Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Целью настоящей работы является доказательство при некоторых условиях существования гармонической в трехмерной области функции u, удовлетворяющей граничному условию вида

$$\alpha \operatorname{grad} u + au = f\,[1] \tag{1}$$

1. Здесь будут указаны предположения относительно области и задаваемых функций, а также выведены некоторые вспомогательные формулы.

Пусть V есть выпуклая область в трехмерном Эвклидовом пространстве с границей S, которая является дважды непрерывно дифференцируемым многообразием.

Единичный вектор внутренней нормали к S в точке $y \in S$ будет обозначаться $\nu(y)$.

Как легко видеть, можно указать такое положительное число σ, что при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma$ соответствие $y \to y + \varepsilon\nu(y)$ является взаимно-однозначным, причем точка $y' = y + \varepsilon\nu(y')$ $(y \in S)$ описывает поверхность, — S_ε, обладающую теми же свойствами, что и S; V_ε будет обозначать выпуклую область с границей S_ε.

Пусть $\alpha = \alpha(y)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция, определенная на S, $a(y)$ — непрерывно дифференцируемая на S функция; будет предполагаться, что

$$\alpha \cdot \nu > 0,\ a < 0 \tag{2}$$

Не ограничивая общности рассмотрения задачи (1), будет предполагаться

$$\alpha \cdot \nu = 1 \tag{3}$$

Как выяснится далее, граничное условие (1), определяемое α, a тесно связано с граничным условием того же вида, определяемым следующими вектором α^* и функцией a^*:

$$\begin{aligned} \alpha^*(y) &= 2\nu(y) - \alpha(y), \\ a^*(y) &= a(y) + \nu(y) \cdot \operatorname{rot}(\alpha(y) \times \nu(y)).\,[2] \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1] В дальнейшем трехмерное Эвклидово пространство предполагается отнесенным к прямоугольной системе координат; точки пространства отождествляются с соответствующими радиус-векторами; длина вектора α обозначается $|\alpha|$, скалярное и векторное произведения векторов α, β обозначаются соответственно $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \times \beta$.

[2] Величина $\nu \cdot \operatorname{rot}(\alpha \times \nu)$ определяется очевидным образом значениями α, ν на S.

Очевидно, $\alpha^{**}=\alpha$, $a^{**}=a$, $\alpha^{*}\cdot\nu=1$.

Будет предполагаться дополнительно, что

$$a^{*}=a+\nu\cdot\operatorname{rot}(\alpha\times\nu)<0. \tag{5}$$

Теперь будет указано некоторое преобразование формул Грина.

Пусть $u(x)$, $u^{*}(x)$ суть дважды непрерывно-дифференцируемые на множестве $V \diagup V_\varepsilon$ $(0<\varepsilon\leqslant\sigma)$ функции, непрерывные на $(V\diagup V_\varepsilon)\cup S$ и обладающие также следующими свойствами: для всякой точки $y\in S$ существуют пределы

$$\begin{gathered}\lim_{\tau\to+0}\left\{\alpha(y)\cdot\operatorname{grad}\,u(x)\Big|_{x=y+\tau\nu(y)}\right\},\\ \lim_{\tau\to+0}\left\{\alpha^{*}(y)\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}(x)\Big|_{x=y+\tau\nu(y)}\right\}\end{gathered} \tag{6}$$

и при том равномерно относительно y.

В этом случае такие пределы будут обозначаться соответственно $\alpha(y)\cdot\operatorname{grad}\,u(y)$, $\alpha^{*}(y)\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}(y)$.

Пусть сначала $u(x)$, $u^{*}(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $(V\diagup V_\varepsilon)\cup S$.

Тогда на основании (4) и $\nu=\alpha+(\alpha+\nu)\times\nu$ получаем:

$$\iint\limits_S u^{*}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS=\iint\limits_S\{u^{*}\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u+u^{*}\nu\cdot[\operatorname{grad}\,u x(\alpha\times\nu)]\}\,dS,$$

