Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

А. С. КОВАНЬКО

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖИМОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНУЮ СУММУ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть нам дана почти-периодическая функция со своим рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} A_x e^{i\lambda_k x} \tag{1}$$

Ставим следующий вопрос:

Если из членов ряда Фурье мы составим несколько отдельных рядов (не имеющих попарно общих членов), то не будет ли каждый из этих рядов рядом Фурье какой-то почти-периодической функции и таким образом $f(x)$ распадается на конечную сумму почти-периодических функций?

Качественно вопрос не изменится, если мы число слагаемых будем считать равным двум, что мы и сделаем.

В решении данного вопроса мы используем одну теорему Люстерника (Успехи матем. наук, т. I, стр. 97).

ТЕОРЕМА. Необходимое и достаточное условие компактности системы почти-периодических функций в смысле равномерной сходимости в выполнении следующих условий:

1. Функции системы ограничены в их совокупности.
2. Функции системы равностепенно-равномерно непрерывны.
3. Функции системы обладают при данном $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малом) общим, относительно плотным множеством почти-периодов, принадлежащих числу ε.

Предположим, что весь спектр $\{\lambda_k\}$ функции $f(x)$ распадается на две непересекающиеся совокупности X_1 и X_2, из которых каждая имеет свой собственный базис, и эти два базиса не пересекаются, а вместе они образуют базис $f(x)$. Элементы первого базиса обозначим через $\{\alpha_k\}$, а элементы второго базиса обозначим через β_j.

Тогда элементы совокупности x_1 будут иметь вид:

$$(\mu_1 \alpha_1 + \ldots + \mu_k \alpha_k),$$

а элементы X_2 будут иметь вид

$$(\nu_1 \beta_1 + \ldots + \nu_l \beta_l),$$

где числа $\mu_1 \ldots \mu_k$, $\nu_1 \ldots \nu_l$ целые.

Соответствующие коэффициенты Фурье мы обозначим через:

$$A_{\alpha_1\mu_1+\ldots\alpha_k\mu_k} \text{ и } A_{\beta_1\nu_1+\ldots\beta_l\nu_l}$$

Если для данных значений $\mu_1 \ldots \mu_k$ число $(\mu_1\alpha_1 + \ldots \mu_k\alpha_k)$ не является элементом X_1, то мы будем считать, что $A_{\mu_1\alpha_1+\ldots\mu_k\alpha_k} \equiv 0$.

Аналогичное значение имеет место в отношении значений $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_l$.

Составим теперь почти-периодический полином Бохнэра-Фейэра для $f(x)$. Это будет:

$$\sigma_{n_1\ldots n_k m_1\ldots m_l}^{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_1\ldots\beta_l}(x) =$$

$$= \sum_{\mu_1=-n_1}^{\mu_1=+n_1} \ldots \sum_{\mu_k=-n_k}^{\mu_k=+n_k} \sum_{\nu_1=-m_1}^{\nu_1=+m_1} \ldots \sum_{\nu_l=-m_l}^{\nu_l=+m_l} \left\{ \prod_{h=1}^{h=k} \left(1 - \frac{|\mu_h|}{n_h}\right) \prod_{j=1}^{j=l} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j}\right) \right\} \times$$

$$\times A_{\mu_1\alpha_1+\ldots+\mu_k\alpha_k+\nu_1\beta_1+\ldots\nu_l\beta_l} \cdot e^{i(\mu_1\alpha_1+\ldots\mu_k\alpha_k+\nu_l\beta_l+\ldots\nu_l\beta_l)x} \quad (2)$$

В силу нашего предположения относительно структуры спектра функции $f(x)$ следует, что как только хотя бы одно из чисел μ_h не равно нулю, то все числа ν_j должны быть нули и, наоборот, поскольку возможны только коэффициенты вида:

$$A_{\mu_1\alpha_1+\ldots+\mu_k\alpha_k} \text{ или } A_{\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_l\beta_l}$$

В силу этого $(k+l)$ кратная сумма распадается очевидно на две суммы соотвественно краткостей k и l, а именно:

$$\sigma_{n_1\ldots n_k m_1\ldots m_l}^{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_1\ldots\beta_l}(x) = \sigma_{n_1\ldots n_k}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x) + \sigma_{m_1\ldots m_l}^{\beta_1\ldots\beta_l}(x) \quad (3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{n_1\ldots n_k}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x) &= \sum_{\mu_1=-n_1}^{\mu_1=+n_1} \ldots \sum_{\mu_k=-n_k}^{\mu_k=+n_k} \left\{ \prod_{h=1}^{h=k} \left(1 - \frac{|\mu_h|}{n_h}\right) \right\} \times \\ &\times A_{\mu_1\alpha_1+\ldots\mu_k\alpha_k} \cdot e^{i(\mu_1\alpha_1+\ldots\mu_k\alpha_k)x} \; a, \\ \sigma_{m_1\ldots m_l}^{\beta_1\ldots\beta_l}(x) &= \sum_{\nu_1=-m_1}^{\nu_1=+m_1} \ldots \sum_{\nu_l=-m_l}^{\nu_l=+m_l} \left\{ \prod_{j=1}^{j=e} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j}\right) \right\} \times \\ &\times A_{\nu_1\beta_1+\ldots\nu_l\beta_l} \cdot e^{i(\nu_1\beta_1+\ldots\nu_l\beta_l)x} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

но

$$A_{\mu_1\alpha_1+\ldots\mu_k\alpha_k} = M_t \left\{ f(x+t) \cdot e^{-i(\mu_1\alpha_1+\ldots+\mu_k\alpha_k)(x+t)} \right\}$$

$$A_{\nu_1\beta_1+\ldots\nu_l\beta_l} = M_t \left\{ f(x+t) \cdot e^{-i(\nu_1\beta_1+\ldots\nu_l\beta_l)(x+t)} \right\},$$

где M_t символ среднего значения по аргументу t.

