Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

А. С. КОВАНЬКО

# О НЕПРЕРЫВНОМ ПРЕОБРАЗВОАНИИ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ И МЕРООПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ

Настоящая статья является продолжением и обобщением статьи аналогичного наименования, опубликованной в Ученых записках Львовского государственного университета (т. XII, серия физико-математическая, вып. 3) [3].

Функция области и множества, построенная в указанной статье, рисширяется на такие пары функций, из которых каждая образуется в результате вычитания двух разрывных функций, а не непрерывных, как это было сделано ранее. Тем самым расширяется класс поверхностей, квадрируемых нашим методом.

## § 1. ОДНОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ В ДРУГУЮ

Пусть нам дана в плоскости переменных $(u, v)$ некоторая односвязная область $\Omega$ и на ней определена пара функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$. Пусть граница области $\Omega$ есть непрерывная квадрируемая кривая, которую мы могли бы даже считать в некоторых случаях гладкой кривой.

Известно, что всякая граничная точка $\Omega$ достижима изнутри с помощью движения по некоторой квадрируемой кривой Жордана, и если, в частности, граница области $\Omega$ спрямлена, то такое движение возможно с помощью спрямляемой кривой (В. Голубев).

Предположим, что $\Omega'$ есть другая односвязная область, целиком лежащая внутри $\Omega$ и не имеющая с ней общих граничных точек. Мы предположим, что $\Omega'$ преобразовывается помощью соответствия

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} (T),$$

(которое гомеоморфно) в некоторую область $S'$ плоскости $(x, y)$, причем это соответствие прямое, т. е. когда $(u, v)$ описывает границу $\Omega'$ в положительном направлении, то $(x, y)$ описывает границу $S'$ также в положительном направлении.

Для этого очевидно необходимо, чтобы функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ были бы всюду непрерывны внутри $\Omega$ и, следовательно, равномерно непрерывны внутри $\Omega'$.

Пусть $E$ есть какое-нибудь $B$ множество в области $\Omega$, а $\Omega'E$ его пересечение с областью $\Omega'$. Очевидно, что $\Omega'E$ есть также множество типа $B$.

Пусть Е есть образ $E$ помощью преобразования $(T)$. Очевидно тогда, что $S' \cdot \varepsilon$ есть образ $\Omega' \cdot E$ и, следовательно, $S' \cdot \varepsilon$ есть множество $B$ того же класса как и $\Omega' \cdot E$.

Предположим, теперь, что $\Omega'$ пробегает совокупность областей $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \ldots$ таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} \Omega_n = \Omega$, тогда их образы образуют также последовательность областей $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, где в частности, могло бы случиться, что $S$ есть вся плоскость $(x, y)$.

Однако мы наложим следующее ограничение на наше преобразование, а именно: мы предположим, что внешняя мера $S_n$ остается ограниченной при неограниченном возрастании $n$.

Мы скажем тогда, что преобразование $(T)$ однозначное и интегрально-ограниченное. Тогда последовательность $\Omega_1 \cdot E \subset \Omega_2 \cdot \subset \Omega_3 \cdot E \subset \ldots$ преобразуется в последовательность $S_1 \cdot \mathrm{E} \subset S_2 \cdot \mathrm{E} \subset S_3 \cdot \mathrm{E} \subset \ldots$ Мы условились ранее (см. упомянутую нашу статью) ввести следующее обозначение

$$|S_n \cdot \mathrm{E}| = [\varphi, \psi]_{\mathrm{E} \cdot \Omega_n}$$

Очевидно, что последовательность $\{[\varphi, \psi]_{\mathrm{E} \cdot \Omega_n}\}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ есть неубывающая последовательность, и потому в силу ограниченности) внешней меры $S_n$ следует, что и величины $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E} \cdot \Omega_n}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots$ ограничены в их совокупности, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} [\varphi, \psi]_{\mathrm{E} \cdot \Omega_n}$ существует. Мы условимся его обозначать через $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E} \cdot \Omega}$ или, поскольку $E \cdot \Omega = E$, просто через $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}$.

Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} [\varphi, \psi]_{\mathrm{E}\Omega_n} = [\varphi, \psi]_{\Omega}$. Это есть первое обобщение нашего символа. Отсюда следует, что все свойства символа $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}$, полученные в нашей предшествующей статье, переносятся на наше новое обобщение, а именно:

Если имеется два преобразования

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v) \\ y &= \psi\ (u, v) \end{aligned}\right\} (T_1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \varphi_2(u, v) \\ y &= \psi\ (u, v) \end{aligned}\right\} (T_2)$$

однозначные и интегрально ограниченные, то и преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \\ y &= \psi\ (u, v) \end{aligned}\right\} (T_3)$$

будет также преобразованием того же типа и

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_{\mathrm{E}} = [\varphi_1, \psi]_{\mathrm{E}} + [\varphi_2, \psi]_{\mathrm{E}}$$

П р и м е ч а н и е. Отсюда следует более общее заключение в отношении обеих функций, а именно:

$$1) \qquad [\sum_1^n \varphi_i, \sum_1^m \psi_j]_{\mathrm{E}} = \sum_1^n \sum_1^m [\varphi_i, \psi_j]_{\mathrm{E}},$$

если каждая пара $(\varphi_i, \psi_j)$ дает однозначное интегрально-ограниченное преобразование.

