при } x=0 \\ z &= \varphi(t, y_1, \dots, y_m) & \text{при } x=1 \\ z &= \psi(x, y_1, \dots, y_m) & \text{при } t=0 \end{aligned} \right\} \quad (1,2)$$

$$f(0, y_1, \dots, y_m) = \varphi(0, y_1, \dots, y_m) = \psi(0, y_1, \dots, y_m) = \psi(1, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

Функция F удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывна в области $D \left(\begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq T \end{matrix} \right)$;

в) аналитична по каждому из остальных своих аргументов при

$$|y_i| \leq R, \quad |z| \leq N, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y_i} \right| \leq N.$$

Функции f , φ и ψ , входящие в условия (1,2), а также f'_i , φ'_i и ψ''_{xx} также непрерывны в области D и аналитичны по y_i при $|y_i| \leq R$.

Н. С. Пискунов пользовался в своей работе методом конечных разностей.

В настоящей работе задача приводится к интегро-дифференциальному уравнению, которое решается по методу последовательных приближений.

§ 2.

Краевую задачу (1,1) (1,2) можно легко привести к краевой задаче с нулевыми начальными данными.

Сделаем подстановку

$$u = u + x \varphi(t, y_1, \dots, y_m) + (1-x) f(t, y_1, \dots, y_m) + (1-t) \psi(x, y_1, \dots, y_m),$$

которая приводит к уравнению для u вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_1 \left(x, t, y_1, \dots, y_m; u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_m} \right) \quad (2,1)$$

и условиям:

$$u=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad t=0, \quad x=1. \quad (2,2)$$

Причем F_1 непрерывна по x и t в области D и удовлетворяет условию (в) при $|y_i| \leq R$ и $|u| \leq L$; $\left| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right| \leq L$.

Для удобства записи будем часто писать p_i , вместо $\frac{\partial u}{\partial y_i}$, и r , вместо u .

Через K будем обозначать $\max \left| \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|$ в области D , при $|p_i| < N$ и $|y_i| \leq R$.

Из общей теории уравнения теплопроводности известно, что решение уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \pi(x, t)$$

с нулевыми начальными и предельными условиями может быть выражено в виде

$$z = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \pi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $G(x, t; \xi, \tau)$ есть так называемая функция Грина, положительная внутри области D и равная

$$G(x, t; \xi, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2 \pi^2 (t-\tau)} \sin i \pi x \sin i \pi \xi. \quad (2,3)$$

Используя эту функцию, можно краевую задачу (2,1) (2,2) записать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$u = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) F_1 \left(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_m} \right) d\xi d\tau, \quad (2,4)$$

которое будем решать по методу последовательных приближений.

Составим последовательность

$$u_0 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) F_1(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0) d\xi d\tau \quad (2,5)$$

$$u_n = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) F_1\left(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_m}\right) d\xi d\tau$$

и докажем равномерную сходимость этой последовательности и последовательности частных производных $\frac{\partial u_n}{\partial y_i}$.

Прежде всего установим одно важное соотношение для функции Грина.

Докажем, что

$$\int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) G(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1) d\xi = G(x, t; \xi_1, \tau_1), \quad (2,6)$$

для чего используем разложения (2,3)

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2 \pi^2 (t-\tau)} \sin i \pi \xi \sin i \pi x \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 (\tau-\tau_1)} \sin k \pi \xi \sin k \pi \xi_1 \right) d\xi = \\ = 2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2 \pi^2 (t-\tau_1)} \sin i \pi x \sin i \pi \xi_1 = G(x, t; \xi_1, \tau_1). \end{aligned}$$

При помощи последовательных вычитаний последовательность (2,5) преобразуем в последовательность

$$u_0 = v_0 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) F(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) d\xi d\tau$$

$$v_n = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_0} v_{n-1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_m} q_m n \right\} d\xi d\tau.$$

Здесь через v_n обозначена разность $u_n - u_{n-1}$, через q_n разность $\frac{\partial u_n}{\partial y_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_i}$.

Черта над $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ означает, что производные взяты при некоторых средних значениях аргументов, в соответствии с теоремой о среднем значении.

Перейдем теперь к оценке v_n и $q_i = \frac{\partial v_n}{\partial y_i}$.

Так как $F(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, 0, 0)$ есть аналитическая функция y_i в круге $|y_i| \leq R$, то функции

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)} \quad \text{и} \quad \frac{M}{R \left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_i|}{R}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)}$$

будут соответственно не меньше, нежели

$$|F_1(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0)| \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial F_1(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0)}{\partial y_i} \right|.$$

Через M мы обозначили $\max |F(\xi, \tau, y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)|$ в D при $|y_i| \leq R$. Теперь из первого из уравнений (2,5) получим

$$|v_0| \leq \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \frac{M}{\left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)} d\xi d\tau.$$

$$\left| \frac{\partial v_0}{\partial y_i} \right| \leq \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \frac{M}{R \left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_i|}{R}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)} d\xi d\tau.$$

Если принять обозначение $\int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau = H$, то можно написать

$$\max \left\{ |v_0|, \left| \frac{\partial v_0}{\partial y_i} \right| \right\} \leq \frac{M}{R \left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_i|}{R}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)} \times$$

$$\times \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau \leq \frac{MH}{R \left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_i|}{R}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)}, \quad (2,8)$$

Перейдем к оценке следующих приближений:

$$v_1 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ \frac{\partial F}{\partial P_0} v_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial P_m} q_{m0} \right\} d\xi d\tau. \quad (2,9)$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial P_i}$ суть аналитические функции от y_i , модуль максимум которых равен K , то мажорируем их при помощи функций

$$\frac{K}{\left(1 - \frac{|y_1|}{R}\right) \dots \left(1 - \frac{|y_m|}{R}\right)}.$$

Будем в дальнейшем писать $\left| \frac{y_i}{R} \right| = r$ и для выражения в фигурных скобках (2,9) получим мажорацию в виде

$$\frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3 \dots (1-r_m)^3} \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau$$

и, следовательно,

$$|v_1| \leq \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \int_0^t \int_0^1 G(\xi, t; \xi_1, \tau_1) \frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3 \dots (1-r_m)^3} d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau.$$

Применим теперь соотношение (2,6)

$$|v_1| \leq \frac{(m+1)MK}{R(1-r_1)^3 \dots (1-r_m)^3} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G(x, t; \xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 d\tau \leq \frac{(m+1)MKHt}{R^2(1-r_1)^3 \dots (1-r_m)^3}.$$

Для $\frac{\partial v_i}{\partial y_i}$ получим оценку:

$$\left| \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right| \leq \frac{3(m+1)MKHt}{R^2(1-r_1)^3 \dots (1-r_i)^4 \dots (1-r_m)^3}.$$

Оценим теперь v_2

$$v_2 = \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial P_0} v_1 + \dots + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial P_n} \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \right\} d\xi d\tau \quad (2,10)$$

Так же, как и выше, для фигурной скобки получим мажорацию

$$\frac{3(m+1)^2 MK^2}{R^2(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G(x, t; \xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 d\tau$$

$$и |v_2| \leq \frac{3(m+1)^2 MK^2}{R^2(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G(x, \tau; \xi, \tau) G(\xi, \tau; \xi_2, \tau_2) \times$$

$$\times d\xi_2 d\tau_2 d\tau_1 d\xi d\tau \leq \frac{3(m+1)^2 K^2 M t^2 H}{2! R^2(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5}$$

и для $\frac{\partial v_2}{\partial y_i}$ получим оценку:

$$\left| \frac{\partial v_2}{\partial y_i} \right| \leq \frac{3.5 \cdot (m+1)^2 K^2 t^2 H M}{2! R^3 (1-r_1)^5 \dots (1-r_i)^6 \dots (1-r_m)^5}$$

Очевидно, для v_n имеем

$$v_n \leq \frac{3.5 \dots (2n-1) K^n t^n M H (m+1)^n}{R^n n! (1-r_1)^{2n+1} \dots (1-r_m)^{2n+1}} \quad (2,11)$$

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right| \leq \frac{3.5 \dots (2n+1) K^n t^n M H (m+1)^n}{R^{n+1} n! (1-r_1)^{2n+1} \dots (1-r_m)^{2n+1}},$$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y_i}$ будут сходиться абсолютно и равномерно при условии

$$\frac{2kt(m+1)}{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2} < 1, \quad (2,12)$$

что, очевидно, будет выполняться при достаточно малом T , именно при

$$T < \frac{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2}{2k(m+1)}. \quad (2,13)$$

Необходимо еще убедиться в том, что в процессе последовательных приближений не нарушалось условие

$$|v_n| \leq z; \quad \left| \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right| \leq L;$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3.5 \dots (2n+1) k^n t^n (m+1)^n}{n! R^{n+1} (1-r_1)^{2n+1} \dots (1-r_m)^{2n+1}} <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} k^n t^n (m+1)^n M H}{R^{n+1} (1-r_1)^{2n+1} \dots (1-r_m)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{3 M H}{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2 \left[1 - \frac{3kt(m+1)}{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2} \right]}$$

Здесь принимаем, что

$$\frac{3kt(m+1)}{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2} < 1.$$

Так как $H \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$, то, взяв достаточно малый интервал T , можно сделать сумму $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right|$ сколь угодно малой и значит и менее L ;

но

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right| \geq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y_i} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial (u_n - u_{n-1})}{\partial y_i} \right| = \left| \frac{\partial u_n}{\partial y_i} \right|,$$

следовательно, существует такой достаточно малый интервал T , в котором рассмотренные ряды сходятся абсолютно и равномерно и выполняется условие

$$|u_n| < L; \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial y_i} \right| \leq L.$$

В силу равномерной сходимости последовательности u_n и $\frac{\partial u_n}{\partial y_i}$ можно утверждать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ является решением исследуемой краевой задачи.

Докажем теперь, что не существует других решений, аналитических по y_i . Допустим, что существуют два решения задачи (2,1) (2,2) u_1 и u_2 .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} W = u_1 - u_2 &= \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ F_1(\xi_1, \tau_1, y_1, \dots, y_m, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial y_m}) - \right. \\ &\quad \left. - F_1(\xi_1, \tau_1, y_1, \dots, y_m, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_2}{\partial y_m}) \right\} d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_0}(W) + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_m} \frac{\partial (W)}{\partial y_m} \right\} d\xi d\tau \end{aligned} \quad (3,1)$$

Так как по предположению W и $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ являются аналитическими функциями y_i в круге $|y_i| \leq R$, то для них можно написать мажорантную функцию в виде $\frac{M}{R(1-r_1) \dots (1-r_1) \dots (1-r_m)}$, и точно так же, как в предыдущем параграфе, для W и $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ получим оценку

$$\left\{ |W|, \left| \frac{\partial W}{\partial y_i} \right| \right\} \leq \frac{3MKH(m+1)}{R(1-r_1)^4 \dots (1-r_i)^4 \dots (1-r_m)^4}. \quad (3,2)$$

Подставим эти оценки в правую часть (3,1), мы получим для W оценку

$$\begin{aligned} |W| &\leq \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi, \tau) \int_0^t \int_0^1 G(\xi, \tau; \xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \times \\ &\quad \times \frac{3MK^2(m+1)^2}{R(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 G(x, t; \xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 dt \frac{3MK^2(m+1)^2}{R(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3MK^2(m+1)^2 Ht}{R(1-r_1)^5 \dots (1-r_m)^5}$$

и $\left| \frac{\partial W}{\partial y} \right| \leqslant \frac{3.5 MK^2(m+1)^2 Ht}{R^2(1-r_1)^6 \dots (1-r_m)^6}$

и после n таких шагов

$$W \leqslant \frac{3.5 \dots (2n-1)(m+1)^n k^n t^n H}{R^n(1-r_1)^{2n+1} \dots (1-r_m)^{2n+1}},$$

но при $t < \frac{R(1-r_1)^2 \dots (1-r_m)^2}{2k(m+1)}$ [см. условие (2,18)]

правая часть предпоследнего неравенства стремится к нулю, то есть

$$W = 0, \quad u_1 = u_2$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. — Solution du premier probleme aux limites pour l'equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial t} + qu + f$. Мат. сб., т. 1 (43), № 6, 1936.
2. Пискунов Н. С. — Краевые задачи для уравнений эллиптикопараболического типа. Мат. сб., т. 7 (49), № 3, 1940.

Г. Л. БУЙМОЛА

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧНІСТЬ ВИМІРУ ГРАФІЧНО ЗАДАНИХ ВІДРІЗКІВ ТА КУТІВ

I.

Мова йтиме про вимірювання відрізків та кутів у площині рисунка.

Тому ми припускаємо, що існує таке поле рисунка (аркуш рисувального паперу), в межах якого вкладаються всі наші геометричні побудови. Це поле рисунка ми приймаємо за звичайну евклідову площину з основними геометричними образами в ній і будемо називати його „*площиною*“.

Отже, ми виходимо з умови існування звичайної евклідової площини.

Крім цього, в тій же „*площині*“ ми констатуємо існування геометричних образів, що відрізняються від звичайних так званих геометричних точок і прямих евклідової площини, які ми також будемо називати *точками* і *прямими*. Це сліди дотику олівця чи уколу ніжки циркуля, що залишаються на папері у вигляді плям чи кружечків і смужок, які ми проводимо на рисунку олівцем чи пером рейсфедера і вважаємо їх за „*прямі*“.

Щоб простежити, як впливають розміри цих плям і смужок („точок“ і „прямих“) на точність геометричних побудов в „*площині*“ рисунка, ми вводимо ряд погоджень:

1. Кожній точці A звичайної евклідової площини, що розглядаємо, відповідає коло (пляма) сталого діаметра $2\omega_2$ з центром у цій точці (рис. 1-й).

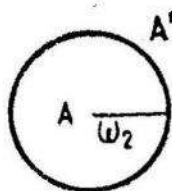


Рис. 1.

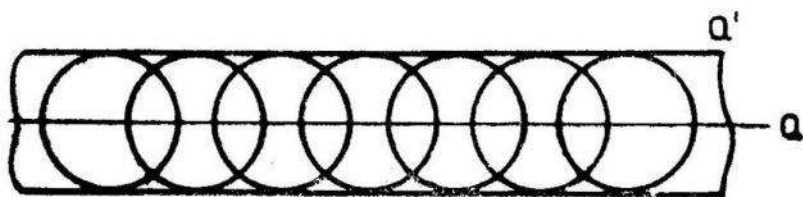


Рис. 2.

Будемо називати кожне таке коло терміном *точка*, взятим в лапки: „точка“ A . Точки, центри яких не зливаються, будемо вважати різними. Це погодження встановлює взаємно однозначну відповідність між новими „точками“ і старими точками.

2. Смужку, обмежену двома паралельними прямими, які являють собою обгортку сім'ї кіл радіуса ω_1 з центрами, що лежать на прямій a , назвемо „*прямою*“ a' (рис. 2-й).

- Кожній смужці a' , ширини $2\omega_1$ відповідає пряма a , що є середньою лінією цієї смужки. Відповідність ця взаємно однозначна.
3. Будемо говорити, що „точка“ абсолютно інцидентна „прямій“, якщо інцидентні відповідні їм звичайні точка і пряма, тобто, якщо центр кола, що приймаємо за „точку“, інцидентний середній лінії смужки, яку приймаємо за „пряму“.
 4. Будемо говорити також, що „точка“ A_2' лежить „між“ двома другими „точками“ A_1' і A_3' , якщо точка A_2 лежить „між“ точками A_1 і A_3 в звичайному розумінні цього слова.
 5. Під „рухом“ у новій системі об'єктів будемо розуміти рух у звичайній евклідовій площині, що переводить „точку“ в „точку“, „пряму“ в „пряму“.

При практичному здійсненні в площині рисунка геометричних побудов, користуючись такими натуральними „точками“ та „прямими“, ми під впливом багатьох причин об'єктивного і суб'єктивного характеру робимо ряд помилок, що впливають на точність виконання рисунка в цілому.

Тому, в першу чергу, я ставлю своїм завданням встановити і вивчити *первинні помилки*, які виникають в геометричних побудовах при вказаних умовах, і в дальшому, на основі їх вивчення, оцінювати точність виконаного рисунка. Зокрема вивчити вплив первинних помилок на точність виміру відрізків та кутів.

Перш за все зробимо кілька зауважень з приводу прийнятих погоджень.

1. Різними „точками“ ми погодилися називати такі „точки“, центри яких не зливаються.

Практично ми розрізняємо дві „точки“ A' і B' , тоді коли віддаль між їх відповідними точками A і B (їх центрами) не менша деякої граничної величини $2\omega_1$, тобто, якщо вони не містяться разом в середині деякого кола, радіус якого не перевищує величини

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2.$$

Тут ми зустрічаємося з основною *первинною помилкою* побудовання, що з'являється внаслідок неудоконалення нашого сприймання. Ця основна первинна помилка може бути схарактеризована колом K радіуса ω_0 (рис. 3-й). Введемо такі визначення:

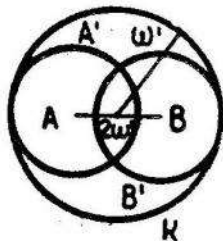


Рис. 3.

- 1) Величину $AB \leq 2\omega_1$ будемо називати *основною первинною помилкою 1-го роду*.
- 2) Дві точки, для яких $AB \leq 2\omega_1$ будемо умовно називати „інцидентними“ точками. Коло K радіуса $\omega_0 \leq \omega_1 + \omega_2$ назовемо *одиничним колом помилок* або *колом інцидентності* двох „точок“.

Очевидно, що: 1) Коли $\omega_0 \rightarrow 0$, то *одиничне коло помилок* вироджується в „точку“. Дві „точки“ A' і B' зливаються, стають абсолютно інцидентними. 2) Кожне одиничне коло помилок містить у собі безконечну множину звичайних (геомет-

ричних) точок. 3) У „площині“ рисунка існує безконечна множина „інцидентних точок“ — значить і *одиничних кіл помилок*.

- 4) Дві „інцидентні точки“ несуть ні собі основну первинну помилку 1-го роду.
- 2) Згідно з прийнятим погодженням „точка“ і „пряма“ *абсолютно інцидентні* в тому випадку, якщо інцидентні відповідні їм звичайні точка і пряма евклідової площини, тобто, якщо центр плями „інцидентний“ з середньою лінією смужки, що також у практиці трудно розпізнати.

Практично „точка“ і „пряма“ не розрізняється одна від одної, якщо віддаль центра „точки“ (плями) від середньої лінії „прямої“ (смужки) не перевищує ω . Тому:

- 1) „Точку“ і „пряму“ назовемо „інцидентними“, якщо віддаль центра „точки“ від середньої лінії „прямої“ $\leq \omega$.
- 2) Смужку, обмежену двома паралельними прямими, що являють собою обгортку сім'ї кіл радіуса ω_0 з центром на прямій a , будемо називати *одиничною смугою помилок*, або смугою інцидентності „точки“ і „прямої“. Ця смуга помилок характеризується одиничним колом радіуса ω_0 , а значить несе на собі основну первинну помилку 1-го роду.

Очевидно, що:

- 1) Кожній „прямій“ відповідає тільки одна одинична смуга помилок.
- 2) Якщо $\omega_0 \rightarrow 0$, то „точка“ і „пряма“ в границі стають абсолютно інцидентними.
- 3) Так само і поняття „між“ в практиці вимагає деяких обмежень в силу існування в площині рисунка „інцидентних точок“, що характеризуються одиничним колом помилок.

„Точка“ A_2 практично не відрізняється від „точок“ A_1 і A_3 на прямій a , якщо вона знаходиться „між“ „точками“ A_1 і A_3 , що віддалена одна від одної на відстань $d \leq 2\omega_1$, тобто, коли вони знаходяться „між“ двома „інцидентними“ „точками“ A_1 і A_3 .

Звідси: якщо дві „точки“ A_1 і A_2 утворюють одиничне коло помилок, то всі точки $A_3, A_4, \dots, A_n$, які попадають на одиничне коло помилок, знаходяться між A_1 і A_2 , і кожна з них можна вважати за таку, що знаходиться „між“ двома другими в порядку їх номерів.

- 4) Перетворюючи „точку“ в „точку“, „пряму“ в „пряму“ за допомогою руху, ми зустрічаємо в практиці ряд причин, що вводять помилку в побудовання.

Як вже зазначалося, ми не можемо відрізнити в практиці дві „інцидентні“ „точки“, „інцидентну“ „точку“ і „пряму“, а також дві „прямі“, якщо їх середні лінії знаходяться одна від одної на віддалі, меншій за $2\omega_1$. Причому, такі дві „прямі“ ми будемо називати умовно „інцидентними прямими“. Такі прямі також характеризуються певною *смугою помилок*, яку в цьому випадку назовемо *смугою „інцидентності“ двох „прямих“*.

Дві різні неінцидентні „прямі“, перетинаючись, визначають „точку“, точність позначення якої на рисунку характеризується „площею помилок“, або „площею відхилень“. Її форма і величина залежить в основному лише від кута α , під яким перетинаються

ці прямі. Якщо позначити площу помилок через T , то ця залежність виразиться такою формулою

$$T = \frac{4\omega_0^2}{\sin \alpha}.$$

В граничних випадках ця площа помилок може прийняти форму квадрата з стороною $2\omega_0$, якщо прямі взаємноперпендикулярні, або розтягнутися („вырождается“) в „смугу інцидентності двох прямих“.

II.

Відрізком в геометрії називають сукупність двох точок A і B ; точки M , що лежать між A і B , називаються внутрішніми точками відрізка, точки A і B — кінцями відрізка, а всі останні точки прямої AB — зовнішніми точками у відношенні до відрізка. У практиці при графічному зображенні відрізка на папері у вигляді певної смужки за допомогою олівця чи пера-рейсфедера не всяку сукупність двох „точок“ можна назвати відрізком, так само, як і не всяку „точку“ M , що знаходиться між „точками“ A і B , можна відрізнити від точок A і B . Якщо „точки“ A і B „інцидентні“, то про відрізок не доводиться говорити.