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u^{*}}{\partial\nu}\,dS=\iint\limits_S\{u\alpha^{*}\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}-u\nu\cdot[\operatorname{grad}\,u^{*}\times(\alpha\times\nu)\}\,dS$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_S\left(u^{*}\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial u^{*}}{\partial\nu}\right)dS=\iint\limits_S\{u^{*}\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u-u\alpha^{*}\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}+$$

$$+\nu\cdot[\operatorname{grad}\,(uu^{*})\times(\alpha\times\nu)]\}\,dS=$$

$$=\iint\limits_S\{u^{*}(\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u+au)-u(\alpha^{*}\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}+a^{*}u^{*})\}\,dS;$$

$$\iint\limits_S\left(u^{*}\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\frac{\partial u^{*}}{\partial\nu}\right)dS=$$

$$=\iint\limits_S\{u^{*}(\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u+au)+u(\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}-a^{*}u^{*})\}\,dS.$$

Таким образом, справедливы формулы:

$$\begin{gathered}\iint\limits_S\{u^{*}(\alpha\cdot\operatorname{grad}\,u+au)-u(\alpha^{*}\cdot\operatorname{grad}\,u^{*}+a^{*}u^{*})\}\,dS-\\ -\iint\limits_{S_\varepsilon}\left\{u^{*}\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial u^{*}}{\partial\nu}\right\}dS+\iiint\limits_{V\diagup V_\varepsilon}\{u^{*}\Delta u-u\Delta u^{*}\}\,dV=0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\iint\limits_{S} \left\{u\,(\alpha\cdot\operatorname{grad}\ u + au) - \frac{a+a^*}{2}u^2\right\} dS -$$

$$-\iint\limits_{S_\varepsilon} u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS + \iiint\limits_{V/V_\varepsilon}\{u\Delta u + |\operatorname{grad}\ u|^2\}\,dV = 0. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) справедливы и без предположения непрерывной дифференцируемости u, u^* на $(V/V_\varepsilon)\bigcup S$; достаточно предположить для этих функций существование равномерных по y пределов (6).

Действительно в этом случае по доказанному формулы (7), (8) можно применить к области $V_\tau/V_\varepsilon\,(0<\tau<\varepsilon)$, перенеся значения $\alpha(y)$, $\alpha^*(y)$, $a(y)$, $a^*(y)$ с S на S_τ по условию: если $y_\tau = y + \tau\nu(y)$ $(y\in S,\ y_\tau\in S_\tau)$, то $\alpha(y_\tau)=\alpha(y)$ и т. д., и затем перейти к пределу при $\tau\to 0$.

В дальнейшем граничная задача, характеризуемая условием (1), будет пониматься следующим образом: найти функцию u, гармоническую в области V, непрерывную в $V\bigcup S$, для которой существует (равномерный по y) предел

$$\lim_{\tau\to+0}\left\{\alpha(y)\cdot\operatorname{grad}\ u(x)\Big|_{x=y+\tau\nu(y)}\right\}$$

(обозначаемый, по условию, через $\alpha(y)\cdot\operatorname{grad}\ u(y)$), удовлетворяющую в этом смысле граничному условию (1), где $f(y)$ заданная, непрерывная на S функция.

Из формулы (8) следует, что решение задачи (1) при сделанных предположениях единственно.

Действительно, пусть гармоническая в области V функция u удовлетворяет граничному условию

$$\alpha\cdot\operatorname{grad}\ u + au = 0.$$

Тогда из (8) получают:

$$-\iint\limits_{S}\frac{a+a^*}{2}u^2 dS + \iiint\limits_{V}\left|\operatorname{grad}\ u\right|^2 dV = 0.$$

Так как $a<0$, $a^*<0$, то отсюда легко следует $u=0$ в V.

2. Здесь будет доказано существование решения задачи (1). Пусть $x\in V$, $y\in S$,

$$q(x,y) = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\left(|x-y|\dfrac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y\right)\cdot\nu(y)}{\left||x-y|\dfrac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y\right|^2} \tag{9}$$

Непосредственно проверяется, что $q(x,y)$ есть гармоническая в V функция точки x. Решение задачи (1) определяется в форме

$$u(x) = \iint\limits_{S} q(x,y)\,\mu(y)\,d_y S; \tag{10}$$

здесь $\mu(y)$ предполагается непрерывной на S функцией.