2) $[\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2}$, если $E_1 \cdot E_2 = 0$.

3) $[a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E$, где $a > 0$ $b > 0 = (\text{const})$.

4) $[u, v]_E = |E|$.

5) Мы теперь скажем, что пара $(\varphi, \psi)$ однозначно интегрально-ограниченная, если соответствующее преобразование обладает этим свойством. Если соответствие прямое, то добавляем еще эпитет „прямая пара". Очевидно, что тогда $(-\varphi, \psi)$ будет обратной парой, также и $(\varphi, -\psi)$ и $(\psi, \varphi)$.

Для обратной пары мы условимся определить наш символ следующим образом. Если $(\varphi, \psi)$ обратная пара, то $(\psi, \varphi)$ прямая; мы положим тогда $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$. На этом основании мы можем писать

$$[\varphi, \varphi]_E = 0.$$

## 2. ОГРАНИЧЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ

Пусть нам даны две прямые пары $(\varphi_1, \psi)$ и $(\varphi_2, \psi)$ (сохраняем все прежние обозначения). Составим новую пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$, которая уже не будет однозначной парой. Пусть первые две пары интегрально-ограниченные. Тогда мы назовем пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$ также интегрально-ограниченной.

Обобщим наш символ на эту пару следующим образом:

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E$$

Таким образом это равенство есть предельное равенство, полученное из равенства

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_{E \cdot \varrho_n} = [\varphi_1, \psi]_{E \cdot \varrho_n} - [\varphi_2, \psi]_{E \cdot \varrho_n},$$

введенного в цитированной нами статье. Отсюда и все свойства символа сохраняются без изменения.

Возьмем более общий символ. Пусть пары $(\varphi_1, \psi_1)$, $(\varphi_1, \psi_2)$, $(\varphi_2, \psi_1)$, $(\varphi_2, \psi_2)$ однозначные и интегрально-ограниченные. Составим пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$. Мы положим

$$[(\varphi_1 - \varphi_2), (\psi_1 - \psi_2)]_E = [\varphi_1, \psi_1]_E + [\varphi_2, \psi_2]_E - [\varphi_1, \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1]_E.$$

Прежде всего этот обобщенный символ независим от выбора отдельных функций $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ и $\psi_2$, а только от разностей $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi_1 - \psi_2$.

Символ $[\varphi, \psi]_E$ для ограниченной пары обладает, таким образом, следующими свойствами:

1) $[\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2}$ если $E_1 \cdot E_2 = 0$

2) $[a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E$, где $a$ и $b$ — постоянные

3) $[\sum\limits_1^n a_k \varphi_k, \sum\limits_1^m b_i \psi_i] = \sum\limits_1^n \sum\limits_1^m a_k b_i [\varphi_k, \psi_i]_E$

4) $[a, \psi]_E = [\varphi, a]_E = 0$, где $a$ постоянное.

5) $[\varphi, \varphi]_E = 0$.

6) $[\varphi_1, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$.

7) $[u, v]_E = |E|$.

Предположим теперь, в частности, что функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ равномерно-непрерывны, включая и границы области, так что каждый образ ограниченного множества будет также ограничен. Если области $\Omega$ соответствует множество $S$, то в этом случае $S$ ограничено.

Отметим, что вообще пары $(\varphi_1, \psi_1)$, $(\varphi_2, \psi_1)$, $(\varphi_1, \psi_2)$, $(\varphi_2, \psi_2)$ могут быть прямыми интегрально-ограниченными, причем $\varphi_1$, $\psi_1$, $\varphi_2$, $\psi_2$ не обязательно непрерывны, но тем не менее функции $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi_1 - \psi_2$ будут всюду непрерывны, включая и границу области $\Omega$. Мы скажем, что в этом частном случае пара $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$ будет называться просто ограниченной (или локально-ограниченной).

### 3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ СИМВОЛА $[\varphi, \psi]_E$

Пусть теперь область $\Omega$ распадается на счетное или конечное множество областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_n \ldots$ такого типа, что данная пара непрерывных функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ локально-ограничена в каждой области $\Omega_i$ в том смысле, как это было указано в § 2.

Предположим, что $E_i$ какое-либо $B$ множество в области $\Omega_i$ и что ряд $\sum\limits_{(i)} \left| [\varphi, \psi] \right|_{E_i}$, сходящийся при любом выборе множеств $E_i$. Тогда мы введем следующее обобщение нашего символа

$$[\varphi, \psi]_E = \sum_{(i)} [\varphi, \psi]_{\Omega_i E}$$

Легко проверить, что все свойства символа, перечисленные в § 2, переносятся без изменения на этот вновь обобщенный символ. Все это совершается так: сначала формулы § 2 применяются к множествам $\Omega_i E$, а затем эти формулы почленно суммируются.