Тут говорять про первинну помилку побудування, або *одиничне коло помилок*.

Отже, для того, щоб сукупність „точок“ A і B визначала (практично) відрізок, треба щоб „точки“ A і B не були „інцидентними“.

Покажемо далі, що:

Через всякі дві не „інцидентні точки“ (A' і B') можна провести безліч „прямих“, „інцидентних“ даним „точкам“ (A' і B'). Всі вони належать одній області відхилень і визначають лише один „відрізок“ $A'B'$.

Хай графічно задані дві „точки“ A' і B' , не є „інцидентними“ одна одній. Тоді згідно з нашими погодженнями „точки“ A' та B' знаходяться у взаємно однозначній відповідності з евклідовими точками A та B нашої площини. Тобто:

$$A' \leftrightarrow A, \quad B' \leftrightarrow B.$$

Так само „прямій“ $A'B'$ взаємно однозначно відповідає евклідова пряма AB , тобто

$$A'B' \leftrightarrow AB.$$

При розгляді „інцидентних“ „точок“ і „прямих“ будемо розрізняти „праву інцидентність“, якщо точка A знаходиться праворуч проведеної „прямої“ a' і „ліву інцидентність“, якщо точка B знаходиться ліворуч „прямої“ a' (рис. 4-й).

За основний напрям прямої a' приймаємо, як звичайно, напрям від A до B , якщо про це спеціально не указано (тобто напрям від початкової точки відрізка AB до його кінцевої точки).

При проведенні „прямої“ (a') через дві задані „точки“ (A' та B') можливі такі випадки:

- 1) „Пряма“ a' буде граничною „праворуч інцидентною“ „точці“ A' і „ліворуч інцидентною“ „точці“ B' (це значить, що пряма a' „роз-

- биває" площину рисунка на дві „півплощини“ — праву і ліву, в одній з яких не можна провести жодної „прямої“, „інцидентної“ з „точкою“ A' , а в другій — скільки завгодно „прямих“, „інцидентних“ з A' , але ніякої з „точкою“ B' і що не перетинали б „прямої“ a').
- 2) „Пряма“ (b') гранична, „інцидентна“ „точці“ A' ліворуч, а „точці“ B' праворуч (де під поняттям „гранична“ ми розуміємо те ж, що й в попередньому випадкові).
 - 3) Аналогічно „пряма“ c' є граничною „праворуч інцидентною“ обома „точкам“ A' і B' .
 - 4) „Пряма“ d' є граничною „ліворуч інцидентною“ з „точками“ A' і B' .

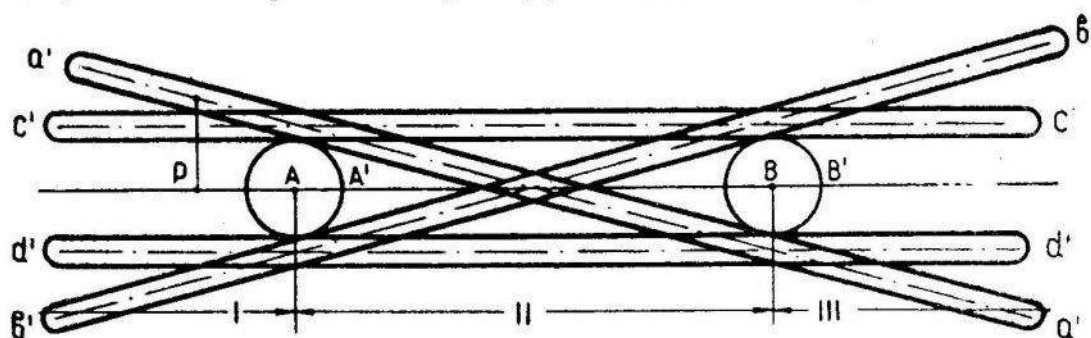


Рис. 4.

Всі „прямі“, що проходять в одній парі вертикальних кутів, утворених „прямими“ a' і b' , а саме, яким належать „точки“ A' і B' , будуть „інцидентними“ з „точками“ A' і B' , а в другій парі вертикальних кутів, утворених тими ж „прямими“, не будуть „інцидентними“ з „точками“ A' і B' одночасно.

Праворуч „прямої“ c' можуть проходити „прямі“, „інцидентні“ „точкам“ A' і B' , а ліворуч — ні, оскільки c' — гранична „пряма“.

Те ж саме можна сказати відносно „прямої“ d' . Ліворуч d' можуть проходити „прямі“, „інцидентні“ з „точками“ A' і B' , а праворуч — ні.

„Прямі“ c', d', a' і b' — виділяють область площини рисунку χ , в якій може проходити безліч „прямих, інцидентних“ „точкам“ A' і B' . Цю область χ ми назвемо *одиначною областю помилок*, або *одиначною областю відхилень* і віднесемо її також до основних первинних помилок побудовань.

Таким чином, через „точки“ A' і B' проходять безліч „прямих“, „інцидентних“ з A' і B' .

Всі вони належать одній області відхилень χ . „Точки“ A' і B' розбивають область відхилень χ на три ділянки — I, II, III. Ширина кожної з них 2β в будь-якій точці P прямої AB може бути обчислена за формулами:

$$1) \quad 2\beta_I = 2 \frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{1 - \lambda};$$

$$2) \quad 2\beta_{II} = 2 \frac{\lambda\omega_0 - \omega_0}{\lambda - 1} = 2\omega_0;$$

$$3) \quad 2\beta_{III} = 2 \frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{\lambda - 1},$$

де $\lambda = PA:PB$, а $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Ділянку (II), для якої $2\beta_H = 2\omega_0$, разом з „точками“ A' і B' ми будемо називати „відрізком“ „прямої“ $A'B'$.

Усі „прямі“, „інцидентні“ точкам A' і B' , визначають лише один „відрізок“ $A'B'$ „прямої“ $A'B'$.

Одинична область помилок χ може бути охарактеризована також кутом α , який утворюється в перетині прямої AB з „прямою“ a' . Цей кут залежить від $x = AB$ (рис. 5-й), тобто $\alpha = f(x)$, якщо $x \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$. (Область відхилень прямої χ безконечно велика. Тут не доводиться говорити про проведення „прямої“ через дві „точки“).

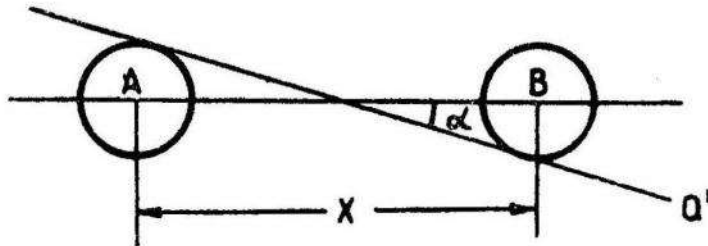


Рис. 5.

Через одну „точку“ можна провести в кожному напрямі „пряму“ з однаковою точністю. Ця точність характеризується інцидентністю „прямої“ та „точки“, або одиничним колом помилок.

Якщо $x \rightarrow \infty$ (тобто зростає), то $\alpha \rightarrow 0$,

область відхилень зменшується, а точність побудовань „прямої“ зростає. Звідси висновок: чим далі взяти „точки“ A і B одна від одної, тим точніше вони визначають „пряму“ AB .

Кутом у геометрії називають пару променів h і k , що виходять з одної і тої ж точки O і що не належать одній прямій. Точка O зветься вершком кута, а промені h і k — його сторонами.

Тут слід також зауважити, що не всяка пара „променів“ h' і k' , які виходять із одної і тої ж „точки“ O' , практично утворює кут $(h'k')$. Тобто не всякі „півпрямі“, що виходять з одної „точки“ O' , можна відрізнити одну від одної. Тут також ми зустрічаємося з поняттям „інцидентних“ „прямих“, або з „смугою інцидентності двох прямих“.

Отже, для того щоб пара „променів“ h' і k' , які виходять з одної „точки“ O' , визначили (практично) кут $(h'k')$, необхідно, щоб вони мали лише одну спільну „точку“ O' (вершок кута) і не були умовно „інцидентними“ між собою.

Кут $(h'k')$ буде практично помітним, коли його величина буде більшою за $\frac{2\omega_1}{r}$, де $2\omega_1$ — величина дуги кола радіуса r , центр якого знаходиться в точці O' — вершкові кута, і являє собою за величиною основну первинну помилку 1-го роду.

Позначивши кут $(h'k')$ через φ , маємо:

$$\varphi \geq \frac{2\omega_1}{r}.$$

Якщо $r \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow 0$, кут вироджується в смугу „інцидентності“ двох „прямих“ або просто в „пряму“. Якщо $r \rightarrow 0$, то про кут не доводиться говорити, оскільки практично ми маємо справу в цьому ви-

падку з точкою так само, як у випадку $r \rightarrow 2\omega_1$ ми маємо справу з графічно заданою „точкою“.

Кут $\varphi = \frac{2\omega_1}{r}$ ми назвемо *одиничним кутом помилок* або *одиничною кутовою помилкою*, яку також слід віднести до *первинних помилок* — геометричних побудов.

Отже, $2\omega_1 \leq r < \infty$, оскільки побудову проводять на обмеженій ділянці „площини“ (аркуш паперу). Звідси також можна зробити висновок, що для збільшення точності побудови і виміру кута слід брати радіус допоміжного кола r , на якому відраховують дуги, як можна більшим.

У практиці рисування ми широко використовуємо рух і особливо „зсув“, який здійснюється за допомогою лінійки та косинця.

Крім зсуву, широко використовується також обертання навколо точки в одній площині, що здійснюється за допомогою циркуля.

У площині рисунка ми маємо систему „точок“ і „прямих“. Тому вкажемо, які саме властивості „рухів“ ми будемо припускати і застосовувати до рухів.

По-перше, рух повинен бути взаємнооднозначним перетворенням точок нашої „площини“ (тобто довільна „точка“ рисунка повинна переходити знову в „точку“ рисунка, що, звичайно, знаходиться на певній віддалі) і також всі „прямі“ повинні переходити знову в деякі „прямі“ рисунка.

Будемо вважати, що в „площині“ рисунка можливий один і тільки один рух, що переводить деяку „точку“ A в довільно задану „точку“ A' і одночасно „пряму“, що йде від A до A' (і саме тільки в цьому напрямку), переводить саму в себе.

Такий рух зовемо зсувом (рис. 6-й).

Якщо повторювати декілька разів один і той же зсув, то „точка“ A буде переходити в „точки“ $A', A'', A''' \dots$ „півпрямой“ AA' , спрямованої від A до A' . Як аксіому тут, очевидно, слід прийняти, що ці точки можуть зрештою досягти або пересягнути довільну точку цієї півпрямой. Шляхом повторення зворотного перетворення дістаємо ряд „точок“ такого ж роду на другій „півпрямій“ (тобто на продовженні першої „півпрямой“ в протилежну сторону).

Уявляючи собі, що всякий зсув з початкового положення в певне відбувається безперервним шляхом, ми назвемо „пряму“, що тут розглядаємо, *траєкторією* „точки“ A при цьому переносному русі. Тоді всяку „пряму“ можна розглядати, як траєкторію безконечної множини „точок“ і при всякому зсуві знайдеться безліч подібних траєкторій, а саме тих „прямих“, які при цьому зсувові переходять самі в себе.

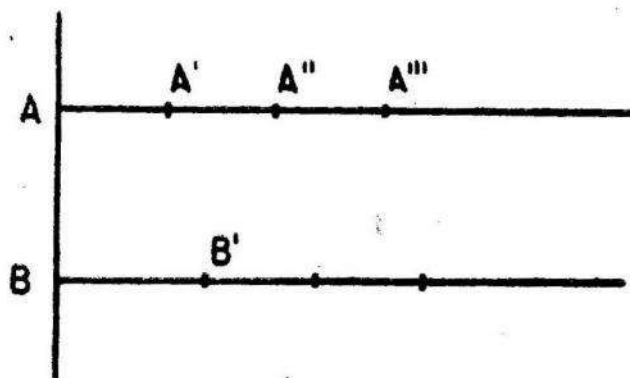


Рис. 6.

При цьому дві різні траєкторії одного і того ж переносного руху не можуть перетинатися.

Тому всім траєкторіям одного і того ж переносного руху дають назву *паралельних прямих*.

Таким чином, поняття паралельності в практичному рисуванні вводиться на базі деяких властивостей руху. Тут, зовсім природно, приймають, що через кожну „точку“ A (що не „інцидентна“ „прямій“ a) проходить у всякому разі хоч одна „пряма“, паралельна до „прямої“ a , а саме — траєкторія „точки“ A при зсувові (площини) вздовж заданої „прямої“ a .

У геометричному рисуванні при перенесенні величин чи рисуванні паралельних ліній надзвичайно часто застосовується операція зсуву, наприклад, примушуючи косинець зміщуватися вздовж лінійки.

При цьому досвід показує, що всі точки косинця описують паралельні прямі.

Характеризуємо тепер рух, що вводиться в рисування за допомогою циркуля. Це так зване обертання навколо одної „точки“. При цьому рухові залишається без змін яка-небудь точка площини, наприклад O , що залишається на місці, або, як кажуть, переходить сама в себе при перетворенні обертання (центр).

При цьому існує тільки один рух, який переводить промінь a , що виходить з точки O , в будь-який другий промінь a' , що також виходить з точки O .

Усі обертання уявляють собі здійсненими безперервно, виходячи з певного початкового положення, і знову можна говорити за траєкторії, які при цьому описує кожна точка.

Тут також як аксіому, слід прийняти таке твердження: промені $a, a' \dots$, що дістаємо при повторенні одного і того ж обертання з променя a навколо „точки“ O , повинні врешті або досягти, або пересягнути всяку півпрямую, що виходить з точки O .

Тому безперервне обертання повинно зрештою привести промінь a в його початкове положення, причому, і кожна „точка“ A повинна повернутися в своє початкове положення. Отже, траєкторії повинні являти собою замкнені лінії, що зустрічають кожний промінь, який виходить з „точки“ O , в одній і тільки одній „точці“ A , так, що відрізки OA виявляються взаємноконгруентними (тобто можуть бути переведені один в другий шляхом вказаного руху).

Таким чином, ці траєкторії є тим, що в практиці називають колами з центром в „точці“ O .

У практиці, при рисуванні кола, ми зустрічаємось з рядом причин, що вносять помилку в побудовання. По-перше, ніжка циркуля, що встановлюється в центр кола — „точку“ O , — заглиблюється в товщу паперу на деяку глибину, від чого радіус кола $r = OA$ зменшується на деяку величину $r - r' = \delta r$ (рис. 7-й). Дійсна величина радіуса $r' = \sqrt{r^2 - \gamma^2}$, де γ — глибина уколу ніжки циркуля в товщу паперу. Друга причина полягає в сточуванні графіту олівця, яким рисуємо коло. Отже, тому радіус кола ще більше вкорочується. Якщо не брати до уваги інших причин, то й вказані приводять до неточності побудовання кола. Так, якщо з довільного центра „точки“ O' треба

описати коло k довільним радіусом r , то величину помилки побудовання кола при цих умовах ми можемо підрахувати так:

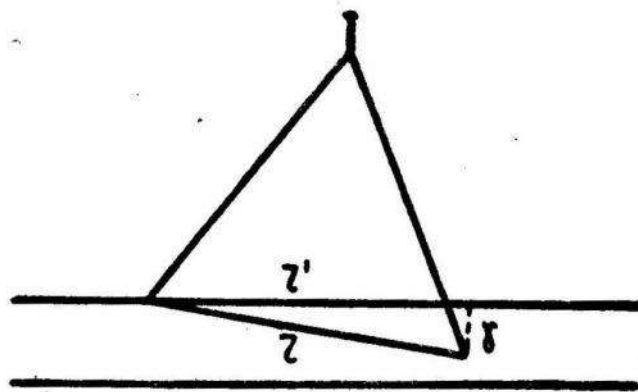


Рис. 7.

* Нехай O — точка, що відповідає початковому положенню центра кола k — „точці“ O' . A' — початкова „точка“ кола, що маємо нарисувати (обидві ті точки довільні). Після проведення кола (зробленого одного повороту) центр кола — точка O зміститься в якусь точку C (вплив заглиблення ніжки циркуля в товщу паперу) (рис. 8-й). Позна-

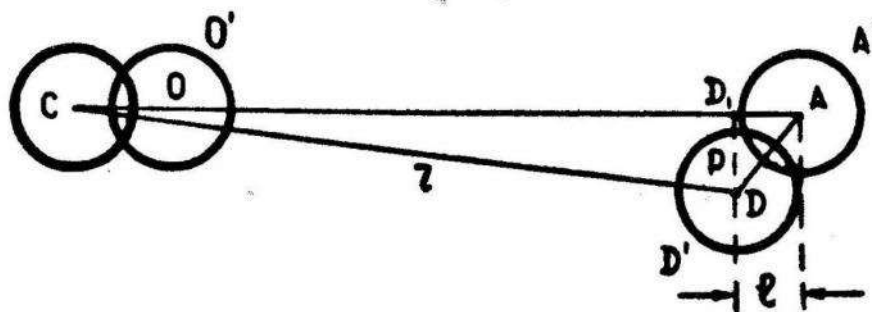


Рис. 8.

чимо величину цього зміщення CO через ε , а через D' кінцеву „точку“ кола, в яку проходить ніжка циркуля, що описує коло при умові $OA = CD = r$, тобто якщо вважати отвір циркуля незмінним і якщо пружність ніжок циркуля відсутня, а відповідність $D' \rightarrow D$ і $A' \rightarrow A$, так само як і $O' \rightarrow O$, взаємно однозначна.

"Точка" D' "інцидентна" "точці" A' (це значить, що відхилення $DA = 2\omega_1$).

Величина D_1A проєкції відхилення DA на напрям OA саме і впливає на точність побудови кола k (тому що ми фактично дістаємо зменшення радіуса OA на величину l , рівну проєкції AD на напрям OA).

Ця величина для різних точок кола буде різною: таким чином, замість кола ми дістанемо спіраль.

Обчислимо помилку $l = AD_1$. З рисунка 8 бачимо:

$$CD_1 = \sqrt{r^2 - p^2} \quad (\text{де } p = DD_1),$$

$$OD_1 = CD_1 - OC = \sqrt{r^2 - p^2} - \varepsilon,$$

тоді

$$l = OA - OD_1 = r - [\sqrt{r^2 - p^2} - \varepsilon].$$

Розкладаючи l в біноміальний ряд Ньютона і обмежуючись двома членами, дістанемо:

$$l = \varepsilon + \frac{p^2}{2r} + \dots, \text{ або } l \approx \varepsilon.$$

При уважному проведенні кола величина l , звичайно, на практиці непомітна. Оскільки $l = 2\omega \cos \alpha$ (де $\alpha = \angle DAD_1$), то відхилення $l \leq 2\omega_1$, тобто зіткнення дуг кола характеризується основною первинною помилкою $2\omega_1$.

III.

Повернемося тепер до відрізків та кутів.

Два „відрізки“ AB і $A'B'$ назвемо конгруентними, або рівними, якщо існує рух, який приводить ці відрізки в „інцидентне“ положення, тобто „точку“ A переводить в „точку“ A' , „точку“ B в B' і одиничну область помилок χ в χ' . При цьому „інцидентні“ відрізки повинні визначати одну і ту ж одиничну область помилок χ (рис. 9).

Дві „інцидентні“ „точки“ характеризуються одним одиничним колом помилок, радіус якого $= \omega_0$, а тому:

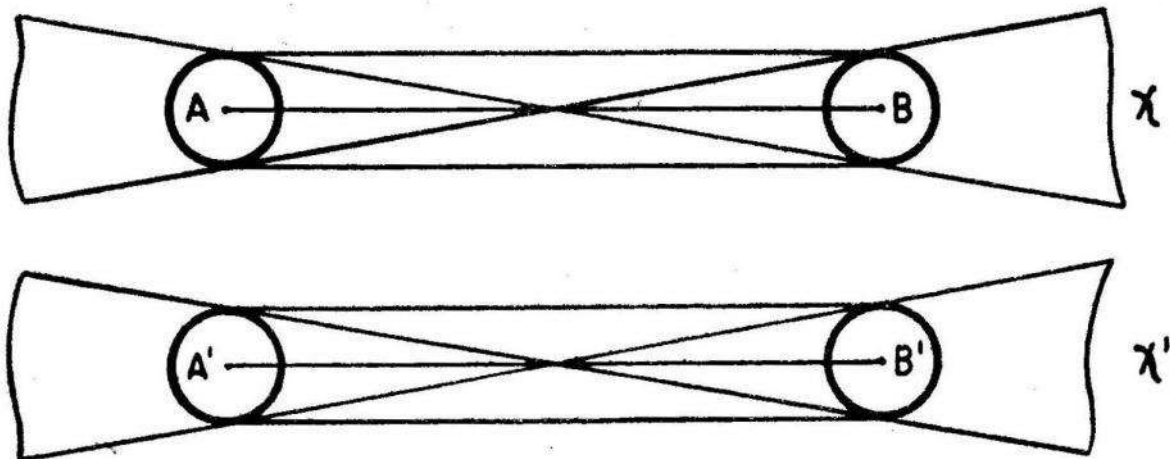


Рис. 9.

- 1) Всі такі „точки“ наших „відрізків“ повинні належати одиничній області помилок χ .
- 2) Помилка порівняння конгруентних відрізків не повинна перевищувати величини $\pm 4\omega_1$.

Справді, хай „точки“ A і B — кінці „відрізка“ AB , „точка“ A' (кінець „відрізка“ $A'B'$) при суміщенні з A може зайняти одно з указаних на рис. 10 положень A_1, A_2 , залишаючись в той же

час „інцидентною“ з „точкою“ A , якщо віддалі між їх відповідними точками (центрами „точок“) не перевищують $2\omega_1$, як свого максимуму.