Если $z \in S$, $x \in V$, то

$$\alpha(z)\cdot \operatorname{grad} u(x) + a(z)\,u(x) =$$
$$= \iint_S \Big\{ \big(\alpha(z) - \alpha(y)\big)\cdot \operatorname{grad} q(x, y) + a(z)\, q(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{(x-y)\cdot \nu(y)}{|x-y|^3}\Big\}\mu(y)\, d_y S,$$

откуда непосредственно следует при непрерывной функции $\mu(y)$ существование равномерного относительно z предела

$$\lim_{\tau \to +0}\Big\{ \alpha(z)\cdot \operatorname{grad} u(x) + a(z)\, u(x)\Big|_{x = z + \tau\nu(z)}\Big\}.$$

Таким образом, для того, чтобы гармоническая функция $u(x)$, определенная формулой (10), удовлетворяла граничному условию (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(y)$ определялась следующим регулярным интегральным уравнением:

$$\mu(z) + \iint_S \Big(\alpha(z) - \alpha(y)\Big)\cdot \operatorname{grad}_z q(z, y) + a(z)\, q(z, y) + \\ + \frac{1}{2\pi}\frac{(z-y)\cdot \nu(y)}{|z-y|^3}\Big\}\mu(y)\, d_y S = f(z) \tag{11}$$

Прежде всего будет доказана лемма.

ЛЕММА. Пусть $f(z)$ непрерывно дифференцируема на S, $\mu(z)$ удовлетворяет уравнению (11). Тогда $\mu(z)$ непрерывно дифференцируема на S.

Доказательство. Пусть z_0 произвольная точка S, S_0' — малая окрестность z_0 (на S), взаимно-однозначно проэктирующаяся на круг T_0 с центром в z_0, лежащий на касательной к S в точке z_0 плоскости. Пусть начало прямоугольной системы координат выбрано в z_0 и координатная ось направлена по $\nu(z_0)$. Тогда уравнение части S_0' поверхности S может быть представлено в виде $y_3 = \omega(y_1, y_2)$, где ω дважды непрерывно дифференцируемая функция в T_0', причем

$$|\omega(y_1, y_2)| \leqslant A(y_1^2 + y_2^2),\ \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\omega\right| \leqslant A\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\ (i = 1, 2),$$

где A — некоторая постоянная.

Пусть T_0 концентрический с T_0' круг меньшего радиуса, S_0 — соответствующая T_0 часть поверхности S, $z \in S_0$; тогда уравнение (11) можно представить в виде:

$$\mu(z) + \iint_{S_0} K(z, y)\,\mu(y)\, d_y S = f_1(z), \tag{12}$$

где

$$K(z, y) = \Big(\alpha(z) - \alpha(y)\Big)\cdot \operatorname{grad}_z q(z, y) + a(z)\, q(z, y) + \frac{1}{2\pi}\frac{(z-y)\cdot\nu(y)}{|z-y|^3},$$
$$f_1(z) = f(z) - \iint_{S/S_0} K(z, y)\,\mu(y)\, d_v S.$$

$\mu(z)$, $K(z, y)$, $f_1(z)$ при $z, y \in S_0'$ рассматриваются как функции z_1, z_2, y_1, y_2.

Как леко проверить,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} K(z, y) + \frac{\partial}{\partial y_i} K(z, y) = L_i(z, y) \quad (i = 1, 2)$$

есть непрерывная при $z, y \in S_0'$, $z \neq y$ функция, причем

$$\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}\; L_i(z, y)$$

остается ограниченным.

Очевидно, $f_1(z)$ непрерывно дифференцируема на S_0; оказывается $\frac{\partial}{\partial z_i} f_1(z)$ $(i = 1, 2)$ суммируемы на S_0.

Действительно, это очевидно для $\frac{\partial}{\partial z_i} f(z)$ и

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \iint\limits_{S/S_0'} K(z, y)\, \mu(y)\, d_y S.\ \text{Но}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \iint\limits_{S_0'/S_0} K(z, y)\, \mu(y)\, d_y S = \iint\limits_{S_0'/S_0} L_i(z, y)\, \mu(y)\, d_y S -$$

$$- \iint\limits_{T_0'/T_0} \frac{\partial}{\partial y_i} K(z, y) \cdot \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2}\, dy_1\, dy_2 =$$

$$= \iint\limits_{S_0'/S_0} L_i(z, y)\, \mu(y)\, d_y S +$$

$$+ \iint\limits_{T_0'/T_0} K(z, y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2} \right) dy_1\, dy_2 -$$

$$- \int\limits_{C_0} \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} K(z, y)\, \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2}\, ds +$$

$$+ \int\limits_{C_0} \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} K(z, y)\, \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2}\, ds,$$

где C_0, C_0' суть окружности, ограничивающие соответственно T_0, T_0'. Все слагаемые правой части последней формулы кроме последнего слагаемого, ограничены при $z \in S_0$. Так как $\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}\, K(z, y)$ ограничено при y, $z \in S_0'$, то последнее слагаемое в рассматриваемой формуле имеет оценку вида

$$M \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \theta^2 - 2\theta \cos \varphi}},$$

где M — постоянное, θ — отношение $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ к радиусу круга T_0. Отсюда непосредственно следует суммируемость $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}$ $(i = 1, 2)$ на S_0. На основании одного результата (см. [1], стр. 28, лемма 1) отсюда следует непрерывная дифференцируемость решения уравнения (12).