Вставляя эти значения коэффициентов в формулу (4), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{n_1 \ldots n_k}(x) &= M_t\left\{f(x+t)\cdot\prod_{h=1}^{h=k}\left[\sum_{\mu_h=-n_h}^{\mu_h=+n_h}\left(1-\frac{|\mu_h|}{n_h}\right)\cdot e^{-i\mu_h t}\right]\right\}\\
\sigma^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{m_1 \ldots m_l}(x) &= M_t\left\{f(x+t)\cdot\prod_{j=1}^{j=l}\left[\sum_{\nu_j=-m_j}^{\nu_j=+m_j}\left(1-\frac{|\nu_j|}{m_j}\right)\cdot e^{-i\nu_j t}\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Легко проверить простым вычислением, что каждое из выражений в квадратных скобках неотрицательно и что

$$\left.\begin{aligned}
M_t\left\{\prod_{h=1}^{h=k}\left[\sum_{\mu_h=-n_h}^{\mu_h=+n_h}\left(1-\frac{|\mu_h|}{n_h}\right)\cdot e^{-i\mu_h t}\right]\right\} &= 1\\
M_t\left\{\prod_{j=1}^{j=l}\left[\sum_{\nu_j=-n_j}^{\nu_j=+n_j}\left(1-\frac{|\nu_j|}{m}\right)\cdot e^{-i\nu_j t}\right]\right\} &= 1
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Применяя к правым частям (5) формулу среднего значения и принимая во внимание (6), находим:

$$\left.\begin{aligned}
\left|\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{n_1 \ldots n_k}(x)\right| &\leqslant sup\left|f(x)\right|\\
\left|\sigma^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{m_1 \ldots m_l}(x)\right| &\leqslant sup\left|f(x)\right|
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Совершенно аналогично заменяя в (5)

$$f(x) \text{ через } [f(x+a)-f(x)]$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
\left|\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{n_1 \ldots n_k}(x+a)-\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{n_1 \ldots n_k}(x)\right| &\leqslant sup\left|f(x+a)-f(x)\right|\\
\left|\sigma^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{m_1 \ldots m_l}(x+a)-\sigma^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{m_1 \ldots m_l}(x)\right| &\leqslant sup\left|f(x+a)-f(x)\right|
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

В силу отношений (7) и (8) следует, что системы функций

$$\left\{\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{n_1 \ldots n_k}(x)\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\sigma^{\beta_1 \ldots \beta_l}_{m_1 \ldots m_l}(x)\right\}$$

являются компактными в смысле равномерной сходимости, так как они удовлетворяют всем трем требованиям теоремы Люстерника. Значит, можно выбрать из функций каждой системы соответственно две равномерно сходящиеся последовательности таких функций, которые дают в пределе две почти-периодические функции.

Покажем как осуществить этот выбор. Прежде всего напомним, что, если в

$$\sigma_{n_1 \ldots n_k \; m_1 \ldots, m_l}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \; \beta_1 \ldots \beta_l}(x),$$

мы положим

$$n_1 = \ldots = n_k = m_1 = \ldots = m_l = [(2p)!]^2 \text{ и } k = l = p$$

и заменим числа базиса α_h и β_j соответственно, через

$$\frac{\alpha_h}{(2p)!} \text{ и } \frac{\beta_j}{(2p)!},$$

то получим почти-периодический полином $\sigma_p(x)$, такой что последовательность их $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\alpha_3(x)$, ... равномерно сходится к $f(x)$.

Соответственно такому построению мы получим из полиномов

$$\sigma_{n_1 \ldots n_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) \quad \text{и} \quad \sigma_{m_1 \ldots m_l}^{\beta_1 \ldots \beta_l}(x)$$

две последовательности полиномов $\{\sigma_p^{(1)}(x)\}$ и $\{\sigma_p^{(2)}(x)\}$ причем:

$$\sigma_p(x) = \sigma_p^{(1)}(x) + \sigma_p^{(2)}(x); \tag{9}$$

В силу компактности системы $\{\sigma_p^{(1)}(x)\}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ мы можем построить такую последовательность:

$$\sigma_{p_j}^{(1)}(x) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

что она будет равномерно сходиться к некоторой почти-периодической функции $f_1(x)$.

В силу (9) видно, что и $\{\sigma_{p_i}^{(2)}(x)\}$ также окажется сходящейся и притом равномерно к некоторой функции

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Из самой структуры $\sigma_{p_j}^{(1)}(x)$ и $\sigma_{p_j}^{(2)}(x)$ видно, что членами ряда Фурье $f_1(x)$ будут выражения:

$$A_{\mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_k\alpha_k} \cdot e^{i(\mu_1\alpha_1 + \ldots \mu_k\alpha_k)x}$$

а у $f_2(x)$

$$A_{\nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_l\beta_l} \cdot e^{i(\nu_1\beta_1 + \ldots \nu_l\beta_l)x}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА:

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}, \tag{a}$$

изображающий данную почти-периодическую функцию $f(x)$, разбит на две части

$$\sum_{1}^{\infty} A_{\lambda'_n} e^{i\lambda'_n x} \quad (b) \quad \text{и} \quad \sum_{1}^{\infty} A_{\lambda''_n} e^{i\lambda''_n x} \quad (c)$$

так, что каждая последовательность чисел $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$ имеет самостоятельный базис и эти два базиса не пересекаются, то ряды (b) и (c) являются соответственно рядам Фурье для двух почти-периодических функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.