Таке саме зауваження можна зробити і відносно „точок“ B та B' . Можна сказати ще, що помилка порівняння двох „конгруентних“

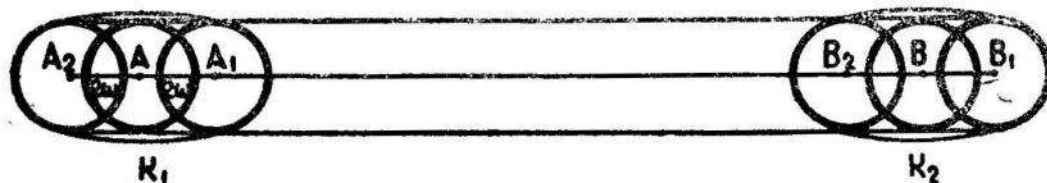


Рис. 10.

відрізків характеризується двома овалами помилок k_1 і k_2 , які вміщують у собі відповідно „точки“ A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2 .

Аналогічно „кут“ (hk) називають конгруентним, або рівним кутові $(h'k')$, якщо існує рух, який приводить в „інцидентне“ положення „півпрямі“ h та h' і „півпрямі“ k та k' одночасно (а значить і „вершини“ O та O' цих кутів).

Область помилок порівняння двох „конгруентних“ кутів не повинна перебільшувати величини подвоєного одиничного кута помилок, тобто $2 \frac{2\omega_1}{r} = \frac{4\omega_1}{r}$.

Будемо називати „відрізок“ AB „прямою“ a більше „відрізка“ $A'B'$ тої ж самої або іншої „прямої“ a' , а „відрізок“ $A'B'$ менше „відрізка“ AB , якщо існує рух, який A' і B' „відрізка“ $A'B'$ переводить у внутрішні „точки“ A'', B'' відрізка AB (тобто у внутрішні „точки“ A'', B'' , що не „інцидентні“ „точкам“ A і B).

Аналогічно вводиться поняття більшого і меншого кута.

Співвідношення „більше“, а також „менше“ мають транзитивну властивість:

Якщо $AB > CD$, а $CD > EF$, то $AB > EF$. Крім того, ці співвідношення інваріантні відносно руху, оскільки співвідношення „між“, що визначає поняття внутрішніх точок відрізка, не порушується рухом.

Якщо AB і BC — два відрізки з спільним кінцем B , що належать одній і тій же одиничній області помилок ω , причому „точка“ B лежить „між“ „точками“ A і C , то відрізок AC називають сумою „відрізків“ AB та BC і записують:

$$AB + BC = AC.$$

Якщо відрізки AB і CD не належать одній і тій же області помилок, то під їх сумою розуміють третій відрізок EF , який має таку внутрішню „точку“ O , що $EO = AB$, а $OF = CD$ і „точка“ O належить одиничній області помилок відрізка EF .

Під сумою n „відрізків“ $A_1A_2A_3 \dots A_n A_{n+1}$ розуміють „відрізок“ B_1B_{n+1} , в середині якого існує $n-1$ таких „точок“ $B_2B_3 \dots B_{n-1}$, що $A_1A_2 = B_1B_2$; $A_2A_3 = B_2B_3 \dots A_n A_{n+1} = B_n B_{n+1}$, причому B_j знаходиться між B_i та B_k для $i < j < k$ (або $i > j > k$) і всі внутрішні „точки“ $B_2, B_3 \dots B_n$ належать одиничній області помилок відрізка B_1B_{n+1} .

Якщо ж AB та BC два „відрізки“ з спільним кінцем B , що належать одній і тій же області помилок χ , причому „точка“ C лежить „між“ „точками“ A і B , то „відрізок“ AC називають різницею відрізків AB і BC і записують:

$$AB - BC = AC.$$

Різниця „відрізків“, як і сума їх, інваріантна відносно руху.

Встановлюючи в геометрії поняття довжини, мають на увазі оцінити кожний відрізок дійсним додатнім числом. Це число і звуть довжиною відрізка. Ця оцінка, а значить, і довжина повинна бути зв'язана з властивістю відрізка бути рівним другому відрізку, більшим за нього чи меншим. Додатне число d , що називаємо довжиною відрізка AB , як функція відрізка AB , $d(AB)$, повинно вдовольняти такі вимоги:

1. Функція d повинна бути інваріантна відносно руху Γ , тобто: $d(AB) = d(A'B')$, де $A' = \Gamma A$, $B' = \Gamma B$, а Γ — будь-який рух. Коротко: конгруентні відрізки мають однакову довжину (рівним відрізкам відповідають рівні числа).
2. Функція d аддитивна: тобто, якщо B знаходиться між A і C , то $d(AB) + d(BC) = d(AC)$.

Інакше: довжина суми двох відрізків рівна сумі довжин цих відрізків.

3. Якщо деякому наперед зафіксованому відрізкові відповідає число, рівне одиниці, тобто, якщо деякому відрізкові приписати одиничну довжину ($d=1$), то кожному відрізкові відповідає одне і тільки одне додатне число, тобто кожний відрізок має довжину і притому єдину.

Звідси робимо висновок:

- 1) Довжина суми кінцевого числа відрізків повинна бути рівною сумі їх довжин і тому повинна бути більшою довжини кожного з них.
- 2) Більший відрізок повинен мати більшу довжину, бо його можна розглядати, як суму доданків, з яких один рівний меншому відрізкові.

Коли вимоги 1 — 3 задовольняються, то говорять, що встановлена система виміру відрізків, або система довжин відрізків. Число, що вказаним способом відповідає кожному відрізкові, зветься довжиною цього відрізка.

Зауважимо, що при формулюванні вимог 1 — 3 треба мати на увазі, що область помилок порівняння двох конгруентних відрізків характеризується двома овалами помилок з віссю $4\omega_1$.

Для прикладу розглянемо два найбільш поширені в практиці способи виміру довжини графічно заданого відрізка AB : 1) вимірювання відрізка за допомогою масштабної лінійки; 2) за допомогою спеціального циркуля, пристосованого для вимірювання.

У першому випадку (приймаючи за масштабну одиницю, наприклад, міліметр) масштабну лінійку безпосередньо прикладають до відрізка, що вимірюється, і відраховується його довжина згідно з поділками лінійки. При цьому дістають, звичайно, наближене значення довжини відрізка $AB = l_1$.

Вимірюючи відрізок декілька разів, ми будемо діставати різні значення довжини $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Причому ці виміри вважаються незалежними, однаково точними і вільними від сталої помилки.

Отже, для одного і того ж відрізка ми дістанемо різні величини довжини. Кожна з цих величин наближається до дійсної довжини l_0 заданого відрізка з тою чи іншою точністю. Як відомо, в практиці, щоб зменшити помилку при вимірюванні, роблять так: повторивши вимір відрізка n разів, складають середнє арифметичне цих вимірів:

$l = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$, яке і приймають за наближене значення справжньої довжини відрізка l_0 , тобто

$$l \approx l_0.$$

Помилка вимірювання $l_0 - l = \Delta$ залежить від багатьох вказаних раніше причин як об'єктивного, так і суб'єктивного характеру. Якщо масштабну лінійку вважати вірною, то помилка вимірювання не повинна перевищувати величини $\pm 4\omega_1$. Тобто, в цьому випадку вона повинна лежати в межах двох овалів помилок. Відношення $\frac{2\omega_0}{\Delta} = K_{AB}$ буде характеризувати точність виміру і являє собою коефіцієнт точності виміру заданого відрізка AB .

У другому випадку при вимірюванні графічно заданого відрізка AB з допомогою вимірного циркуля беруть отвір циркуля, що відповідає масштабному відрізкові на масштабній лінійці і проводять вимір, тобто відкладають його вздовж відрізка AB .

Помилка, яку дістаємо внаслідок такого вимірювання довжини заданого відрізка, складається з таких помилок:

- 1) При вимірюванні масштабної одиниці a циркулем на масштабній лінійці ми робимо деяку помилку ξ , що характеризується двома смугами „інцидентності“ „прямої“ (штрих на масштабній лінійці) та „точки“ (вістря ніжки циркуля), ширина яких не перевищує величини $\pm 2\omega_0$. Так що одержана внаслідок виміру величина a_1 масштабної одиниці відрізняється від дійсної a на величину $\xi \leq 2\omega_0$ тобто,

$$a_1 - a = \pm 2\omega_0.$$

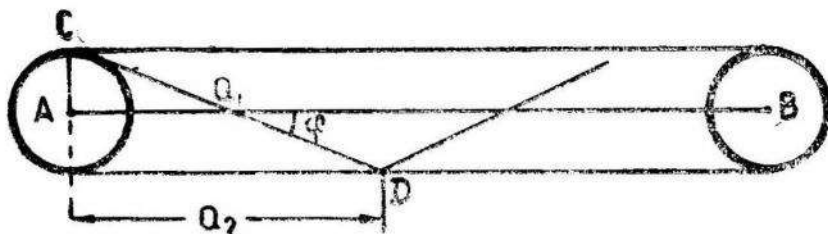


Рис. 11.

- 2) При відкладанні довжини a_1 вздовж заданого відрізка AB будемо кожного разу вносити нову помилку, тому що при встановленні ніжки циркуля на відрізкові ми не будемо попадати завжди на середню лінію смужки (що являє собою, в даному разі, відрізок AB), а будемо попадати, приміром, в точку $C, D, \dots$ і т. д. (рис. 11-й)

Відкладений напрям a_1 буде утворювати деякий кут φ з середньою лінією AB . При неодноразовому відкладуванні цієї довжини по AB проєкції її будуть скорочуватися до величини:

$$a_2 = \sqrt{a_1^2 - (2\omega_0)^2}, \quad \text{де } 2\omega_0 \text{ — ширина смужки („відрізка“).}$$

Якщо позначити різницю $a_2 - a_1 = \delta$, то дістанемо:

$$a + \delta = \sqrt{a_1^2 - 4\omega_0^2} = \sqrt{(a \pm 2\omega_0)^2 - 4\omega_0^2} = \sqrt{a^2 \pm 4a\omega_0},$$

$$\text{або } (a + \delta)^2 = a^2 \pm 4a\omega_0, \quad \text{звідки } 2a\delta + \delta^2 = \pm 4a\omega_0,$$

$$\text{або } \delta + \frac{\delta^2}{2a} = \pm 2\omega_0 \quad \text{і значить, } |\delta| < |2\omega_0|.$$

Як і в попередньому випадкові, вимірювання проводиться декілька разів, і потім за наближену довжину відрізка приймають середнє арифметичне l всіх зроблених вимірів відрізка, дійсна величина якого є l_0 .

Помилка $l_0 - l = \Delta$ в цьому випадку буде залежати від *характеру* величин ξ та δ .

Аналогічно проводять у практиці і вимір за допомогою транспортира.

Хай задано графічно кут AOB , дійсна величина якого α_0 . Прикладаючи транспортер до одного з боків заданого кута, наприклад, OA

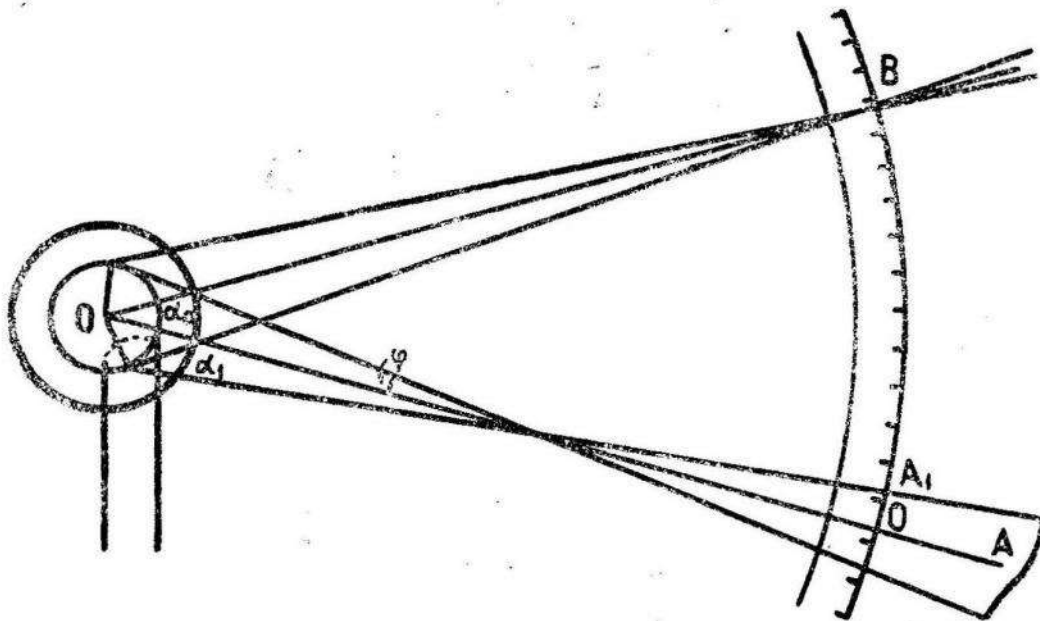


Рис. 12.

так, щоб центр транспортира (позначений рисою) злився з вершком кута — точкою O , а лінійка транспортира (його діаметр) пішла по стороні OA , відраховують величину кута AOB згідно з поділками транспортира. Вимір проводять декілька разів і потім за наближену величину кута беруть α — середнє арифметичне одержаних вимірів. При кожному такому вимірі ми робимо помилку, що залежить від помилок:

- 1) суміщення центра транспортира (риски, що позначає центр) з вершком кута — точкою O ;

- 2) прикладання лінійки транспортира до сторони кута OA ,
- 3) відрахування поділок дуги транспортира при стороні OB .

Перша помилка суміщення центра транспортира з вершком кута O характеризується одиничною смугою помилок інцидентності „прямої“ і „точки“, ширина якої $2\omega_0$.

Друга помилка — прикладання лінійки транспортира до сторони кута OA (рис. 12) характеризується одиничною областю помилок χ , яка, в свою чергу, залежить від кута φ між променем OA та прямою, яка визначається напрямком лінійки транспортира.

Третя помилка — відрахування поділок дуги транспортира — характеризується величиною одиничного кута помилок $\frac{2\omega_1}{r}$.

На рис. 12 перша помилка позначена через OO_1 . Точка O_1 може зайняти будь-яке положення на колі радіуса ω_0 з центром у точці O (на цьому рисунку не показано „прямих“, що утворюють кут $A'O'B'$, а лише відповідні їм прямі OA та OB і відповідну вершині точку O).

O_1A_1 — положення лінійки транспортира після прикладання її до сторони кута OA . Одинична область помилок χ , що при цьому утворюється, залежить від кута φ між OA та O_1A_1 .

Тоді ми, фактично, вимірюємо не кут $AOB = \alpha_0$, а кут $A_1O_1B = \alpha_1$, що є наближеним значенням дійсної величини α_0 :

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \varphi.$$

А якщо врахувати третю помилку — відрахування поділок дуги транспортира при стороні $OB = \pm \frac{2\omega_1}{r}$, то матимемо:

$$\alpha_0 \simeq \alpha_1 + \varphi \pm \frac{2\omega_1}{r}.$$

Отже, область помилок одного виміру кута буде: $\sigma = 2\left(\varphi \pm \frac{2\omega_1}{r}\right)$.

Відношення $\frac{2\omega_0}{\sigma}$ називаємо коефіцієнтом точності даного виміру.

Г. Л. БУЙМОЛА К ВОПРОСУ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАНЫХ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

Резюме

Автор изучает первичные ошибки, которые возникают в геометрических построениях при простейших геометрических операциях, если рассматривать точки и прямые в плоскости чертежа, как некоторые пятна и полосы.

Введенные понятия первичных ошибок автор применяет к вычислению областей погрешности, возникающих при измерении графически заданных отрезка и угла.

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ

РАСТЯЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВПАЯННЫМ КОЛЬЦОМ, ОБЛАСТЬ КОТОРОГО ВМЕСТЕ С ОБЛАСТЬЮ ПЛАСТИНКИ ОТОБРАЖАЕТСЯ НА КРУГ ПРИ ПОМОЩИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Допустим, что в упругой неограниченной однородной изотропной плоскости сделано отверстие, ограниченное контуром L_1 . В это отверстие впаяно упругое изотропное, но сделанное из другого материала, кольцо. Кольцо ограничено контурами L_1 и L_2 . Обозначим область, занятую пластинкой, через s , таким образом, контур L_1 будет границей двух областей s и s_1 , где s_1 — область кольца.

Допустим, что пластинка растягивается усилиями P и требуется определить ее упругое равновесие. Выберем начало координат внутри контура L_2 , т. е. внутри отверстия кольца и направим ось Y в направлении усилий P .

При деформации пластинки на контуре L_1 должны выполняться следующие условия:

$$u + iv = u_1 + iv_1 \quad \text{и} \quad X_{1n} + iY_{1n} = X_n + iY_n \quad (1,1)$$

где индексом „1“ обозначены величины, относящиеся к области кольца, а без индекса „1“ те же величины, но относящиеся к области пластинки.

В дальнейшем все элементы (упругие постоянные, компоненты напряжения и пр.) будем отмечать индексом „1“, если они относятся к области кольца, а без индекса или с другим индексом — те же элементы, относящиеся к области пластинки.

Условия (1,1) в функциях комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ соответственно запишутся:

$$\frac{\kappa}{\mu} \bar{\varphi}_2(\bar{t}) - \frac{1}{\mu} [\bar{t}\varphi_2'(t) + \psi_2(t)] = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{\varphi}_1^\circ(\bar{t}) - \frac{1}{\mu_1} \{\bar{t}\varphi_1^{\circ'}(t) + \psi_1^\circ(t)\} \quad (1,2)$$

$$\bar{\varphi}_2(\bar{t}) + \bar{t}\varphi_2'(t) + \psi_2(t) = \bar{\varphi}_1^\circ(\bar{t}) + \bar{t}\varphi_1^{\circ'}(t) + \psi_1^\circ(t), \quad (1,3)$$

где t афикс точки контура L_1 , функции φ_2, ψ_2 и $\varphi_1^\circ, \psi_1^\circ$ соответственно характеризуют напряженное состояние области пластинки s и области кольца s_1 .

Если контур кольца L_2 свободен от воздействия внешних сил, то

$$X_{1n} - iY_{1n} = 0,$$

на L_2 , что равносильно

$$\bar{\varphi}_1^\circ(\bar{t}) + \bar{t}\varphi_1^{\circ'}(t) + \psi_1^\circ(t) = 0, \quad (1,4)$$

Допустим далее, что область $s + s_1$ отображается при помощи рациональной функции на внешность круга радиуса $R_1 < 1$, так что контур L_1 при этом отображении переходит в окружность единичного радиуса. Пусть

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + g_1 \frac{1}{\zeta} + g_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + g_n \frac{1}{\zeta^n} \right)$$

будет отображающая функция, тогда в преобразованной области контурные условия (1,2) и (1,3) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\mu} \overline{\varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\overline{\omega} \left(\frac{1}{\sigma} \right)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) \right\} = \\ = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \overline{\varphi}_1 \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \left(\frac{1}{\mu_1} \right) \left\{ \frac{\overline{\omega} \left(\frac{1}{\sigma} \right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma) \right\}, \end{aligned} \quad (1,5)$$

$$\overline{\varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \right) + \frac{\overline{\omega} \left(\frac{1}{\sigma} \right)}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{\varphi}_1 \left(\frac{1}{\sigma} \right) + \frac{\overline{\omega} \left(\frac{1}{\sigma} \right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma), \quad (1,6)$$

где введено обозначение $\varphi_2[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta);$

$$\psi_2[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta);$$

$$\varphi_1^\circ[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta);$$

и

$$\psi_1^\circ[\omega(\zeta)] = \psi_1(\zeta),$$

а σ — точка единичной окружности.

Кроме этого, из условия (1,4) мы получаем еще одно условие

$$\overline{\varphi}_1(\sigma_1) + \frac{\omega(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)} \varphi_1'(\sigma_1) + \psi_1(\sigma_1) = 0,$$

где σ_1 точка окружности радиуса R_1 или

$$\overline{\varphi}_1 \left(\frac{R_1}{\sigma} \right) + \frac{\omega \left(\frac{R_1}{\sigma} \right)}{\omega' \left(\frac{R_1}{\sigma} \right)} \varphi_1'(R_1\sigma) + \psi_1(R_1\sigma) = 0 \quad (1,7)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функций φ, ψ, φ_1 и ψ_1 , которые должны удовлетворять условиям (1,5), (1,6) и (1,7). Так как область s содержит бесконечно удаленную точку, то для полного определения функций φ и ψ нужно еще знать их поведение в окрестности бесконечно удаленной точки.

В бесконечно удаленных частях области s имеем равномерное напряженное состояние, которое характеризуется следующим значением компонент напряжения

$$X_x = 0; \quad Y_y = p; \quad X_y = 0;$$

а, следовательно, функции φ и ψ , как известно, в этом случае будут иметь вид:

$$\varphi(\zeta) = \frac{Rp}{4}\zeta + \varphi_0(\zeta)$$

и

$$\psi(\zeta) = \frac{Rp}{2}\zeta + \psi_0(\zeta),$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — функции голоморфные в области $s + s_1$, включая бесконечно удаленную точку, то есть имеющие при достаточно больших ζ разложение вида

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \zeta^{-v}; \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v \zeta^{-v}.$$

Не меняя напряженного состояния, мы можем положить $a_0 = 0$, то есть $\varphi_0(\infty) = 0$.