Лемма доказана.

Теперь докажем разрешимость задачи (1). Будет рассмотрено два случая.

1. Пусть всякая гармоническая в V функция $u(x)$, достаточно гладкая в $V \cup S$, представима в виде (10).

Пусть $\psi(y)$ непрерывное решение уравнения

$$\psi(y) + \iint_S \psi(z)\, K(z, y)\, d_z S = 0.$$

На основании доказанной леммы $\psi(y)$ — непрерывно дифференцируема на S и, очевидно, для всякой функции вида (10)

$$\iint_S \psi(y) \Big(\alpha(y) \cdot \operatorname{grad} u(y) + a(y)\, u(y) \Big) d_y S = 0 \tag{13}$$

Строится гармоническая в V функция,— $u_0^*(x)$,— с граничными значениями $\psi(y)$. На основании леммы легко видеть, что $u_0^*(x)$ непрерывно-дифференцируема на $V \cup S$. Тогда на основании (7) и (13)

$$\iint_S u(y) \Big(\alpha^*(y) \cdot \operatorname{grad} u_0^*(y) + a^*(y)\, u_0^*(y) \Big) d_y S = 0. \tag{14}$$

Согласно предположению $u(y)$ — есть граничное значение вообще произвольной гармонической в V функции.

Из (14) тогда следует, что

$$\mu^*(y) \cdot \operatorname{grad} u_0^*(y) + a^*(y)\, u_0^*(y) = 0.$$

Но по доказанному $u^*(x) = 0$ на V и $\psi(y) = 0$ на S. Следовательно, уравнение (11) разрешимо при любой непрерывной функции $f(y)$ и на основании (10), (11) задача (1) разрешима для любой непрерывной функции $f(y)$.

2. Пусть теперь существует гармоническая в V непрерывно-дифференцируемая на $V \cup S$ функция $u_1(x)$, не представимая в форме (10).

В этом случае уравнение (11) не может быть неограниченно разрешимым. Пусть $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_p(z)$ полная система независимых решений уравнения

$$\varphi(z) + \iint_S K(z, y)\, \varphi(y)\, d_y S = 0.$$

Пусть $\varphi_1^*(z)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\iint_S \varphi_1^*(z)\, \varphi_i(z)\, d_z S = \begin{cases} 1 & (i=1), \\ 0 & (i=2, \ldots, p). \end{cases} \tag{15}$$

Пусть при замене в (11) функции $q(z, y)$ через $q_1(z, y) = q(z, y) + u_1(x)\varphi_1^*(y)$, ядро $K(z, y)$ переходит в ядро $K_1(z, y)$. Если

$$\varphi(z) + \iint_S K_1(z, y)\varphi(y)\,d_y S = 0, \tag{16}$$

то $u(x) = \iint_S q_1(x, y)\varphi(y)\,d_y S$ удовлетворяет нулевому граничному условию (1). Следовательно,

$$\iint_S q_1(x, y)\varphi(y)\,d_y S = 0 \quad (x \in V)$$

или

$$\iint_S q(x, y)\varphi(y)\,d_y S + u_1(x)\iint_S \varphi_1^*(y)\varphi(y)\,d_y S = 0.$$

Так как $u_1(x)$ по предположению не представимо в форме (10), то $\iint_S \varphi_1^*(y)\varphi(y)\,d_y S = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(y) = C_1\varphi_1(y) + \ldots + C_p\varphi_p(y);$$

из условия (15) далее следует, что $C_1 = 0$ и многообразие решений уравнения (16) определяется полной системой независимых решений $\varphi_2(y), \ldots, \varphi_p(y)$.

Продолжая подобное рассуждение далее, приходят, наконец, к ядру $q_p(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\varphi_i^*(y)$, для которого соответствующее уравнение типа (11) неограниченно разрешимо. Но это доказывает разрешимость задачи (1).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Лопатинский Я. Б. Укр. Мат. Журнал, III, I, 1951.