Что касается функций φ_1 , ψ_1 , то они должны быть голоморфными внутри кольца, ограниченного окружностями радиуса единица и $R_1 < 1$, а следовательно могут быть представлены

$$\varphi_1(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta),$$

$$\psi_1(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta),$$

$P_1(\zeta)$ и $Q_1(\zeta)$ — функции, голоморфные внутри единичного круга, то есть

$$P_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \zeta^v, \quad Q_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} d_v \zeta^v,$$

а функции $P_2(\zeta)$ и $Q_2(\zeta)$ вне окружности радиуса R_1 , включая бесконечно удаленную точку, то есть

$$P_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} l_v \zeta^{-v}, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v(\zeta) \zeta^{-v}.$$

Подставив значение функций в условия (1,5) и (1,6)

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\mu} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) \right\} + \frac{\kappa}{\mu} \frac{Rp}{4} \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{Rp}{4} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} + \frac{Rp}{2} \sigma \right\} = \\ = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\mu_1} \left\{ \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) + Q_1(\sigma) \right\} + \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \\ - \frac{1}{\mu_1} \left\{ \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) + Q_2(\sigma) \right\} \end{aligned} \quad (1,8)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) + \frac{Rp}{4} \frac{1}{\sigma} + \frac{Rp}{4} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} + \frac{Rp}{2} \sigma = \\ & = \bar{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) + Q_1(\sigma) + \bar{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) + Q_2(\sigma). \quad (1,9) \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства (1,8) и (1,9) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ и проинтегрируем по единичной окружности при условии, что $|\zeta| > 1$. Из (1,8) получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{\mu} \psi_0(\zeta) - \frac{1}{\mu} b_0 - \frac{\kappa}{\mu} \frac{Rp}{4} \frac{1}{\zeta} - \\ & - \frac{1}{\mu} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{C}_0 - \\ & - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{\mu_1} Q_2(\zeta) \quad (1,10) \end{aligned}$$

И из (1,9)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \psi_0(\zeta) - \frac{Rp}{4} \frac{1}{\zeta} + \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + b_0 = \\ & = -\bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{C}_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - Q_2(\zeta). \quad (1,11) \end{aligned}$$

Условия (1,10) и (1,11) не совсем эквивалентны условиям (1,8) и (1,9). К ним нужно еще присоединить равенство, которое получим из (1,8) и (1,9), если их умножить на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировать по единичной окружности. Эти равенства будут:

$$-\frac{1}{\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\mu} b_0 = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{C}_0 - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \frac{1}{\mu_1} d_0 - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega_1'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{1}{\mu} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1,12)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} + b_0 = \bar{C}_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} + d_0 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1,13)$$

Проинтегрируем теперь равенства (1,8) и (1,9), когда ζ находится внутри единичной окружности, получим еще два, эквивалентные этим равенствам, соотношения:

$$\frac{\kappa}{\mu} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{1}{\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\mu} b_0 - \frac{1}{\mu} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} -$$

$$- \frac{1}{\mu} \frac{Rp}{2} \zeta = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{C}_0 - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\mu_1} Q_1(\zeta) + \frac{\kappa_1}{\mu_1} \bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) -$$

$$- \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad (1,14)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_0}\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) d\sigma + b_0 + \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{Rp}{2} \xi = \overline{C_0} + \\
+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + Q_1(\xi) + P_2\left(\frac{1}{\xi}\right) + \\
+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}. \quad (1,15)
\end{aligned}$$

Определим из равенства (1,10), (1,11), (1,14), (1,15) функции P_1 , P_2 , Q_2 , Q_1 через функции φ_0 и ψ_0 .

Для этой цели умножим равенство (1,11) на $\frac{\kappa_1}{\mu_1}$ и вычтем его из (1,10) и в результате получим функцию $Q_2(\xi)$:

$$\begin{aligned}
Q_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} - \\
- \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + \\
+ \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(\xi) - \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0 + \frac{\kappa_1\mu - \kappa\mu_1}{\mu_1(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{\xi} - \\
- \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}. \quad (1,16)
\end{aligned}$$

Умножая (1,11) на $\frac{1}{\mu_1}$ и складывая его с (1,10), найдем, что функция

$$\begin{aligned}
P_1\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(\xi) - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0 - \\
- \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} - \\
- \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{\xi} + \overline{C_0}. \quad (1,17)
\end{aligned}$$

Из равенств (1,14) и (1,15) определим функции $\bar{P}_2\left(\frac{1}{\xi}\right)$ и $Q_1(\xi)$

$$Q_1(\xi) = \frac{\kappa_1\mu - \kappa\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} +$$

$$+ \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} -$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{2} \xi +$$

$$+ \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b. \quad (1,18)$$

$$\bar{P}_2\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} +$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{2} \xi +$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0 - \bar{C}_0. \quad (1,19)$$

Все интегралы, стоящие в правых частях равенств (1,16), (1,17), (1,18) и (1,19) могут быть, как известно, вычислены элементарным путем¹.

Начнем с функции $\bar{P}_1\left(\frac{1}{\xi}\right)$. Предварительно заметим, что

$$\omega(\xi) = R\left(\xi + \sum_{\nu=1}^n g_{\nu} \xi^{-\nu}\right),$$

а следовательно,

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\omega'(\xi)} = h_0 + h_1\xi + \dots + h_n\xi^n + f(\xi) =$$

$$\frac{\bar{R}\sigma^n(1 + \bar{g}_1\xi^2 + \dots + g_n\xi^{(n+1)})}{R(-ng_n - (n-1)g_{n-1}\xi + \dots + \xi^{n+1})}, \quad (1,20)$$

¹ См. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1935 г.

где $f(\zeta)$ голоморфная функция вне окружности радиуса 1, включая и бесконечно удаленную точку и $f(\infty) = 0$. Если через α_k $k=1, \dots, (n+1)$ обозначим корни знаменателя выражения (1,20), то

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k}{\zeta - \alpha_k},$$

где g_k — вычет функции $\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}$ в точке $\zeta = \alpha_k$. Все числа α_k будут $|\alpha_k| < R_1$ и среди них не будет равных, ибо знаменатель не имеет кратных корней, в противном случае отображение не было бы конформным.

После таких замечаний интеграл

$$-\frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-2} A_k \zeta^k + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \varphi_0'(\zeta) \right] = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \zeta^{-k} + f(\zeta) \varphi_0'(\zeta) \right\},$$

где

$$A_k = \sum_{\nu=1}^{n-(k+1)} h_{k+\nu+1} \nu a_{\nu} \quad \text{и} \quad A_{-k} = \sum_{\nu=0}^n h_{\nu} (\nu + k - 1) a_{\nu+k-1}, \quad (1,22a)$$

и интеграл

$$-\frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \left\{ \sum_{k=0}^n h_k \zeta^k - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \right\} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} f(\zeta), \quad |\zeta| > 1.$$

Таким образом,

$$\bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \psi_0(\zeta) + \varphi_0'(\zeta) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k}{\zeta - \alpha_k} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \zeta^{-k} \right\} + \\ + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k}{\zeta - \alpha_k} + \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{\zeta} - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0 + \bar{C}_0. \quad (1,22)$$

Перейдя к сопряженному значению на окружности радиуса единицы, найдем выражение для функции $P_1(\zeta)$

$$P_1(\zeta) = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{\varphi}_0^1\left(\frac{1}{\zeta}\right) \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{\bar{g}_\kappa(\zeta)}{1 - \bar{a}_\kappa \zeta} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \bar{A}_{-\kappa} \zeta^\kappa \right\} + \quad (1.23)$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{\bar{g}_\kappa \zeta}{1 - \bar{a}_\kappa \zeta} + \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \zeta - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \bar{b}_0 + C_0.$$

Возьмем теперь выражение для функции $\bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Интегралы, стоящие в (1,19), берутся, когда ζ находится внутри единичного круга, а следовательно:

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \sum_{\kappa=0}^{n-2} A_\kappa \zeta^\kappa \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)}$$

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=0}^n h_\kappa \zeta^\kappa,$$

где A_κ имеет прежнее значение.

Подставляя значение этих интегралов в (1,19) и перейдя к сопряженному значению на окружности радиуса единица, получим:

$$P_2(\zeta) = \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \varphi_0(\zeta) - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\kappa=0}^{n-2} \bar{A}_\kappa \zeta^{-\kappa} +$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=0}^n \bar{h}_\kappa \zeta^{-\kappa} + \frac{Rp}{2} \zeta^{-1} + \bar{b}_0 \right\} - C_0. \quad (1.24.d)$$

Точно так же подсчитываются интегралы в выражении (1,18), например:

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{g_\kappa P_1'(\alpha_\kappa)}{\zeta - a_\kappa} - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) P_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \text{где } |\zeta| < 1$$

и

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} -$$

$$- \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{n-2} k \bar{A}_\kappa \sigma^{-(\kappa+1)} - \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^n k \bar{h}_\kappa \sigma^{-(\kappa+1)} - \right.$$

$$-\frac{Rp}{2} \sigma^{-2} \left\{ \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\kappa=0}^{n-2} A_k \zeta^k + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\kappa=0}^{n-2} \left\{ \frac{Rp}{4} D_k - B_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Rp}{2} h_{\kappa+2} \right\} \zeta^k, \right.$$

$$\text{где } B_k = \sum_{\nu=1}^{n-(\kappa+1)} \nu \bar{A}_\nu h_{k+\nu+1}, \text{ и } D_k = \sum_{\nu=1}^{n-(\kappa+1)} \nu \bar{h}_\nu h_{k+\nu+1}$$

считая, что $A_{n-1} = 0$.

Подставляя значения этих интегралов в (1,18), получаем:

$$Q_1(\zeta) = \frac{\kappa_1\mu - \kappa\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\mu_1(\kappa - 1) - \mu(\kappa_1 - 1)}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=0}^{n-2} A_k \zeta^k - \\ - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=0}^{n-2} B_k \zeta^k - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} P_1'(\zeta) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k P_1'(a_k)}{\zeta - a_k} + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{Rp}{4} D_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Rp}{2} h_{k+2} \right) \zeta^k + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{k=0}^n h_k \zeta^k + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{2} \zeta + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0 \right\}. \quad (1,246)$$

Вычислим теперь интегралы в (1,16), помня, что $|\zeta| > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k P_1'(a_k)}{\zeta - a_k}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \\ + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-2} k \bar{A}_k \sigma^{-[k+1]} - \frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^n k \bar{h}_k \sigma^{-[k+1]} - \frac{Rp}{2} \sigma^{-2} \right\} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ = - \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(\zeta) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k}{\zeta - a_k} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \zeta^{-k} \right\} + \\ + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{g_k}{\zeta - a_k} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^n k \bar{h}_k \zeta^{-[\kappa+1]} + \frac{Rp}{2} \zeta^{-2} - \sum_{\kappa=1}^{n-2} k \bar{A}_k \zeta^{-[\kappa+1]} \right\} + \\ + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^{n+1} D_{-k} \zeta^{-k} + \frac{Rp}{2} \left(\frac{h_0}{\zeta^2} + \frac{h_1}{\zeta} \right) \right\} - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\kappa=1}^{n-1} B_{-k} \zeta^{-k},$$

где

$$\begin{aligned} A_{-k} &= \sum_{\nu=0}^n h_{\nu}(\nu + k - 1) a_{\nu+k-1}, \\ D_{-k} &= \sum_{\nu=k-1}^n \nu h_{\nu-k+1} \bar{h}_{\nu} \end{aligned} \quad (1,25)$$

и

$$B_{-k} = \sum_{\nu=k-1}^{n-2} \nu \bar{A}_{\nu} h_{\nu-k+1}$$

и, наконец,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = - \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{g_{\kappa}}{\xi - \alpha_{\kappa}}.$$

Подставляя значение этих интегралов в (1,16), получим, что

$$\begin{aligned} Q_2(\xi) &= \frac{\mu(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa - 1)}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(\xi) \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{g_{\kappa}}{\xi - \alpha_{\kappa}} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{-k} \xi^{-k} \right\} - \\ &- \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \left(\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g_{\nu}}{\xi - \alpha_{\nu}} \right) \left(\sum_{\kappa=1}^{n-2} k \bar{A}_{\kappa} \xi^{-[\kappa+1]} \right) + \sum_{\kappa=1}^{n-1} B_{-k} \xi^{-k} \right\} + \\ &+ \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(\xi) - \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g_{\nu} P_1'(\alpha_{\nu})}{\xi - \alpha_{\nu}} + \\ &+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g_{\nu}}{\xi - \alpha_{\nu}} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{l=1}^n k \bar{h}_k \xi^{-[k+1]} + \frac{Rp}{2} \xi^{-2} \right\} + \\ &+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \xi^{-k} D_{-k} + \frac{Rp}{2} \left(\frac{h_0}{\xi^2} + \frac{h_1}{\xi} \right) \right\} + \\ &+ \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g_{\nu}}{\xi - \alpha_{\nu}} + \frac{\kappa_1 \mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \xi^{-1} - \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} b_0. \end{aligned} \quad (1,26)$$

Возьмем теперь уравнения (1,12) и (1,13), подсчитаем входящие в эти уравнения интегралы, а потом решим их относительно $\bar{C}_0$ и d_0 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} &= -A_0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_2'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} &= \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{n-2} k \bar{A}_k \sigma^{-[\kappa+1]} - \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^n k \bar{h}_k \sigma^{-[\kappa+1]} - \frac{Rp}{2} \sigma^{-2} \right\} \frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= - \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} A_0 + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left(B_0 - \frac{Rp}{4} D_0 - \frac{Rp}{2} h_2 \right),$$

где

$$A_0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} h_{\nu+1} \nu a_{\nu}; \quad B_0 = \sum_{\nu=1}^{n-2} \nu \bar{A}_{\nu} h_{\nu+1}$$

и

$$D_0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \bar{h}_{\nu} h_{\nu+1}.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma} = h_0,$$

И, наконец,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^n h_k \sigma^k \right) P_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k P_1'(\sigma)}{\sigma(\sigma - \alpha_k)} d\sigma = P_1'(0) h_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k [P_1'(\alpha_k) - P_1'(0)]}{\alpha_k}.$$

Подставим значения полученных интегралов в (1,12) и (1,13), и решая их относительно $\bar{C}_0$ и d_0 , найдем, что

$$\bar{C}_0 = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left[\frac{Rp}{4} h_0 + b_0 - A_0 \right]; \quad (1,28)$$

$$d_0 = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left[\frac{Rp}{4} D_0 + \frac{Rp}{2} h_0 - B_0 \right] + \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{Rp}{4} h_0 + b_0 \right) +$$

$$+ \frac{\mu_1(\kappa - 1) - \mu(\kappa_1 - 1)}{\mu(\kappa_1 + 1)} A_0 - P_1'(0) h_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_k [P_1'(\alpha_k) - P_1'(0)]}{\alpha_k}. \quad (1,29)$$

Заметим, что для нахождения постоянных C_0 и d_0 можно не составлять уравнений (1,12) и (1,13), а воспользоваться тем, что $\bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$ по предположению и из (1,23) сразу получим, что при $\zeta = 0$

$$\bar{C}_0 = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left(\frac{Rp}{4} h_0 + b_0 - A_0 \right).$$

Умножив (1,24) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировав по окружности единичного радиуса, найдем значение d_0 , которое будет в точности совпадать со значением d_0 в (1,28).

Полученными выражениями для функций P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 задача свелась к первой основной задаче для бесконечной плоскости с отверстием, отображаемой на внешности круга радиуса $R_1 < 1$ при помощи рациональной функции вида

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{g_1}{\zeta} + \frac{g_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{g_n}{\zeta^n} \right).$$

Для решения этой задачи возьмем условия (1,7) и подставим вместо функций φ_1 и ψ_1 их значения через функции P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 :

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} \varphi_1'(R_1\sigma) + \psi_1(R_1\sigma) = \bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma) + \\ + Q_1(R_1\sigma) + \bar{P}_2\left(\frac{R_1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_2'(R_1\sigma) + Q_2(R_1\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Если умножить это граничное условие на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \eta}$ и проинтегрировать сперва, когда $|\eta| > 1$, а затем, когда $|\eta| < 1$, получим два соотношения, независимые одно от другого и эквивалентные данному граничному условию.

Эти соотношения будут:

$$\begin{aligned} -\bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_2'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} - Q_2(R_1\eta) + \bar{C}_0 = 0 \end{aligned} \quad (1,37)$$

и при $|\eta| < 1$

$$\begin{aligned} \bar{P}_2\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_2'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} + Q_1(R_1\eta) + \bar{C}_0 = 0 \end{aligned} \quad (1,38)$$

Интегралы, стоящие в выражениях (1,37) и (1,38), вычисляются также элементарным путем, как интегралы, стоящие в выражениях (1,14) и (1,11), только коэффициенты будут другие.

Если $|\eta| > 1$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g_k' P_1'(\alpha_k)}{R_1 \eta - \alpha_k}$$

и для $|\eta| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_1'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} = \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right) P_1'(R_1\eta)}{\omega'(R_1\eta)} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g_k' P_1'(\alpha_k)}{R_1 \eta - \alpha_k},$$

где g_k' — вычет функции

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)} = \frac{\bar{R} R_1 \eta^n (R_1^{n+1} + \bar{a}_1 R_1^{n-1} \eta^2 + \dots + \bar{a}_n \eta^{n+1})}{R(-n a_n - (n-1) a_{n-1} R_1 \eta - a_1 R^{n-1} \eta^{n-1} + R_1^{n+1} \eta^{n+1})}$$

в точке $\eta = \frac{\alpha_k}{R_1}$.

Интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)}{\omega'(R_1\sigma)} P_2'(R_1\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} \text{ при } |\eta| > 1 = \\ & = - \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(R_1\eta) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g_k'}{R_1 \eta - \alpha_k} - \sum_{k=1}^{\infty} A'_{-k} \eta^{-k} \right\} + \\ & + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\nu=1}^{n+1} \left\{ \frac{R p}{4} \sum_{k=1}^n k \bar{h}_k (R_1 \eta)^{-k-1} + \frac{R p}{2} (R_1 \eta)^{-2} - \sum_{k=1}^{n-2} k \bar{A}_k (R_1 \eta)^{-(k+1)} \right\} \times \\ & \times \frac{g_{\nu}'(R_1)}{R_1 \eta - \alpha_{\nu}} - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} B'_{-k} \eta^{-k} + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \frac{R p}{4} \sum_{k=1}^{n+1} D'_{-k} \eta^{-k} + \right. \\ & \left. + \frac{R p}{2} \left(\frac{h_0'}{(R_1 \eta)^2} + \frac{h_1'}{R_1^2 \eta} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$A'_{-k} = \sum_{\alpha=0}^n \frac{h'_{\alpha} (\alpha - 1 + k) d_{\alpha-1+k}}{R^{\alpha+k}},$$

$$B'_{-k} = \sum_{\nu=\kappa-1}^{n-2} \frac{\nu \bar{A}_{\nu}}{R_1^{\nu+1}} h'_{\nu-\kappa+1},$$

$$D'_{-k} = \sum_{\nu=k-1}^n \frac{\nu \bar{h}_\nu}{R_1^{\nu+1}} h'_{\nu-k+1},$$

и h'_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$ — коэффициенты главной части функции $\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}$ при ее разложении в окрестности бесконечно удаленной точки.

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)} = \sum_{k=0}^n h'_k \eta^k + O\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Условие (1,37) после подстановки в него значений входящих интегралов и после очевидных упрощений запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + Q_2(R_1\eta) + \frac{\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(R_1\eta) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_k}{R_1 \eta - \alpha_k} - \sum_{k=1}^{\infty} A'_{-k} \eta^{-k} \right\} + \\ & + \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} B'_{-k} \eta^{-k} + \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_\nu}{R_1 \eta - \alpha_\nu} \sum_{k=1}^{n-2} k \bar{A}_k (R_1 \eta)^{-(k+1)} - \bar{C}_0' = \\ & = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_k P_1'(\alpha_k)}{R_1 \eta - \alpha_k} + N_1(\eta), \end{aligned} \quad (1,39)$$

где $N(\eta)$ известная функция η и $N_1(\infty) = 0$

$$\begin{aligned} N_1(\eta) = & \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_\nu}{R_1 \eta - \alpha_\nu} \left[\frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^n k \bar{h}_k (R_1 \eta)^{-[k+1]} + \frac{Rp}{2} (R_1 \eta)^{-2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{Rp}{4} \sum D'_{-k} \eta^{-k} + \frac{Rp}{2} \left((R_1 \eta)^{-2} + h'_1 R_1^{-2} \eta^{-1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Если поставить вместо $P_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right)$ и $Q_2(R_1\eta)$ их значение и значение C_0 , взятые из (1,29), (1,26), (1,28), то получим одно из условий для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0

Это условие будет следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa - 1)}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(R_1\eta) \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g'_\nu}{R_1 \eta - \alpha_\nu} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} (R_1 \eta)^{-k} \right\} + \\ & + \frac{\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'(R_1\eta) \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{g'_\nu R_1}{R_1 \eta - \alpha_\nu} - \sum_{k=1}^{\infty} A'_{-k} \eta^{-k} \right\} + \\ & + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right) \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_\nu}{\eta - \alpha_\nu R_1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} R_1^k \eta^{-k} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(R_1 \eta) - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) + \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} (B'_{-k} - R_1^{-k} B_{-k}) \eta^{-k} + \\
& + \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_k - g_k}{R_1 \eta - \alpha_k} \cdot \sum_{k=1}^{n-2} k \bar{A}_n(R_1 \eta)^{-[k+1]} - b_0 = \\
& = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{R g'_k - g_k}{R_1 \eta - \alpha_k} P'_1(\alpha_k) + N(\eta),
\end{aligned} \tag{1,40}$$

где $N(\eta)$ известная функция $N(\eta) = N_1(\eta) + N_2(\eta)$,
а

$$\begin{aligned}
N_2(\eta) = & - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{v=1}^{n+1} \frac{g_v}{R_1 \eta - \alpha_v} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^n k \bar{h}_k(R_1 \eta)^{-[k+1]} + \frac{Rp}{2} (R_1 \eta)^{-2} \right\} - \\
& - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \left\{ \frac{Rp}{4} \sum_{k=1}^{n+1} D_{-k}(R_1 \eta)^{-k} + \frac{Rp}{2} \left(\frac{h_0}{R_1^2 \eta^2} + \frac{h_1}{R_1 \eta} \right) \right\} + \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \times \\
& \times \sum_{v=1}^{n+1} \frac{g_v}{R_1 \eta - \alpha_v} + \frac{\kappa_1 \mu - \kappa \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} (R_1 \eta)^{-1} - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{\bar{g}_\kappa R_1}{\eta - R_1 \alpha_\kappa} - \\
& - \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{R_1}{\eta};
\end{aligned} \tag{1,41}$$

$$N(\infty) = 0.$$

Возьмем условие (1,38). Интегралы, входящие в это условие, будут равны:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1 \eta)} P'_1(R_1 \eta) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} = \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1 \eta)} P'_1(R_1 \eta) - \sum_{v=1}^{n+1} \frac{R_1 g'_v P'_1(\alpha_v)}{R_1 \eta - \alpha_v}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)}{\omega'(R_1 \eta)} P'_2(R_1 \eta) \frac{d\sigma}{\sigma - \eta} = & - \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=0}^{n-2} A'_k \eta^k + \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=0}^{n-2} B'_k \eta^k - \\
& - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{Rp}{4} D'_k + \frac{Rp}{2} \frac{h'_k + 2}{R_1^2} \right) \eta^k;
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A'_k = & \sum_{v=1}^{n-k+1} \frac{v h_{v+\kappa+1} \alpha_v}{R_1^{v+1}}; \quad D'_k = \sum_{v=1}^{n-[k+1]} \frac{v \bar{h}_v h'_{v+\kappa+1}}{R_{v+1}}; \\
B'_k = & \sum_{v=1}^{n-[k+1]} \frac{v A_v h'_{v+\kappa+1}}{R_1^{v+1}}.
\end{aligned} \tag{1,42}$$

Подставляя в (1,38) полученные значения интегралов, значения входящих функций, взятых из (1,24) и (1,33), и значение $\bar{C}_0$, получим второе условие, связывающее коэффициенты функций φ_0 и ψ_0

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa\mu_1+\mu}{\mu(\kappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{\kappa_1\mu-\kappa\mu_1}{\mu(\kappa_1+1)}\varphi\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)+\frac{\mu_1(\kappa-1)-\mu(\kappa_1-1)}{\mu(\kappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}A_k(R_1\eta)^k- \\ & -\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\kappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n+2}A_k\left(\frac{\eta}{R_1}\right)^k-\left\{\sum_{\kappa=0}^{n-2}B_k(R_1\eta)^k\right\}\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\kappa_1+1)}+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\kappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}B'_k\eta^k- \\ & -\frac{\kappa\mu_1+\mu}{\mu(\kappa_1+1)}\sum_{\kappa=0}^{n-2}A'_k\eta^k+\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right)-\omega\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)}P_1'(R_1\eta)- \\ & -\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(R_1g'_\nu-g_\nu)P_1'(\alpha_\nu)}{R_1\eta-\alpha_\nu}+b_0=M(\eta), \end{aligned} \quad (1,43)$$

где

$$M(\eta) = \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\alpha_1 + 1)} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{n-2} \left(\frac{Rp}{4} D_k' + \frac{Rp}{2} \frac{h'_{k+2}}{R_1^2} \right) \eta^k \right\} - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\alpha_1 + 1)} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{n-2} \left(\frac{Rp}{4} D_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Rp}{2} h_{k+2} \right) R_1^k \eta^k \right\} - \frac{\alpha_1 \mu + \mu_1}{\mu(\alpha_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=0}^n h_k R_1^k \eta^k - \frac{\alpha_1 \mu + \mu_1}{\mu(\alpha_1 + 1)} \frac{Rp}{2} R_1 \eta - \\ - \frac{\mu - \mu_1}{\mu(\alpha_1 + 1)} \left\{ \frac{Rp}{2} \frac{\eta}{R_1} + \frac{Rp}{4} \sum_{\kappa=0}^n h_k \left(\frac{\eta}{R_1} \right)^k \right\} \quad (1,44)$$

Полученные соотношения (1,40) и (1,43) решают поставленные задачи, то есть из них определяются коэффициенты a_n и b_n функций φ_0 и ψ_0 , а по ним коэффициенты всех введенных функций.

В самом деле, в равенстве (1,40) каждый член левой части — регулярная функция вне круга радиуса единицы и может быть представлена в виде ряда по отрицательным степеням η .

Благодаря наличию членов B_k , A_k и A_{-k} см. (1,25) и (1,22), коэффициент при η первой степени будет содержать n первых коэффициентов функции φ_0 , при второй степени η будет содержать $n+1$ коэффициент функции φ_0 и т. д.

Так что при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях η в равенстве (1,40) мы получим бесконечную систему уравнений вида

[illegible]

где α_k, β_k и l_k известные числа, подсчитанные из (1,40).

В соотношении (1,43) член

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{R_1}{\eta}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{1}{R_1\eta}\right)}{\omega'(R_1\eta)} P_1'(R_1\eta) \cdot$$

имеет нуль n -го порядка и только через этот член (1,43) входит функция ψ_0 , коэффициенты которой определяются.

Если разложить левую часть (1,43) около нуля, то коэффициенты при степенях η , начиная от 0 до $n-1$ включительно, за исключением b_0 , не будут содержать коэффициентов функции ψ_0 , а будут содержать $n-1$ первых коэффициентов функции φ_0 , которые появятся от членов как непосредственно содержащих функцию φ_0 , так и благодаря наличию членов A_k и B_k , $k=0, 1, 2, \dots, (n-2)$. Каждый член A_k и B_k является линейной комбинацией из $n-1$ первых коэффициентов функций φ_0 .

При сравнении коэффициентов правой и левой части при одинаковых степенях η , мы получим n первых линейных уравнений, которые будут содержать n неизвестных, $n-1$ коэффициент функции φ_0 и b_0 .

Решая эту систему, мы определим входящие в нее неизвестные. Присоединяя теперь к уравнениям (1,45) уравнения, полученные из (1,43), в результате сравнения коэффициентов, начиная от степени n и выше, мы получим бесконечную систему уравнений, которая решается последовательно, при этом каждый раз приходится решать систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Поступая таким образом, мы определим коэффициенты функций φ_0 и ψ_0 в такой форме:

$$a_k = \delta_k + \sum_{\kappa=1}^{n+1} \gamma_{\kappa} P_1'(a_{\kappa}),$$

$$b_k = \delta_k' + \sum \gamma_k' P_1'(a_k),$$

где δ_k , δ_k' , γ_k и γ_k' известные числа, а $P_1'(a_k)$ неизвестные.

Некоторые из чисел $P_1'(a_k)$ могут быть одинаковыми.

Возьмем теперь выражение для функции $P_1(\zeta)$ и заменим функции $\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ и $\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ соответствующими рядами. Возьмем в этих рядах l членов функции ψ_0 и m членов функции φ_0 . Так как ряды этих функций есть ряды, сходящиеся на круге радиуса единицы, то коэффициенты их должны стремиться к нулю. Мы можем взять l и m настолько большими, что $l+1$ -ый коэффициент функции ψ_0 и $m+1$ -ый коэффициент функций φ_0 не будут влиять на принятую точность вычислений, при решении конкретного примера, а поэтому мы можем положить в функции ψ_0 все коэффициенты, начиная с $l+1$ -го, а в функции φ_0 начиная с $m+1$ -го, равными нулю.

Таким образом, в выражение для функции $P_1(\zeta)$ будут входить $n+1$ неизвестных чисел $P_1'(a_k)$. Продифференцируем полученное выражение по ζ и подставим в правую и левую часть $\zeta = a_k$, $k=1, 2, \dots$

..., $n+1$, мы получим, если все $P'_i(\alpha_k)$ различны, $n+1$ уравнение для определения $P'_1(\alpha_k)$.

Найденное из этих уравнений значение $P'_1(\alpha_k)$ подставим в выражение для коэффициентов функций φ_0 , ψ_0 и мы определим коэффициенты функций φ_0 , ψ_0 с принятой при вычислении точностью. Зная числовые значения коэффициентов функций φ_0 , ψ_0 и числовое значение $P'_1(\alpha_k)$, мы определим значение коэффициентов всех введенных нами функций.

Если положить в $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{g_1}{\zeta} + \dots + \frac{g_n}{\zeta^n}\right)$ все $g_\nu = 0$, $\nu = 2, 3, \dots, n$, то условия (1,40) и (1,43) упростятся и после незначительных преобразований примут вид:

для $|\eta| \geq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa_1 - 1)\mu - (\kappa - 1)\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{R_1\eta(1 + mR_1^2\eta^2)}{R_1^2\eta^2 - m} \varphi'_0(R_1\eta) + \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{R_1\eta(R_1^2 + m\eta^2)}{R_1^2\eta^2 - m} \times \\ & \times \varphi'_0(R_1\eta) - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{\eta(R_1^2 + m\eta^2)}{R_1(\eta^2 - mR_1^2)} \varphi'_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) + \\ & + \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(R_1\eta) + \frac{(R_1^2 - m^2)(R^2 - 1)}{R_1^2} \frac{R_1\eta P'_1(\sqrt{m})}{R_1^2\eta^2 - m} = \\ & = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp(1 + m^2)R_1\eta}{4 \eta^2 - mR_1^2} + \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} (2 - m) \frac{(1 - R_1^2)(m\eta^2 - 1)}{R_1\eta(R_1^2\eta^2 - m)} - \\ & - \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp(1 + m^2)R_1\eta}{4 R_1^2\eta^2 - m} - \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp R_1}{4 \eta} - \frac{\kappa_1\mu - \kappa\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} \frac{1}{R_1\eta} \quad (1,44) \end{aligned}$$

где $g_1 = m$;

для $|\eta| \leq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_1\mu - \kappa\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \varphi_0\left(\frac{1}{R_1\eta}\right) + \frac{\kappa\mu_1 + \mu}{\eta(\kappa_1 + 1)} \varphi_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{(1 - R_1^2) R_1\eta(m\eta^2 - 1) P'_1(R_1\eta)}{R_1^2\eta^2 - m} + \\ & + \frac{(1 - R_1^2)(R_1^2 - m^2)}{R_1^2} \frac{R_1\eta P'_1(\sqrt{m})}{R_1^2\eta^2 - m} = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp(m - 2)}{4} \frac{\eta}{R_1} - \\ & - \frac{\kappa_1\mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{Rp}{4} R_1\eta(m - 2). \quad (1,45) \end{aligned}$$

Эти условия дают решение задачи о растяжении бесконечной пластинки с впаянным эллиптическим кольцом, материал которого отличен от материала пластинки.

Функции P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 , соответствующие этой задаче, получатся из формул (1,23), (1,24), (1,25), (1,26), если произвести в них необходимое упрощение, вытекающее из принятых допущений относительно коэффициентов g , в отображающей функции.

Нами произведены вычисления напряжений в отдельных точках, расположенных по контуру спая и по внутреннему контуру кольца при следующих данных:

$$m=0,2356, \quad R_1=0,68644, \quad \mu=4,42 \cdot 10^5,$$

$$\mu_1=8,10 \cdot 10^5, \quad \kappa=\kappa_1=2,08.$$

При этих данных отношение больших полуосей, ограничивающих кольцо, будет равно 1,2, т. е. $\frac{a_1}{a_2}=1,2$, материал кольца — сталь, пластинки — медь.

Результат вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру для двух видов растяжения пластинки приводится в таблице 1-й.

Пластинка ориентирована так, что большая полуось впаянного кольца лежит на оси OX .

Таблица 1-я

РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ OX

Град.	В пластинке			В кольце	
	Напряжения по контуру спая			По конт. спая	На своб. конт.
ϑ	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\varrho\varrho}/p$	$\widehat{\varphi\varphi}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$	$\widehat{\theta\theta}/p$
0	0,234	0,618	-0,000	0,250	-5,88
10	0,270	0,598	-0,399	0,349	-3,97
20	0,365	0,545	-0,646	0,556	-1,13
30	0,491	0,468	-0,712	0,793	0,67
40	0,622	0,382	-0,657	1,03	1,67
50	0,737	0,303	-0,548	1,26	2,23
60	0,824	0,243	-0,426	1,46	2,55
70	0,883	0,201	-0,277	1,52	2,72
80	0,919	0,175	-0,137	1,63	2,81
90	0,932	0,165	-0,000	1,64	2,83

РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ ОУ

Таблица 2-я

Град.	В пластинке			В кольце	
	Напряжения по контуру спая			По конт. спая	По своб. конт.
	$\hat{\theta}\theta/p$	$\hat{\rho}\rho/p$	$\hat{\rho}\theta/p$	$\hat{\theta}\theta/p$	$\hat{\theta}\theta/p$
0	1,25	1,15	0,000	2,01	10,4
10	1,22	1,01	0,656	1,99	7,70
20	1,11	0,719	1,01	1,89	3,77
30	0,896	0,461	1,06	1,52	1,34
40	0,653	0,290	0,950	1,13	0,0275
50	0,429	0,190	0,764	0,753	-0,714
60	0,246	0,140	0,562	0,411	-1,15
70	0,114	0,120	0,339	0,164	-1,38
80	0,379	0,109	0,184	0,0435	-1,49
90	0,442	0,104	0,000	0,0144	-1,52

Для большей наглядности на рис. 1-м даны графики распределения напряжений по контуру спая кольца *В* с пластинкой *А* при раз-

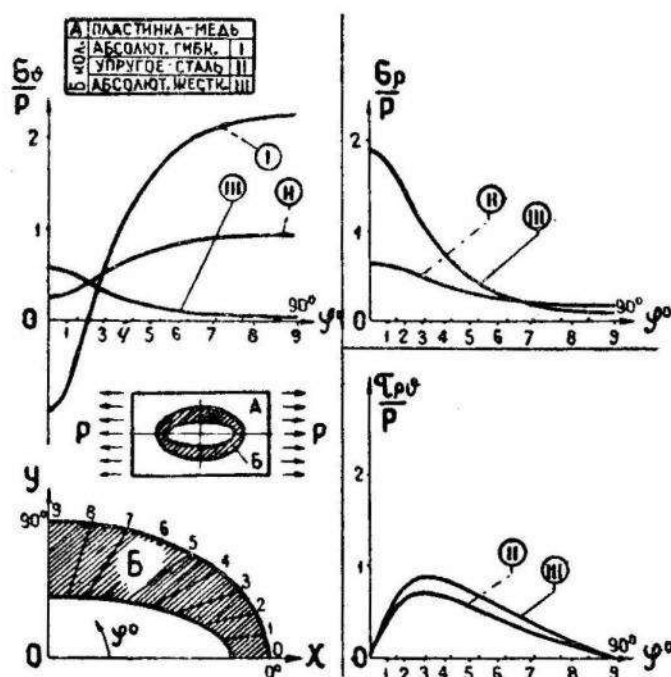


Рис. 1.

личных жесткостях кольца, когда пластинка растягивается вдоль большой полуоси OX . Первый вариант — в пластинку A не впаяно кольцо или, как мы говорим, впаяно абсолютно гибкое кольцо. Второй вариант, когда в медную пластинку впаяно стальное кольцо и третий — пластинка с впаянным, абсолютно жестким кольцом. (Рис. 1).

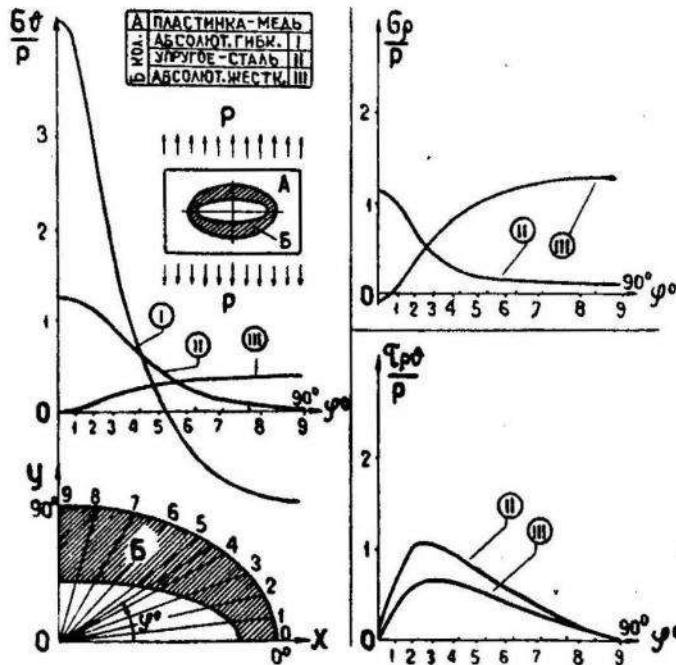


Рис. 2.

При построении графиков точкам 0, 1, 2, 3, и т. д. соответствует изменение угла 0, 10, 20, 30 и т. д.

На рис. 2-м сделано то же самое, но только для случая, когда пластинка растягивается вдоль малой полуоси.

Если же взять отображающую функцию

$$z = \left(\xi + \frac{g_n}{\xi^n} \right) \text{ и положить}$$

в ней $n=2$, $g_n=0,11186$ и $R_1=0,69491$, а потом произвести соответствующие упрощения в выражениях как для функций P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 , так и в граничных условиях на внутреннем контуре кольца, то условия (1.40) и (1.43) превратятся в условия для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0 в растянутой пластинке с впаянным криволинейным треугольным кольцом. Результаты вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру кольца приведены в 3-й таблице.

Таблица 3-я

Результаты вычислений напряжений по контуру спая и по свободному контуру кольца.

	Град.	В пластинке по контуру спая			В кольце по конт. спая	В кольце по своб. конт.
		$\bar{\sigma}_\theta/p$	$\bar{\sigma}_\varphi/p$	$\bar{\tau}_{\theta\varphi}/p$	$\bar{\sigma}_\theta/p$	$\bar{\sigma}_\varphi/p$
0	0	0,209	0,595	0,000	-2,023	-9,105
1	10	0,255	0,498	-0,285	-0,222	-3,082
2	20	0,328	0,332	-0,470	1,110	-0,682
3	30	0,405	0,199	-0,498	0,687	0,0288
4	40	0,510	0,0953	-0,468	0,0533	0,345
5	50	0,623	0,0344	-0,453	0,732	0,540

Продолжение таблицы 3

	Град.	В пластинке по контуру спая			В кольце по конт. спая	В кольце по своб. конт.
		$\bar{\sigma}_{\theta}/p$	$\bar{\sigma}_{\varphi}/p$	$\bar{\sigma}_{\theta}/p$	$\bar{\sigma}_{\varphi}/p$	$\bar{\sigma}_{\theta}/p$
6	60	0,738	0,0146	-0,433	1,772	0,719
7	70	0,870	0,0188	-0,404	2,194	0,951
8	80	0,993	0,0710	-0,380	2,087	1,303
9	90	1,082	0,206	-0,299	1,954	1,867
10	100	1,102	0,456	-0,0619	1,504	2,894
11	110	0,979	0,847	0,437	0,161	5,002
12	120	0,872	1,087	1,133	-0,256	3,215
13	130	0,950	0,936	1,388	1,290	-3,228
14	140	0,933	0,799	1,083	-1,374	-2,942
15	150	0,821	0,793	0,695	-0,184	-2,455
16	160	0,737	0,812	0,404	-0,797	-2,161
17	170	0,686	0,838	0,219	0,0883	-2,004
18	180	0,666	0,863	0,000	0,744	-1,954

На рис. 3-м приведены графики распределения напряжений по контуру спая кольца с пластинкой для тех же самых вариантов, что и для эллиптического кольца.

В 4-й таблице даны числовые значения напряжений по контуру спая и по свободному контуру криволинейного прямоугольного кольца. Отображающая функция была следующей $z=0,98347\left(\zeta+\frac{0,259866}{\zeta}-\frac{0,039710}{\zeta^3}\right)$ и $R_1=0,76590$.

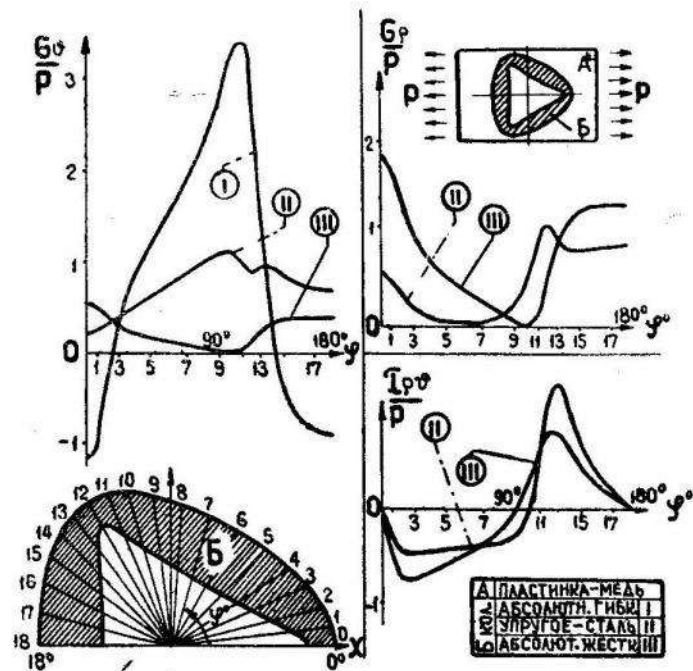


Рис. 3.

Таблица 4-я

Прямоугольное упругое кольцо, растяжение вдоль оси OX

Напряжения в пластинке по контуру спая					Напряжение в кольце	
					По контуру спая	По свобод. контуру
	град. φ	$\bar{\sigma}_\theta/p$	$\bar{\sigma}_\varphi/p$	$\bar{\tau}_{\theta\varphi}/p$	$\bar{\sigma}_\theta/p$	$\bar{\sigma}_\varphi/p$
1	0	0,155	0,259	-0,000	-0,3546	-1,295
2	10	0,204	0,292	-0,364	-0,309	-1,184
3	20	0,349	0,392	-0,716	-0,797	-0,514
4	30	0,527	0,548	-0,913	0,832	1,787
5	40	0,720	0,585	-0,757	1,015	3,896
6	50	0,908	0,412	-0,454	1,558	3,302
7	60	0,999	0,216	-0,237	1,833	2,451
8	70	1,019	0,085	-0,114	1,845	1,959
9	80	1,012	0,019	-0,049	1,836	1,722
10	90	1,004	0,00240	-0,000	1,832	1,653

На рис. 4-м построены графики распределения напряжений по контуру спая. Принцип построения графика был тот же, что и для всех предыдущих колец.

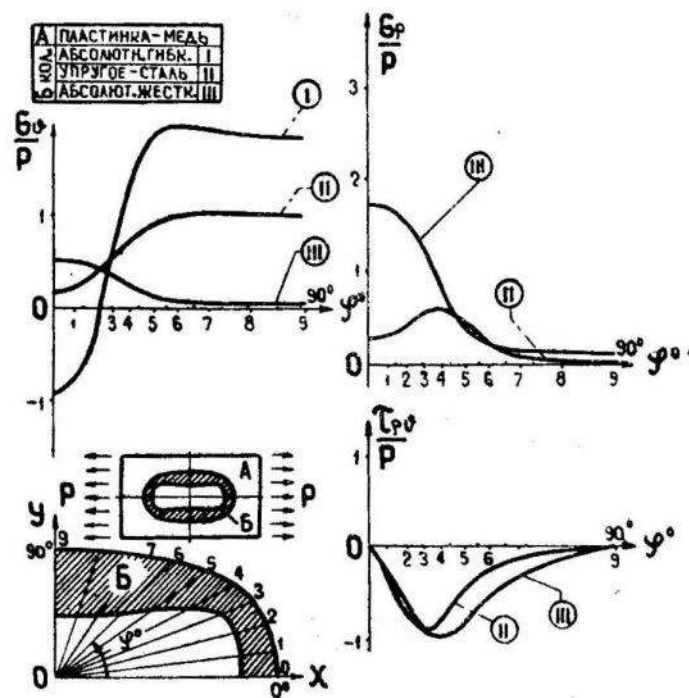


Рис. 4.

Приведенные таблицы и графики дают возможность судить о влиянии жесткости кольца на распределение напряжений по контуру спая. Из приведенных графиков видно, что числовые значения напряжений по контуру спая в пластинке с впаянным упругим кольцом будут находиться между числовыми значениями напряжений для соответствующих точек с впаянными, абсолютно гибким и абсолютно жестким кольцами¹.

Если для пластинки изменить условие на бесконечности и взять его таким, чтобы ему соответствовали функции φ и ψ в виде полинома n -ой степени, то есть, чтобы функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ на бесконечности имели бы полюс n -го порядка, то метод решений задачи будет тот же. В условиях (1,40) изменится только функция $N(\eta)$ и функция $M(\eta)$ в условиях (1,43); что касается левой части, то она останется без изменения. Так, например, если для пластинки с впаянным эллиптическим кольцом функции φ и ψ взять в таком виде:

$$\varphi(\xi) = \frac{A_1 R^2}{8} \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right)^2 + \varphi_0(\xi); \quad \psi(\xi) = -\frac{A_1 R^2}{8} \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right)^2 + \psi_0(\xi),$$

что будет соответствовать изгибу (3)².

Условия для определения коэффициентов функций φ_0 и ψ_0 в этом случае будут следующие:

для $|\eta| < 1$

$$\begin{aligned} & \frac{(\kappa_1 - 1)\mu - (\kappa - 1)\mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{R_1 \eta (1 + m R_1^2 \eta^2)}{R_1^2 \eta^2 - m} \varphi'_0(R_1 \eta) + \\ & + \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{(R_1^2 + m \eta^2) R_1 \eta}{R_1^2 \eta^2 - m} \varphi'_0(R_1 \eta) - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{(R_1^2 + m \eta^2)}{R_1 (\eta^2 - m R_1^2)} \varphi'_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) + \\ & + \frac{\kappa_1 \mu + \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0(R_1 \eta) - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) - b_0 = \frac{1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{A_1 R^2}{8} M_{21}(\eta) - \\ & - \frac{(1 - R_1^2)(m^2 - R_1^2)}{2 R_1^2} \left(\frac{P'_1(\sqrt{m})}{R_1 \eta - \sqrt{m}} + \frac{P'_1(-\sqrt{m})}{R_1 \eta + \sqrt{m}} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{21}(\eta) = & \frac{\kappa \mu_1 + \mu_1 m (2 - m) (R_1^4 - 1) + (1 - m)^2 \mu (R_1^4 + \kappa_1)}{R_1^2 \eta^2} + \\ & + 2 \{ \mu (1 - m)^2 + \mu_1 (m^2 \kappa - 1) + 2 m \mu_1 \} \cdot \frac{(1 - R_1^2)(m \eta^2 - 1)}{R_1^2 \eta^2 (R_1^2 \eta^2 - m)}; \end{aligned}$$

для $|\eta| \leq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa \mu_1 + \mu}{\mu(\kappa_1 + 1)} \varphi_0\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + \frac{\kappa_1 \mu - \kappa \mu_1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \varphi_0\left(\frac{1}{R_1 \eta}\right) + b_0 + \frac{(1 - R_1^2)(m \eta^2 - 1)}{R_1^2 \eta^2 - m} P'_1(R_1 \eta) = \\ & = \frac{1}{\mu(\kappa_1 + 1)} \frac{A_1 R^2}{8} M_{11}(\eta), \end{aligned}$$

¹ Активное участие в составлении графиков и таблиц принимали студентки Львовского госуниверситета: Козлинская А. В., Старухина С. Я. и Петракова Л. С., за что и выражаю им благодарность.

² В статье (3) вкралась неточность. Эта формула исправляет ее.

где

$$M_{11}(\eta) = \frac{(1-m)^2(\kappa_1 \mu R_1^2 - 1) - [\kappa_1 \mu_1 m^2 - (2m-1)\mu_1](1+R_1^2)}{R_1^2} \cdot \eta - \\ - 2\{\mu(1-m)^2(\kappa_1 - 1) + 2\mu_1(m\kappa + 1 + m^2) - 2m\mu_1\}.$$

Если полученное условие сравнить с условиями (1,44), (1,45), то они будут отличаться только правыми частями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. — Некоторые задачи математической теории упругости, издание АН СССР, 1935.
2. Г. Н. Савин. — О некоторых контактных задачах теории упругости, Труды Тбилисского математического института, т. XIV, 1946.
3. М. П. Шереметьев. — Чистий згин полоси (балки), ослабленої еліптичним кільцем, або шайбою, Наукові записки Львівського держуніверситету ім. Ів. Франка, т. V, випуск I, 1947.

А. ГЛАУБЕРМАН

кандидат физико-математических наук

К ТЕОРИИ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Кристаллы чистых металлов характеризуются тремя возможными типами структуры: кубическим гранецентрированным, кубическим объемноцентрированным и гексагональным плотноупакованным. Как известно, силы сцепления в металлах обуславливаются кулоновским притяжением положительных ионов, находящихся в узлах кристаллической решетки, и коллективизированных электронов, снующих между ними. Эти силы притяжения несколько ослабляются силами отталкивания, действующими между одноименными зарядами, но значительно превышают последние, так как средние расстояния между разноименными зарядами гораздо меньше, чем между одноименными. Из этих представлений следует, что кулоновское взаимодействие двух полурешеток бесконечного металлического кристалла, разделенных плоскостью, делящей кристалл на две электрически нейтральных части, должно сводиться к притяжению. Таким образом, знак энергии кулоновского взаимодействия образующихся полурешеток для реальных металлических структур должен быть отрицательным. С этой точки зрения энергия кулоновского взаимодействия полурешеток бесконечного кристалла может служить некоторой характеристикой устойчивости структуры. Электростатическая и статистическая теории характерных металлических структур [1] приводит, как и следует ожидать, к отрицательным значениям энергии взаимодействия двух половин бесконечного кристалла.

Будем представлять металл предполагаемой простой кубической структуры, состоящим из ионной пространственной решетки, погруженной в „жидкость“, состоящую из коллективизированных электронов, согласно модели Френкеля. Рассматривая бесконечный металл, распределение электронной жидкости можно считать равномерным, характеризующимся постоянной плотностью заряда ρ^- . В качестве элементарной ячейки кристалла простой кубической структуры выберем куб, равномерно заполненный электронной жидкостью, в центре которого находится положительный ион. Пусть плоскость, делящая бесконечный кристалл на две электрически нейтральных части, будет координатной плоскостью $z=0$. Для вычисления электростатической энергии взаимодействия двух частей кристалла, разделенных плоскостью $z=0$, нужно вычислить электрический потенциал, создаваемый полурешеткой кристалла во внешней по отношению к ней области (рис. 1).

Для нахождения этого потенциала φ_a мы рассмотрим решение уравнения Лапласа для внешней области

$$\Delta^2 \varphi_a = 0 \quad (1)$$

и Пуассона

$$\Delta^2 \varphi_i = -4\pi \rho \quad (2)$$

для внутренней области полурешетки, где φ_i потенциал, а ρ плотность электрического заряда в этой области.

Если ось z направить наружу по отношению к области, занятой рассматриваемой полурешеткой, то граничные условия на бесконечности будут иметь вид:

$$\varphi_a = 0 \quad \text{при } z = +\infty \quad \text{и}$$

φ_i представляется триякопериодической функцией с периодом, равным постоянной решетки при $z = -\infty$. Кроме того, на поверхности $z = 0$ должны выполняться условия непрерывности потенциала и его первой производной по z , т. е.

$$\varphi_a = \varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \quad \text{при } z = 0 \quad (3)$$

Величина ρ может быть представлена в виде суммы

$$\rho = \rho^+ + \rho^-,$$

где $\rho^- = \text{const.}$ и $\rho^+ = e\delta(r - r_k)$, где r_k определяет равновесное положение иона в узле решетки.

Представим плотность заряда ρ в виде тройного ряда Фурье:

$$\rho = \sum'_{\alpha, \beta, \gamma} \rho_{\alpha, \beta, \gamma} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma(z + d), \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{\pi l}{d}$, $\beta = \frac{\pi m}{d}$, $\gamma = \frac{\pi n}{d}$ причем l, m, n целые неотрицательные числа, а d половина постоянной решетки a и штрих у знака суммы означает отсутствие постоянного члена. Будем искать решения в виде рядов

$$\varphi_a = \sum'_{\alpha, \beta} f(z) \cos \alpha x \cos \beta y, \quad (5)$$

$$\varphi_i = \sum'_{\alpha, \beta} g(z) \cos \alpha x \cos \beta y.$$

Условия (3) позволяют определить коэффициенты, входящие в функции $f(z)$ и $g(z)$ соответственно, в виде

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} (-1)^n \frac{2\pi \rho_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad (6)$$

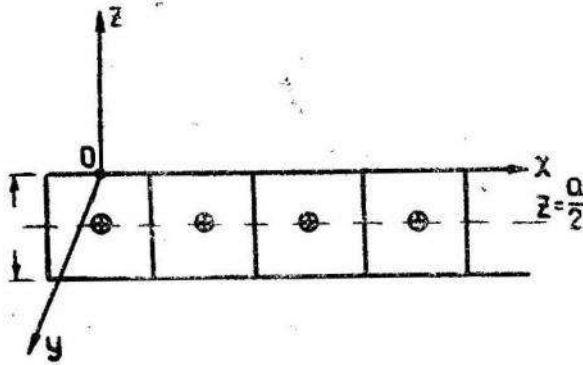


Рис. 1.

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} (-1)^{n+1} \frac{2\pi\rho\alpha\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Интересующее нас решение φ_a выразится при этом формулой

$$\varphi_a = \sum'_{\alpha, \beta, \gamma} (-1)^n \frac{2\pi\rho\alpha\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} e^{-\pi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \cos \alpha x \cos \beta y \quad (z > 0) \quad (7)$$

Для вычисления энергии кулоновского взаимодействия двух полурешеток бесконечного кристалла, представим вторую полурешетку состоящей из отдельных столбиков, основанием которых служат квадраты, лежащие в плоскости $z=0$ с площадью, равной $4d^2$. Энергия взаимодействия полурешетки с одним из этих столбиков второй половины решетки u_{12} будет равна

$$u_{12} = e \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_a(z_k), \quad (8)$$

где e представляет собой заряд иона, а $z_k = (2k-1)d$ — координаты ионов, находящихся в рассматриваемом столбике (см. рис. 1).

Подставляя в (8) выражение для потенциала φ_a , (7), получим для энергии взаимодействия на единицу площади поверхности раздела

$$u = \frac{e^2}{2d^3} \sum_{l, m} \frac{e^{-\pi\sqrt{l^2 + m^2}}}{\sqrt{l^2 + m^2} (l^{\pi\sqrt{l^2 + m^2}} - l^{-\pi\sqrt{l^2 + m^2}}) (1 - l^{-2\pi\sqrt{l^2 + m^2}})}, \quad (9)$$

где l и m одновременно в нуль не обращаются. Из формулы (9) видно, что вычисленная электростатическая энергия взаимодействия двух полурешеток металла простой кубической структуры, рассчитанная на единицу площади (поверхности $z=0$) всегда положительна.

$$u > 0. \quad (10)$$

Полученный результат может служить целям объяснения того факта что металлы не кристаллизуются в виде кристаллов с простой решеткой

В соотношениях (9) и (10) величина u представляет собой только кулоновскую часть энергии взаимодействия двух полурешеток бесконечного металла, так как выше приведенный расчет не учитывает обменной и кинетической энергии электронов. Полученный результат тем не менее (при сравнении с аналогичными расчетами для других структур) свидетельствует во всяком случае о том, что простая кубическая структура является наименее устойчивой, т. к. кулоновская часть энергии взаимодействия для всех, реально осуществляющихся металлических структур, является отрицательной. Соотношение (10) говорит о том, что кулоновское взаимодействие двух частей металла простой кубической структуры заключается в отталкивании этих частей друг от друга. Уточнение теории путем рассмотрения ионов металла как пространственно протяженных частиц, а не как точечных зарядов, как предполагается в нашем расчете, не нарушает неравенства (10), а вносит лишь поправку к абсолютной величине u .

Отметим в заключение, что существование простых структур в интерметаллических сплавах типа АВ (например, $CuAu$), согласуется

с изложенной электростатической теорией. В интерметаллических сплавах возможность существования простой кубической структуры объясняется, вероятно, тем, что неравномерность распределения электронной жидкости в них создает условия, отличные от условий в решетке чистого металла. При неодинаковости компонент сплава, плотность электронной жидкости вблизи атомов одного сорта должна быть больше чем вблизи атомов другого сорта, таким образом, атомы разного сорта ведут себя так, как если бы одни из них имели избыточный отрицательный, а другие положительный заряд, т. е. так, как если бы одни из них вместе с окружающей их электронной жидкостью представляли собой отрицательные, а другие положительные ионы [2].

Вследствие этого для сплавов можно было бы при вычислении энергии взаимодействия двух полурешеток применить схему расчета, подобную применявшейся для гетерополярных кристаллов [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Глауберман — ЖФХ, 23, № 2, 115, 1949.
 2. Ю. Булашевич — Дисс. Ленинград, 1939.
 3. А. Глауберман — ЖФХ, 23, № 2, 124, 1949.
-

В. С. МІЛІЯНЧУК

доцент, кандидат фізико-математичних наук

ЕФЕКТ ЗЕЕМАНА ЛІНІЙ, ВИМУШЕНИХ НЕОДНОРІДНИМ ЕЛЕКТРИЧНИМ ПОЛЕМ

У праці подано правила відбору і визначено поляризацію компонент для ефекту Зеємана ліній, вимушених неоднорідним електричним полем. З теорії випливає, що компоненти $M \rightarrow M \pm 3$ при лонгітудинальному ефекті поляризовані по колу, а при трансверсальному ефекті лінійно поляризовані в напрямі, перпендикулярному до напрямку магнітного поля. Усі інші компоненти ($M \rightarrow M \pm 2$, $M \rightarrow M \pm 1$ і $M \rightarrow M$) як при лонгітудинальному, так і при трансверсальному ефекті частково поляризовані. Інтенсивності компонент розміщені несиметрично. Ефект Зеємана ліній, вимушених неоднорідним полем, порівнюється до ефекту Зеємана спонтанних ліній, вимушених однорідним електричним полем та ефектом Пашена-Бака надтонкої структури.

Зроблено спробу пояснити вплив тиску на ефект Зеємана ліній $^2S_{\frac{1}{2}}^2P_{\frac{1}{2}}$ і $^2S_{\frac{1}{2}}^2S_{\frac{3}{2}}$ лужних металів. Вплив сусідніх атомів на випромінюючий атом в наближенні застосується дією неоднорідного електричного поля. Таким методом можна пояснити спостережену асиметрію інтенсивності заборонених компонент Зеємана. Висновки даної теорії цілком відповідають експериментальним результатам.

В дузі спостережено переміщення термів P натрію, яке є пропорціональне третьому степеню головного квантового числа. Таке переміщення не може бути результатом квадратного ефекту Штарка, в якому воно зростає пропорціонально сьомому степеню головного квантового числа, а може бути наслідком ефекту першого порядку. Також спостережено заборонені лінії, що відповідають переходам поміж парними і непарними термами. Прикладом таких переходів є лінії серії $2^2S - m^2F$. Такі переходи ($\Delta L = -3$) заборонені в однорідному електричному полі [1]. Аномальна зміна інтенсивності в серії і умови, в яких вони виникають, доводить, що ці лінії не відповідають спонтанним октупольним переходам, яких зрештою досі не спостережено. В спектрах ZnI , IdI і HgI спостерігається заборонена інтеркомбінаційна лінія $1^1S_0 - 2^3P_2$ з інтенсивністю великою в порівнянні з інтенсивністю лінії $1^1S_0 - 2^3P_0$. Відношення інтенсивностей обох ліній доводить, що лінія $1^1S_0 - 2^3P_2$ не виникає внаслідок впливу магнітного моменту ядра на зовнішні електрони. Ті явища доводять існування впливу неоднорідності між-атомного електричного поля, яке дає ефект першого порядку [2] і вимушує заборонені переходи між парними і непарними термами [3]. Найбільш певним способом відрізнення ліній, що відповідають різним родам промінювання, є дослідження ефекту Зеємана. Таким способом доведено існування квадрупольових і магнітних дипольових ліній. Ефект Зеємана є також найбільш переконливим методом відрізнення ліній квадрупольових від ліній, вимушених однорідним електричним полем. Можливість виникнення ліній, вимушених неоднорідним полем, робить доцільним визначення властивостей ефекту Зеємана цих ліній. Крім

того, магнітне поле може також створювати умови, в яких скріплюється неоднорідність поля. Прикладом такої вторинної дії магнітного поля є вплив на виникнення лінії $1^1S_0 - 2^3P_2$ (2270) ртуті та ускладнення ефекту Зеемана лінії H_α водню у Пашена і Бака. Лінії, вимушені в неоднорідному полі, можуть збігатися із спонтанними диполевыми лініями. Вторинна дія магнітного поля може в зв'язку з цим ускладнити ефект Зеемана спонтанних диполемих ліній.

Завданням цієї праці є визначення правил відбору і поляризації компонент Зеемана ліній, вимушених неоднорідним полем, та порівняння з ефектом Зеемана ліній інших типів.

§ 1. Напрямок зовнішнього магнітного поля приймаємо за напрям осі z ортогональної системи координати, віднесеної до центра маси випромінюючого атома. Нехай на атом діє електростатичне поле: дане скалярним потенціалом $\Phi(x, y, z)$. В початку системи координат є,

$$\Delta\Phi = 0.$$

Розвинувши потенціал у ряд, одержуємо:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \Phi(0, 0, 0) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 - i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_0 \right] (x + iy) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 + \right. \\ & + i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_0 \left. \right] (x - iy) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_0 z + \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 - 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right] (x + iy)^2 + \\ & + \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 + 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right] (x - iy)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 - i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \right] z (x + iy) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 + i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right] z (x - iy) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Припустимо, що розщеплення ефекту неоднорідного поля мале в порівнянні з розщепленням Зеемана. Якщо виключити водень, то випадок цей можна вважати незвичайним. Візьмемо до уваги перехід $k, M \rightarrow k_1, M_1$. Нехай один із станів k і k_1 буде парний, другий — непарний. Методом теорії збурень вичисляємо перше наближення властивої функції. Застосовуючи правила відбору для незбурених диполемих і квадруполемих моментів, дістаємо для окремих переходів збурені диполеми моменти:

$$M \rightarrow M + 3;$$

$$\begin{aligned} (x - iy)_{k, M \rightarrow k_1, M+3} = & A^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[(x - iy)^2]_{k, M \rightarrow i, M+2}^{(0)}}{E(k, M) - E(i, M+2)} \cdot (x - iy)_{i, M+2 \rightarrow k_1, M+3}^{(0)} + \right. \\ & \left. + (x - iy)_{k, M \rightarrow i, M+1}^{(0)} \cdot \frac{[(x - iy)^2]_{i, M+1 \rightarrow k_1, M+3}}{E(k_1, M+3) - E(i, M+1)} \right\}, \end{aligned}$$

$M \rightarrow M+2$:

$$\begin{aligned}
(x - iy)_{k,M \rightarrow k_1,M+2} &= B^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[z(x - iy)]_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M+1)} \cdot (x - iy)_{i,M+1 \rightarrow k_1,M+2}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (x - iy)_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)} \cdot \frac{[z(x - iy)]_{i,M+1 \rightarrow k_1,M+2}}{E(k_1,M+2) - E(i,M+1)} \right\}, \\
(z)_{k,M \rightarrow k_1,M+2} &= A^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[(x - iy)^2]_{k,M \rightarrow i,M+2}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M+2)} \cdot (z)_{i,M+2 \rightarrow k_1,M+2}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (z)_{k,M \rightarrow i,M}^{(0)} \cdot \frac{[(x - iy)^2]_{i,M \rightarrow k_1,M+2}^{(0)}}{E(k_1,M+2) - E(i,M)} \right\},
\end{aligned}$$

 $M \rightarrow M+1$:

$$\begin{aligned}
(x - iy)_{k,M \rightarrow k_1,M+1} &= (x - iy)_{k,M \rightarrow k_1,M+1}^{(0)} + L \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right]_{k,M \rightarrow i,M}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M)} \times \right. \\
&\quad \times (x - iy)_{i,M \rightarrow k_1,M+1}^{(0)} + (x - iy)_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)} \cdot \frac{\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right]_{i,M+1 \rightarrow k_1,M+1}^{(0)}}{E(k_1,M+1) - E(i,M+1)} \Big\}, \\
(z)_{k,M \rightarrow k_1,M+1} &= B^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[z(x - iy)]_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M+1)} \cdot (z)_{i,M+1 \rightarrow k_1,M+1}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (z)_{k,M \rightarrow i,M}^{(0)} \cdot \frac{[z(x - iy)]_{i,M \rightarrow k_1,M+1}^{(0)}}{E(k_1,M+1) - E(i,M)} \right\}, \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x + iy)_{k,M \rightarrow k_1,M+1} &= A^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[(x - iy)^2]_{k,M \rightarrow i,M+2}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M+2)} \cdot (x + iy)_{i,M+2 \rightarrow k_1,M+1}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (x + iy)_{k,M \rightarrow i,M-1}^{(0)} \cdot \frac{[(x - iy)^2]_{i,M-1 \rightarrow k_1,M+1}^{(0)}}{E(k_1,M+1) - E(i,M-1)} \right\},
\end{aligned}$$

 $M \rightarrow M$:

$$\begin{aligned}
(x - iy)_{k,M \rightarrow k_1,M} &= B \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[z(x + iy)]_{k,M \rightarrow i,M-1}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M-1)} \cdot (x - iy)_{i,M-1 \rightarrow k_1,M}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (x - iy)_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)} \cdot \frac{[z(x + iy)]_{i,M+1 \rightarrow k_1,M}^{(0)}}{E(k_1,M) - E(i,M+1)} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z)_{k,M \rightarrow k_1,M} &= (z)_{k,M \rightarrow k_1,M}^{(0)} + L \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{\left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right]_{k,M \rightarrow i,M}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M)} \times \right. \\
&\quad \left. \times (z)_{i,M \rightarrow k_1,M}^{(0)} + (z)_{k,M \rightarrow i,M}^{(0)} \cdot \frac{\left[z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right]_{i,M \rightarrow k_1,M}}{E(k_1,M) - E(i,M)} \right\}, \\
(x + iy)_{k,M \rightarrow k_1,M} &= B^* \sum_{\substack{i \neq k \\ i \neq k_1}} \left\{ \frac{[z(x - iy)]_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)}}{E(k,M) - E(i,M+1)} \cdot (x + iy)_{i,M+1 \rightarrow k_1,M}^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + (x + iy)_{k,M \rightarrow i,M-1}^{(0)} \cdot \frac{[z(x - iy)]_{i,M-1 \rightarrow k_1,M}^{(0)}}{E(k_1,M) - E(i,M-1)} \right\},
\end{aligned}$$

де

$$A = -\frac{1}{8} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 - 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right],$$

$$B = -\frac{1}{2} e \left[\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 - i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right],$$

$$L = -\frac{1}{2} e \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0.$$

$(x \pm iy)_{k,M \rightarrow i,M+1}^{(0)}$, $[(x \pm iy)^2]_{k,M \rightarrow i,M+2}^{(0)}$ і т. д. позначає незбурені диполеві і квадруполеві моменти.

Моменти є гермітовими матричними елементами. Тому легко виписати збурені моменти також для переходів $M+3 \rightarrow M$, $M+2 \rightarrow M$ і $M+1 \rightarrow M$.

З (3) випливають правила відбору для магнітного квантового числа: $M \rightarrow M$, $M \rightarrow M \pm 1$, $M \rightarrow M \pm 2$, $M \rightarrow M \pm 3$. Вставивши в (3) відомі незбурені квадруполеві моменти і диполеві моменти, одержуємо збурені диполеві моменти для переходів: $\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Моменти $x \pm iy$ дають при лонгітудинальному ефекті компоненти, поляризовані по колу; при трансверсальному ефекті компоненти лінійно поляризовані в напрямі, перпендикулярному до магнітного поля (σ -компоненти). Моменти z дають при трансверсальному ефекті π -компоненти; при лонгітудинальному ефекті ці компоненти випадають.

З (3) випливає, що тільки для переходів $M \rightarrow M \pm 3$ одержуємо лише моменти $(x \pm iy)_{M \rightarrow M \pm 3}$ з означеною поляризацією. Для всіх інших переходів дістаємо в загальному випадкові більше як один момент з різними поляризаціями. Тому компоненти $M \rightarrow M \pm 3$ при лонгітудинальному ефекті поляризовані по колу, при трансверсальному — лінійно поляризовані в напрямі, перпендикулярному до напрямку магнітного поля. Компоненти $M \rightarrow M \pm 2$, $M \rightarrow M \pm 1$ і $M \rightarrow M$ частково поляризовані.

Коли електричне поле має осеву симетрію відносно напрямку магнітного поля, тобто коли $A = -\frac{1}{8} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 - 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right] = 0$,

тоді відпадають компоненти $M \rightarrow M \pm 3$. Компоненти $M \rightarrow M \pm 2$ поляризовані по колу при лонгітудинальному ефекті і є σ -компонентами при трансверсальному ефекті. Інші компоненти частково поляризовані.

§ 2. Незбурені квадрупольові моменти, і незбурені дипольові моменти, що відповідають $M \rightarrow M - \delta$, дістаємо з незбурених моментів для переходів $M \rightarrow M + \delta$ способом заміщення в моментах, які відповідають переходам $M \rightarrow M + \delta$, M через $-M$. Наприклад для переходів $J \rightarrow J$ є:

$$\begin{aligned} & [(x + iy)^2]_{M \rightarrow M-2}^{(0)} = \\ & = -2A_{n,L,y \rightarrow n_1,L_1,y} \sqrt{(J+M)(J+M-1)(J-M+1)(J-M+2)}, \\ & [(x - iy)^2]_{M \rightarrow M+2}^{(0)} = \\ & = -2A_{n,L,y \rightarrow n_1,L_1,y} \sqrt{(J-M)(J-M-1)(J+M+1)(J+M+2)}. \end{aligned}$$

В зв'язку з цим абсолютні значення моментів, для переходів $M \rightarrow M + \delta$ і $-M \rightarrow -M - \delta$ є рівні, а інтенсивності компонент, розміщених симетрично відносно нерозщепленої лінії, також рівні.

Внаслідок рівності абсолютних значень незбурених дипольових і квадрупольових моментів для переходів $M \rightarrow M + \delta$ і $-M \rightarrow -M - \delta$ в (3) чисельники для таких переходів є рівними (очевидно коли унормувати властиві функції так, щоб $A_{n,L,J \rightarrow n_1,L_1,J_1}$ були дійсними). Якщо прийняти „слабе“ магнітне поле, тоді для аномального ефекту Зеемана маємо:

$$E(k, M) = E(k) + Mg\omega h, \quad (4)$$

де g означає коефіцієнт Ланде, ω — частоту Лармона, а h — сталу Планка. Коли M змінює знак, змінюється також значення $E(k, M)$. Через те знаменники у (3) для моментів, що відповідають переходам $M \rightarrow M + \delta$ і $-M \rightarrow -M - \delta$, є різні. Отже, інтенсивності компонент Зеемана, розміщених симетрично відносно нерозщепленої лінії, вимушеної неоднорідним полем, є різні. Різниця інтенсивностей є тим

більша, чим більше є відношення $\frac{\omega h}{|E(k) - E(i)|}$, отже, чим ближче до початкового або кінцевого терму лежать збурюючі терми. Така асиметрія інтенсивностей найбільше помітна в ліній, вимушених у неоднорідному полі, коли збурюючі терми належать до того самого мультиплету, що й початковий або кінцевий терм. Несиметричного розміщення інтенсивностей треба сподіватися також у ліній, вимушених однорідним полем. Однак тоді збурюючі терми належать до різних мультиплетів і тому, звичайно, є досить віддалені. Внаслідок цього асиметрія інтенсивностей невелика, і її не спостережено. У мультиплетних ліній, вимушених в неоднорідному полі, асиметрію можна б спостерегти значно легше.

Неоднорідне поле спричинює також розщеплення термів. Переміщення компонент розщеплення в неоднорідному полі є несиметричне відносно нерозщепленої лінії. Внаслідок цього вплив неоднорідності міжмолекулярного поля може проявитися також у несиметричному

розміщенні компонент Зеемана. Зрештою, внаслідок квадратного ефекту Штарка, одержимо також асиметричне переміщення.

§ 3. Лонгітудинальний ефект Зеемана ліній, вимушених неоднорідним полем, відрізняється від ефекту Зеемана спонтанних мультипольних ліній тим, що у спонтанних ліній при лонгітудинальному ефекті виникають лише поляризовані по колу компоненти $M \rightarrow M \pm 1$, а в ліній, вимушених у неоднорідному полі, виникають компоненти, що відповідають усім переходам $M \rightarrow M \pm 3$, $M \rightarrow M \pm 2$, $M \rightarrow M \pm 1$ і $M \rightarrow M$. З них лише компоненти $M \rightarrow M \pm 3$ поляризовані по колу, а всі інші частково поляризовані. При трансверсальному ефекті у спонтанних ліній всі компоненти лінійно поляризовані. У ліній, вимушених у неоднорідному полі, лише компоненти $M \rightarrow M \pm 3$ лінійно поляризовані. Отже, ефект Зеемана ліній, вимушених неоднорідним полем, відрізняється від ефекту Зеемана спонтанних ліній як кількістю компонент, так і їх поляризацією та відносними інтенсивностями. Ефект Зеемана ліній, вимушених у неоднорідному полі, подібний до часткового ефекту Пашена-Бака існуванням частково поляризованих компонент, а відрізняється від нього кількістю компонент.

Різниця між ефектом Зеемана ліній, вимушених неоднорідним полем і ліній, вимушених однорідним полем, невелика. Обидва роди ліній різняться в загальному випадку: 1) кількістю компонент Зеемана; у ліній, вимушених у неоднорідному полі, виникатимуть ще компоненти $M \rightarrow M \pm 3$, 2) у ліній, вимушених в однорідному полі, компоненти $M \rightarrow M \pm 2$ мають кругову або лінійну поляризацію, а в ліній, вимушених у неоднорідному полі, таку поляризацію мають компоненти $M \rightarrow M \pm 3$. Коли неоднорідне поле є осево-симетричне з віссю симетрії, паралельною напрямкові магнітного поля, тобто коли в (3) $A=0$, тоді ефект Зеемана ліній, вимушених у неоднорідному полі, такий самий, як ефект Зеемана ліній, вимушених в однорідному полі.

Переходи, дозволені для дипольного спонтанного промінювання, є дозволеними також для промінювання, вимушеного неоднорідним електричним полем. Тому спонтанні дипольні лінії можуть збігатися з лініями, вимушеними неоднорідним полем. У магнітному полі обидва типи ефекту Зеемана накладатимуться. Це накладання ефекту Зеемана спонтанних дипольних ліній і ліній, вимушених неоднорідним електричним полем, виявиться тим, що:

а) виникнуть нові заборонені компоненти, які відповідають переходам $M \rightarrow M \pm 2$ і $M \rightarrow M \pm 3$, і заборонені компоненти $M \rightarrow M$ та $M \rightarrow M \pm 1$;

б) в зв'язку з цим поляризація компонент буде змінена;

в) інтенсивність компонент буде несиметрично розміщена, що відноситься, в першу чергу, до нових, заборонених, компонент.

У цьому випадкові при трансверсальному ефекті не буде чисто лінійної поляризації. У переходах, в яких у спонтанних ліній виникають компоненти π , виникають також σ -компоненти. Там, де нормально виникають лише σ -компоненти, при накладанні спонтанних ліній і ліній, вимушених неоднорідним полем, виникатимуть також π -компоненти.

В аномальному ефекті Зеемана асиметрія інтенсивностей буде тим більша, чим менше мультиплетне розщеплення термів. Зрештою,

виникнення вимушених переходів є також тим більш ймовірне, чим менше мультиплетне розщеплення термів.

§ 4. Теорію ефекту Зеемана для надтонкої структури [4] перевірено на багатьох елементах [5] як, наприклад рубідію, цезію, бісмуті, талію, кадмію і т. д. У більшості досліджених випадків спостерігали ефект Пашена-Бака надтонкої структури, отже, властиво, надтонку структуру компонент Зеемана. Окрім надтонкої структури, виникають часто компоненти, заборонені правилами відбору для M_I . Тому цікавим є порівняння ефекту Зеемана ліній, вимушених неоднорідним полем, з ефектом Пашена-Бака надтонкої структури. Порівняння є особливо цікавим для випадку, коли вимушені лінії збігаються із спонтанними лініями. Тоді треба сподіватися також виникнення заборонених компонент.

Щоб оцінити відносну інтенсивність „заборонених“ компонент, треба написати властиві функції у першому наближенні. Для „сильного“ магнітного поля у випадку надтонкої структури перше наближення властивої функції можна написати:

$$\psi_i(L, J, I, M_J, M_I) = X_{i, M_J-1} \psi_\infty(L, J, I, M_J-1, M_I+1) + X_{i, M_J} \psi_\infty(L, J, I, M_J, M_I) + X_{i, M_J+1} \psi_\infty(L, J, I, M_J+1, M_I-1), \quad (4)$$

де

$$M_I + M_J = M_F$$

$$X_{M_J, M_J-1} = \frac{A(L, J)}{2g_J\omega} \cdot (J + M_J)(I - M_I),$$

$$X_{M_J, M_J+1} = -\frac{A(L, J)}{2g_J\omega} \cdot (J - M_J)(I + M_I),$$

$$X_{M_J, M_J} = \pm \frac{1}{\sqrt{(I + M_I)(I - M_I)(J + M_J)(J - M_J)}}.$$

$\psi_\infty(n, L, J, M_J, M_I)$ означає властиву функцію для дуже сильного магнітного поля, $A(L, J)$ — інтервальну константу надтонкої структури стану L, J . З (4) одержуємо диполеві моменти для переходу $L, J, M_J, M_I \rightarrow J, L, M_J, M_I$:

$$(q)_{M_J \rightarrow M_{J_1}} = \sum_{\delta=-1}^{\delta=+1} \sum_{\varepsilon=-1}^{\varepsilon=+1} X_{M_J, M_J+\delta} \cdot X'_{M_{J_1}, M_{J_1}+\varepsilon} (q)_{M_J+\delta \rightarrow M_{J_1}+\varepsilon}^{(\infty)}. \quad (5)$$

З (4) і (5) випливає, що, крім дозволених компонент $M_J \rightarrow M_J$ (π -компоненти) і $M_J \rightarrow M_J \pm 1$ (σ -компоненти), дістаємо „заборонені“ π -компоненти $M_J \rightarrow M_J \pm 2$ і $M_J \rightarrow M_J \pm 1$ та заборонені σ -компоненти $M_J \rightarrow M_J$, $M_J \rightarrow M_J \pm 2$ і $M_J \rightarrow M_J \pm 3$. Інтенсивність „заборонених“ π -компонент $M_J \rightarrow M_J \pm 1$ та σ -компонент $M_J \rightarrow M_J$ і $M_J \rightarrow M_J \pm 2$ пропорційна величині $\left| \alpha \frac{A(L, J)}{2g_J\omega} + \beta \frac{A(L_1, J_1)}{2g_{J_1}\omega} \right|^2$, де α і β — коефіцієнти, залежні від L, J, I, M_J, M_I . Інтенсивність σ -компонент $M_J \rightarrow M_J \pm 3$ і π -компонент $M_J \rightarrow M_J \pm 3$ є порядку $\left| \frac{A(L, J) \cdot A(L_1, J_1)}{4g_J \cdot g_{J_1} \omega^2} \right|^2$, отже, звичайно, дуже мала в порівнянні з інтенсивністю інших компонент.

Поминувши надтонку структуру компонент Зеемана, вплив спіну ядра на ефект Зеемана, якщо брати до уваги кількість компонент і їх поляризацію, є такий самий, як вплив неоднорідного осево-симетричного електричного поля з віссю симетрії, паралельною магнітному полю. У загальному випадку π -компоненти $M \rightarrow M \pm 2$ і σ -компоненти $M \rightarrow M \pm 3$ в неоднорідному електричному полі можуть бути сильнішими.

Ефект Пашена-Бака надтонкої структури і вплив неоднорідного міжатомного електричного поля на ефект Зеемана відрізнятимуться відносною інтенсивністю компонент і, в першу чергу, симетрією інтенсивності. У ліній, вимушених неоднорідним полем, розклад інтенсивності компонент є несиметричний. В ефекті Пашена-Бака надтонкої структури інтенсивності компонент, які лежать симетрично відносно нерозщепленої лінії, однакові.

§ 5. Виникнення „заборонених“ компонент в ефекті Зеемана лужних металів досліджував Фріш [6] і інші. Габлер [7], Ангелеттер [8] та Габлер і Томізер [9] спостерігали виникнення „заборонених“ компонент Зеемана при дослідженні впливу тиску на розширення компонент Зеемана. Найбільше досліджень відноситься до цезію. У працях [7] — [9] застосовано „сильне“ магнітне поле (29000 ерстедів), і тому у всіх тих випадках спостерігається ефект Пашена-Бака надтонкої структури. У такому сильному полі, як виходить з (4) і (5), повинні значно послаблюватися „заборонені“ компоненти. При більшому тискові пари спостерігається асиметрія інтенсивності заборонених компонент і розширення компонент. Насувається питання, чи наслідком впливу сусідніх атомів на випромінюючий атом, крім розширення, не може бути також переломлення правил відбору для магнітного квантового числа так, щоб можна було одержати заборонені компоненти Зеемана. Коли занедбати обмінне виродження, тоді для потенціалу взаємодії двох атомів водню одержуємо деколи застосоване при обчисленні розширення ліній виразу:

$$V_1 = \frac{e^2}{d^3} (xx_1 + yy_1 - 2zz_1), \quad (6)$$

де x, y, z і x_1, y_1, z_1 — координати електронів відносно ядер обох атомів, d — віддаль ядер. Обидві системи координат мають спільну вісь z , а осі x і y паралельні. Якщо прийняти x_1, y_1, z_1 постійними, то дістаємо в тому наближенні однорідне поле, яке вимушує переходи між однорідними термами. Натомість у другому наближенні в розкладі дістаємо (29):

$$V_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^2}{d^4} \{ (x^2 + y^2) z_1 - (x_1^2 + y_1^2) z - (z - z_1) [2(xx_1 + yy_1) - zz_1] \}. \quad (7)$$

Отже, потенціал у другому наближенні є квадратною функцією координат x, y, z і при постійних x_1, y_1, z_1 і d вимушує заборонені переходи між парними і непарними термами.

Вираз (7) при постійних x_1, y_1, z_1 можна узагальнити таким способом, що потенціал V_2 замінимо іншим наближенням у розкладі потенціалу загального неоднорідного електричного поля. Так, узагальнений по-

тенціал взаємодії атомів застосуємо до вичислення компонент Зеемана вимушених ліній $^2S_{1/2}^2P_{1/2}$ і $^2S_{1/2}^2P_{3/2}$, і спробуємо таким способом в'яснити асиметрію інтенсивностей компонент Зеемана, спостережених у спектрі вбирання лужних металів при високому тиску.

Коли в наближенні вплив сусідніх атомів на випромінюючий атом замінити неоднорідним полем, тоді між станами $^2S_{1/2}$ і $^2P_{1/2,3/2}$ можливі також вимушені переходи, які інтерферуватимуть із спонтанними переходами. Тоді зміниться поляризація та інтенсивність компонент. Щоб вичислити інтенсивності заборонених компонент припустимо, що близько коло початкового дублету немає інших збурюючих термів. Нехай кінцевий терм буде нерозщеплений. Нехай енергії початкового дублету будуть $E(n, L, J-1)$, $E(n, L, J)$, а енергія кінцевого — $E(n, L-1, J-1)$. Із стану $k \equiv n, L, J-1$ до стану $i \equiv n, L, J$ є можливий квадрупольний перехід, а з обох станів k та i можливі дипольні переходи до кінцевого стану $k_1 \equiv n, L-1, J-1$. Для стану k збурюючим станом є i . З відомих квадрупольних і дипольних моментів і з (3) дістаємо для переходів $J-1 \rightarrow J-1$ вимушені моменти:

$$\begin{aligned}
 (x \pm iy)_{M \rightarrow M \pm 1} &= \mp \frac{3}{4} e \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \cdot \frac{M(J \mp M) \sqrt{(J \mp M - 1)(J \pm M)}}{E(k, M) - E(i, M)}, \\
 (x \pm iy)_{M \rightarrow M \pm 1} &= \mp \frac{1}{8} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial J} \right)_0 \right] \frac{(J \pm M + 1)(J \pm M + 2) \sqrt{(J \mp M - 1)(J \pm M)}}{E(k, M) - E(i, M \pm 2)}, \quad (8) \\
 (z)_{M \rightarrow M \pm 1} &= \pm \frac{1}{4} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \pm i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(J \mp 2M - 1)(J \pm 2M + 1) \sqrt{(J \mp M - 1)(J \pm M)}}{E(k, M) - E(i, M \pm 1)}, \\
 (x \pm iy)_{M \rightarrow M} &= \mp \frac{1}{4} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \pm i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(J \mp 2M - 1)(J \pm M)(J \pm M + 1)}{E(k, M) - E(i, M \pm 1)}, \\
 (z)_{M \rightarrow M} &= \pm \frac{1}{8} e \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \cdot \frac{M(J^2 - M^2)}{E(k, M) - E(i, M)}.
 \end{aligned}$$

У (8) випущено спільний коефіцієнт та моменти, що відповідають переходам $M \rightarrow M \pm 2$ і $M \rightarrow M \pm 3$.

Для стану $i \equiv n, L, J$ збурюючим термом є $k \equiv n, L, J-1$.

Пропустивши вимушені моменти, які відповідають переходам $M \rightarrow M \pm 3$, одержуємо для переходів $J \rightarrow J-1$:

$$(x \mp iy)_{M \rightarrow M \pm 2} = -\frac{1}{4} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \pm i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right].$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(J \pm 2M + 1) \sqrt{(J \mp M)(J \mp M - 1)(J \mp M - 2)(J \pm M + 1)}}{E(J, M) - E(k, M \pm 1)}, \\
& (z)_{M \rightarrow M \pm 2} = \mp \frac{1}{8} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2} \right)_0 \pm 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right], \\
& \frac{(M \pm 2) \sqrt{(J \mp M)(J \mp M - 1)(J \mp M - 2)(J \pm M + 1)}}{E(i, M) - E(k, M \pm 2)}, \quad (9) \\
& (x \mp iy)_{M \rightarrow M \pm 1} = -\frac{3}{4} e \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \cdot \frac{M(J \pm M) \sqrt{(J \mp M)(J \pm M - 1)}}{E(i, M) - E(k, M)}, \\
& (z)_{M \rightarrow M \pm 1} = -\frac{1}{4} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \pm i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right], \\
& \frac{(M \pm 1)(J \pm 2M + 1) \sqrt{(J \mp M)(J \pm M - 1)}}{E(i, M) - E(k, M \pm 1)}, \\
& (x \pm iy)_{M \rightarrow M \pm 1} = \mp \frac{1}{8} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 \pm 2i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right], \\
& \frac{(J \pm M + 1)(J \pm M - 2) \sqrt{(J \mp M)(J \pm M - 1)}}{E(i, M) - E(k, M \pm 2)}, \\
& (x \pm iy)_{M \rightarrow M} = -\frac{1}{4} e \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \pm i \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right], \\
& \frac{(J \pm 2M + 1)(J \pm M - 1) \sqrt{J^2 - M^2}}{E(i, M) - E(k, M \pm 1)}, \\
& (z)_{M \rightarrow M} = -\frac{3}{4} e \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \cdot \frac{M^2 \sqrt{J^2 - M^2}}{E(i, M) - E(k, M)}.
\end{aligned}$$

Результати обчислень інтенсивностей вимушених компонент Зеемана ліній ${}^2S_{\frac{1}{2}} {}^2P_{\frac{1}{2}}$ і ${}^2S_{\frac{1}{2}} {}^2P_{\frac{3}{2}}$, які не збігаються з дозволеними компонентами, наведено в таблиці 1-й.

${}^2S_{\frac{1}{2}} {}^2P_{\frac{1}{2}}$

Таблиця 1

Поляризація	Перехід $M \rightarrow M'$	$\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$
	Розщеплення в од. Лоренца	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
σ			$\frac{6 B ^2}{(1-\delta)^2} + \frac{6 B ^2}{(1+\frac{5}{3}\delta)^2}$	$\frac{6 B ^2}{(1+\delta)^2} + \frac{6 B ^2}{(1-\frac{5}{3}\delta)^2}$	
π		$\frac{128 B ^2}{(1+\delta)^2}$			$\frac{128 B ^2}{(1-\delta)^2}$

${}^2S_{\frac{1}{2}}({}^2P_{\frac{3}{2}})$					
Поляризація	Перехід $M \rightarrow M$	$\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$
	Розщеплення в од. Лоренца	$\frac{9}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$
σ		$\frac{ B ^2}{(1 - \frac{5}{3}\delta)^2}$			$\frac{3 B ^2}{(1 + \delta)^2}$
π		$\frac{16 A ^2}{(1 - \frac{7}{3}\delta)^2}$	$\frac{3 B ^2}{(1 - \delta)^2}$	$\frac{ B ^2}{(1 - \frac{5}{3}\delta)^2}$	
${}^2S_{\frac{1}{2}}({}^2P_{\frac{1}{2}})$					
Поляризація	Перехід $M \rightarrow M^1$	$-\frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$
	Розщеплення в од. Лоренца	$-\frac{9}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{1}{3}$
σ		$\frac{ B ^2}{(1 + \frac{5}{3}\delta)^2}$			$\frac{3 B ^2}{(1 - \delta)^2}$
π		$\frac{16 A ^2}{(1 + \frac{7}{3}\delta)^2}$	$\frac{3 B ^2}{(1 + \delta)^2}$	$\frac{ B ^2}{(1 + \frac{5}{3}\delta)^2}$	

В таблиці позначено:

$$|A|^2 = \frac{3e^2}{32[E({}^2P_{\frac{1}{2}}) - E({}^2P_{\frac{3}{2}})]^2} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 \right]^2 + \right.$$

$$\left. + 4 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 \right]^2 \right\},$$

$$|B|^2 = \frac{3e^2}{32[E({}^2P_{\frac{1}{2}}) - E({}^2P_{\frac{3}{2}})]^2} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right)_0 \right]^2 \right\},$$

$$\delta = \frac{\omega \hbar}{E({}^2P_{\frac{1}{2}}) - E({}^2P_{\frac{3}{2}})} < 0.$$

Щоб порівняти результати обчислень, зібрані в таблиці, з ефектом Пашена-Бака надтонкої структури компонент, можна обмежитися визначенням порядку інтенсивності „заборонених“ компонент. Для цезію знайдено величини надтонкоструктурних констант [10]:

$$A({}^1S_{\frac{1}{2}}) \sim 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}; A({}^2P_{\frac{1}{2}}) \sim 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}; A({}^2P_{\frac{3}{2}}) \sim 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}.$$

З (4) і (5) одержуємо порядок відносної інтенсивності „заборонених“ компонент Зеемана в полі 29 000 ерстедів ($\omega \sim 1,4 \text{ см}^{-1}$). Для лінії $1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$ відносна інтенсивність усіх „заборонених“ компонент є $\sim 10^{-3}$. Інтенсивність усіх можливих „заборонених“ σ -компонент ($\Delta M = 0, \pm 2$) і π -компонент $\pm \frac{1}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2}$ лінії $1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$ є 10^3 , π -компонент $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2}$ коло 10^8 , а π -компонент $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2}$ ($\Delta M = \pm 2$) 10^{13} разів менше, ніж інтенсивності „дозволених“ компонент. Таким чином, характерним для ефекту Пашена-Бака цих ліній є: 1) брак π -компонент $\pm \frac{3}{2}$ і $\pm \frac{9}{3}$ та 2) симетрія в інтенсивності компонент.

§ 6. Коли прийняти осево-симетричне неоднорідне електричне поле $\left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_0 = 0 \right]$, тоді кількість заборонених компонент у таблиці відповідає результатам Габлера для цезію. Якщо візьмемо ще до уваги, що $E(^2P_{1/2}) - E(^2P_{3/2}) < 0$ і $\delta < 0$, тоді з таблиці випливають такі висновки відносно інтенсивностей компонент. У лінії $2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$ коротші π -і σ -компоненти сильніші, переміщені в сторону довших хвиль слабші. Коротші заборонені π -компоненти лінії $2^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ слабші, довші π -компоненти сильніші. Для σ -компонент лінії $1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ правило про інтенсивності дещо складніше. З таблиці видно, що коротші зовнішні σ -компоненти $\left(+\frac{9}{3} \right)$ мають меншу інтенсивність, ніж довші зовнішні $\left(-\frac{9}{3} \right)$. З внутрішніх заборонених σ -компонент коротші $\left(+\frac{1}{3} \right)$ сильніші, довші $\left(-\frac{1}{3} \right)$ — слабші. Ці висновки порівнюємо з результатами експериментів.

У цезію π -компоненти $\pm \frac{3}{2} \left(\pm \frac{3}{2} \rightarrow \pm \frac{1}{2} \right)$ виникають при тискові коло 5 мм. ртуті. Разом з тим при вищому тискові починається асиметрія інтенсивності. Ангелеттер підкреслює, що згідно з мікрофотографіями відношення інтенсивності коротших зовнішніх σ -компонент до інтенсивності довших менше, ніж 1; для внутрішніх σ -компонент, навпаки, відношення інтенсивності коротших компонент до інтенсивності довших компонент більше, ніж 1. Отже, для компонент σ -лінії $2^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ існує повна згідність між результатами експерименту і поданими вище висновками з теорії. З мікрофотограмів видно, що така згідність між теорією та експериментом існує також для інших компонент π і σ обох ліній.

З роботи Габлера і Томізера [9] видно, що при високому тискові існує асиметрія інтенсивності заборонених компонент також у відповідних ліній натрію, калію і рубідію. Наскільки можна судити по фотознімках, величина асиметрії зростає в порядку Rb, K, Na . Це є

згідне з таблицею, де при тому самому магнітному полі $|\delta|$ зростає в такому самому порядку.

У всіх тих випадках (Na, K, Rb) спостерігається також π -компоненти $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \pm \frac{1}{2} \left(\pm \frac{3}{3} \right)$, інтенсивність яких — як виходить з фотознімків — є того самого порядку, що інтенсивність π -компонент $\pm \frac{1}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2} \left(\pm \frac{5}{3} \right)$. Інтенсивність π -компонент $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2}$ для випадку ефекту Пашена-Бака надтонкої структури — як оцінено вище — повинна бути у всіх випадках $10^4 - 10^5$ разів менша як інтенсивність π -компонент $\pm \frac{1}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2}$. Натомість наше припущення дає відношення інтенсивностей тих компонент приблизно 1:3. Цей результат також згідний з експериментом. У Фріша [6] при низькому тискові немає „заборонених“ компонент $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \pm \frac{1}{2}$ і непомітна асиметрія інтенсивності.

У натрію і калію при тискові коло 1 мм ртуті не спостерігається σ -компонент $\pm \frac{3}{2} \rightarrow \mp \frac{1}{2} \left(\pm \frac{9}{3} \right)$. Як з таблиці, так і з оцінки на основі теорії ефекту Пашена-Бака надтонкої структури впливає, що інтенсивність тієї компоненти повинна бути того самого порядку, що інших компонент, які спостерігається в тих самих умовах. Коли припустити однорічне існування двох родів промінювання — вимушеного неоднорідним зовнішнім полем та випромінювання внаслідок взаємодії магнітного моменту ядра і електронів — тоді додаються не інтенсивності, а диполеві моменти, що доводить до інтерференції обох родів промінювання. Тому існує можливість, що при одночасному існуванні двох родів промінювання деякі лінії значно послабляються або зовсім знищуються. Цим можна виправдати невиявлення компонент, які згідно з обома теоріями повинні з'явитися і які в інших умовах з'являються, наприклад, у Фріша.

Згідність між висновками поданої теорії і результатами експерименту доводить, що вплив сусідніх атомів, внаслідок якого дістаємо розширення ліній, в другому наближенні може дати переломлення правил відбору і вимусити заборонені переходи. Такий вплив повинен проявитися також у зміні відносних інтенсивностей ліній того самого мультиплету.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Міліянчук. — Acta Phys. Polon, 3, 123, 1934.
2. В. С. Міліянчук. — Наукові записки ЛДУ (в. друку).
3. В. С. Міліянчук. — ДАН, 59, 671, 1948.
4. S. Goudsmit und R. F. Bacher. — Z. f. Phys., 66, 13, 1930.
5. С. Э. Фриш. — Спектроскопическое определение ядерных моментов. Л. М. 1948.
6. С. Э. Фриш и Ф. М. Герасимов. — ЖЭТФ, 8, 267, 1938; Journ. of. Phys., 7, 202 (1943).
7. F. Gabler. — Z. f. Phys., 116, 495, 1940.
8. H. Angenetter. — Naturwiss., 28, 459, 1940.
9. F. Gabler und J. Tomiser. Naturwiss., 30, 281 (1912).
10. D. A. Jackson. — Proc. Roy. Soc., London (A), 147, 500 (1938).

В. С. Милиянчук ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА ЛИНИЙ, ВЫНУЖДЕННЫХ В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В работе даны правила отбора и определена поляризация компонент для эффекта Зеемана линий, вынужденных неоднородным электрическим полем. Согласно теории компоненты $M \rightarrow M \pm 3$ при продольном эффекте поляризованы по кругу, а при поперечном эффекте поляризованы линейно в направлении, перпендикулярном к направлению магнитного поля. Все другие компоненты ($M \rightarrow M \pm 2$, $M \rightarrow M \pm 1$, $M \rightarrow M$) как в продольном, так и в поперечном эффекте поляризованы частично. Интенсивности компонент Зеемана размещены несимметрично. Эффект Зеемана линий, вынужденных в неоднородном поле, сравнен с эффектом Зеемана спонтанных линий, вынужденных однородным электрическим полем, и с эффектом Пашена-Бака сверхтонкой структуры.

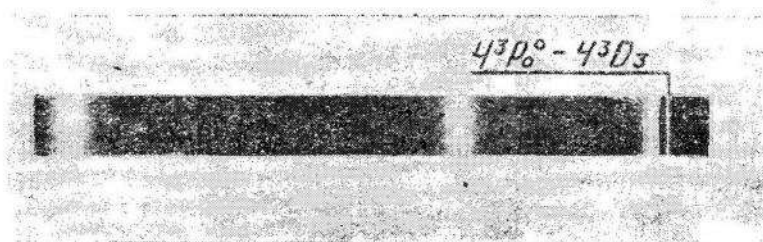
Дана попытка объяснить влияние давления на эффект Зеемана линий $^2S_{1/2}$ $^2P_{3/2}$ и $^3S_{1/2}$ $^3P_{1/2}$ щелочных металлов. Влияние соседних атомов на излучающий атом во втором приближении можно заменить влиянием неоднородного электрического поля. Этим методом можно объяснить наблюдаемую асимметрию интенсивностей запрещенных компонент Зеемана. Согласно выводов приведенной теории с результатами эксперимента полное.

Л. К. КЛИМОВСКАЯ

ДОПОЛНЕНИЕ МУЛЬТИПЛЕТА В НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Дополнение мультиплета наблюдается в однородном магнитном поле при переходе от явления Зеемана к явлению Пашена-бака. Теоретически показана возможность дополнения мультиплета в неоднородном электрическом поле (1), каким является межмолекулярное электрическое поле. Возможность влияния неоднородной части межмолекулярного поля показана на смещении термов натрия (2). Значительное изменение интенсивности компонент сверхтонкой структуры также указывает на влияние, в некоторых условиях очень сильное, неоднородности электрического поля. В этой статье показывается возможность влияния неоднородного межмолекулярного электрического поля на тонкую структуру, проявляющуюся в дополнении мультиплета.

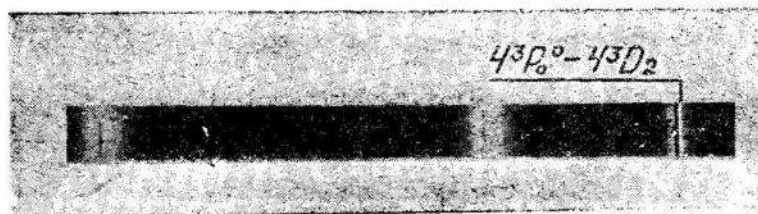
1. Нами наблюдалось дополнение мультиплета серии $P-D$ в спектре цинка от дуги переменного тока при отсутствии внешнего магнитного поля. Дуга питалась от генератора ПС-39, при диаметре электродов 5 мм и дуговом промежутке 1—2 мм. Фотографирование спектра производилось кварцевым спектрографом ИСП-22 с применением однолинзового конденсора с фокусным расстоянием 160 мм, установленном так, что на крышке щели спектрографа получался размытый световой кружок диаметром 50 мм.



Фиг. 1. Снято при силе тока 2 ампера.

2. Запрещенная линия $4^3P_0 - 4^3D_3$ (фиг. 1) наблюдалась в интервале сил токов от 2 до 6 ампер при экспозициях соответственно от 15 до 2 минут. Линия получалась при фотографировании любой части светового кружка, но наиболее интенсивно и четко на его периферии. Наблюдаемая линия имеет довольно хорошее совпадение с поло-

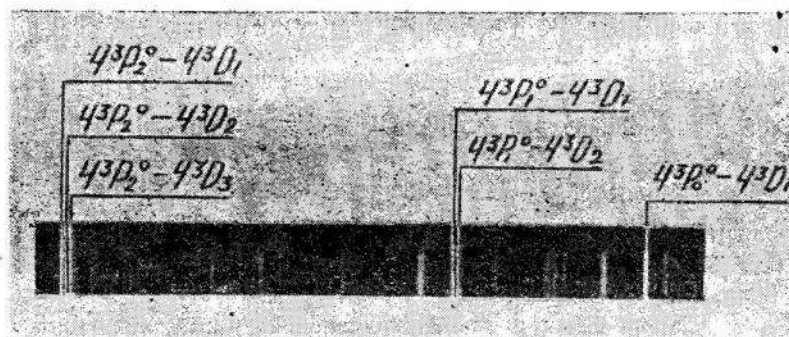
жением, предписанным схемой термов. При наших измерениях на измерительном микроскопе МИР-12 длина волны оказалась равной 3281.36 ангстрем. Положение линии определялось из сравнения с близлежащими линиями железа. Заметного смещения линии благодаря недостаточной дисперсии (19.4 ангстрем на мм) обнаружить не удалось.



Фиг. 2. Снято при силе тока 4 ампера.

Линия $4^3P_0^o - 4^3D_2$ (фиг. 2) особенно четко появляется при силе тока 4 ампера и при экспозиции 10—15 секунд. Вследствие сильного расширения этой линии определения длины ее волны не производилось.

3. В полученных результатах не исключено некоторое влияние самообращения, а на линиях $4^3P_0^o - 4^3D_1$ и $4^3P_2^o - 4^3D_{1,2,3}$ очень вероятно вследствие того, что конечные термы метастабильны. Но эффект самообращения на линиях $4^3P_1^o - 4^3D_{1,2}$ (фиг. 3) маловероятен, так как



Фиг. 3. Нормальный спектр цинка.

терм P_1 метастабильным не является. В триплетной группе $4^3P_2^o - 4^3D_{1,2,3}$ довольно хорошо видна каждая из линий (фиг. 2). Линия $4^3P_0^o - 4^3D_3$ (фиг. 1) по своему внешнему виду и по совпадению с вычисленной длиной волны исключает самообращение. Таким образом, можно предположить, что линия, обозначенная $4^3P_0^o - 4^3D_2$, является запрещенной. Очень вероятное самообращение в нашем случае усложняет картину, но не является единственным эффектом. Необходимо также исключить влияние спина ядра, так как примесь изотопа цинка, имеющего спин, отличный от нуля, очень незначительна (4%). Из вычисления относительных интенсивностей для запрещенных линий $4^3P_0^o - 4^3D_2$ и $4^3P_0^o - 4^3D_3$ следует, что интенсивность первой из них значительно больше интенсивности второй, что и наблюдается в экспе-

рименте. Можно еще раз подчеркнуть, что эти линии очень четко наблюдаются при проектировании на щель периферийной части изображения дуги. Это позволяет отказаться от объяснения получения этих линий вследствие самообращения, так как излучение в этом случае проходит через более или менее однородный слой и вероятность самообращения незначительна. Это обстоятельство также подтверждает предположение о том, что в нашем случае имеет место в первую очередь возникновение запрещенных линий, эффект самообращения только во вторую очередь.

Подобные результаты получены И. З. Лазаревым.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. С. Милиянчуку и А. И. Андриевскому за постоянное внимание к настоящей работе, ценные советы и указания и живое участие в обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Милиянчук, ДАН, 67, 1001 (1949).
 2. В. С. Милиянчук, ДАН, 59, 671 (1948).
-

З М І С Т

	Стор.
Г. М. Савін, О. С. Парасюк. Пластичні зони довкола кругового отвору в плоскому нерівномірно-напруженому полі	5
А. С. Кованько. О некоторых непрерывных преобразованиях плоскости в плоскость и мероопределение поверхности	21
М. О. Зарицький. Про одну операцію в теорії точкових множин	35
И. Г. Соколов. Приближение функций с данным модулем непрерывности полиномами Бернштейна	45
А. Н. Костовский. Квадрируемость непрерывных поверхностей вида: $x = \varphi(u)$, $y = \psi(v)$, $z = f(u, v)$	53
Т. Я. Загорский. Об одной краевой задаче эллиптико-параболического типа	81
Г. Л. Буймола. До питання про точність виміру графічно заданих відрізків та кутів	89
М. П. Шереметьев. Растяжение бесконечной пластинки с впаянным кольцом, область которого вместе с областью пластинки отображается на круг при помощи рациональной функции	105
А. Глауберман. К теории структуры металлических кристаллов	131
В. С. Міліянчук. Эффект Зеемана ліній, вимушених неоднорідним електричним полем	135
Л. К. Климовская. Дополнение мультиплета в неоднородном электрическом поле	149

Ціна 10 крб.