Отметим, что в каждой из областей $\Omega_i$ имеем $\varphi = \varphi_1^{(i)} - \varphi_2^{(i)}$ и $\psi = \psi_1^{(i)} - \psi_2^{(i)}$, где пары $(\varphi_1^{(i)} \psi_1^{(i)})$, $(\varphi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $(\varphi_2^{(i)}, \psi_1^{(i)})$ и $(\varphi_2^{(i)}, \psi_2^{(i)})$ — прямые однозначные интегрально-ограниченные, а потому вообще разрывные на границе $\Omega_i$.

Особенно интересен тот частный случай, когда пара $(\varphi, \psi)$ будет прямой однозначной интегрально-ограниченной в каждой из областей.

Случай локальной ограниченности здесь, очевидно, возможен только тогда, когда имеет место свойство локальной ограниченности в каждой из областей $\Omega_i$.

Пример:

$$x + yi = (u + iv)^n \quad (i = \sqrt{-1}),$$

где $n$ — натуральное, $\Omega$ — круг $(u^2 + v^2 = 1)$, тогда $S$ есть также круг $(x^2 + y^2 = 1)$. Если мы разобьем круг $\Omega$ на равные секторы в количестве

$n$, то каждый из них можно назвать областями $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Каждая область $\Omega_i$ (не считая ее границы) отображается на область $S$, образованную внутренней частью круга за вычетом одного радиуса. Поэтому, если $E_1, E_2, \ldots E_n$ будут множествами, расположенными строго внутри соответствующих областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \ldots, \Omega_n$, то их образы $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots \mathrm{E}_n$ будут вообще взаимно налагаться друг на друга; тем не менее отображение всякой области $\Omega_i'$, лежащей целиком внутри $\Omega_i$, совершается однозначно на область $S'$, лежащую целиком внутри $S$.

## § 4. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ, ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ВАРИАЦИИ

Пусть $E \subset \Omega$ некоторое фиксированное $B$множество, а $\tilde{E} \subset E$ другое переменное $B$ множество.

Рассмотрим следующие величины

$$\overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}} = \sup_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{\mathrm{E}}} \qquad -\underline{V}[\varphi, \psi] = \inf_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{\mathrm{E}}}$$

Легко проверить, что $\overline{V} \geqslant$ и $-\underline{V} \leqslant 0$. Первая из них называется положительной, а вторая отрицательной вариацией функции множества $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}$. Это величины конечные, как это видно из того факта, что $[\varphi, \psi]_{\tilde{\mathrm{E}}}$ является ограниченной функцией множества $\tilde{E}$ (см. § 3).

Введем еще в рассмотрение величину: $V[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}$

$$V[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}} = \overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}} + \underline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}.$$

Эта величина называется полной вариацией от $[\varphi, \psi[_{\mathrm{E}}$.

Отметим без доказательства ряд известных свойств функций множеств с ограниченной вариацией:

1) $[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}} = \overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}} - \underline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}}$

2) $\overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2} = \overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}_1} + \overline{V}[\varphi, \psi]_{\mathrm{E}_2}$ если $E_1 \cdot E_2 = 0$.

3) $\overline{V}[\varphi_1 + \varphi_2, \psi] \leqslant \overline{V}[\varphi_1, \psi]_{\mathrm{E}} + \overline{V}[\varphi_2, \psi]_{\mathrm{E}}$.

Также аналогичные свойства для $\underline{V}$ и для $V$.

Из свойств функций областей и множеств вытекает еще следующее.

Пусть в области $\Omega$ имеется точка $(u, v)$ и окрестность (в виде окружности) этой точки $\delta_\rho(u, v)$, где $\rho$ означает радиус этой окружности.

Рассмотрим какое-либо множество $E$ ($|E| > 0$), такое, что его мера $> 0$ в любой окресности $\delta_\rho(u, v)$ (т. е. при любом $\rho$). Больше того, предположим, что $(u, v)$ есть точка плотности для множества $E$, т. е.

$$\frac{|E \cdot \delta_\rho(u, v)|}{|\delta_\rho(u, v)|} = \frac{|E \cdot \delta_\rho(u, v)|}{\pi\rho^2} \text{ стремится к 1 при } \rho \to 0.$$

Рассмотрим величину

$$\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta_\rho}}{\pi\rho^2} = \frac{[\varphi, \psi]_{E\delta_\rho}}{[u, v]_{\delta_\rho}}$$

Пусть при $\rho$, стремящемся к пределу 0, величина $\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta_\rho}}{[u, v]_{\tilde{\delta}_\rho}}$ или, что то же, $\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta_\rho}}{[u, v]_{E\delta_\rho}}$ стремится к определенному пределу, независимо от выбора $(u, v)$, лишь бы $(u, v)$ была точкой плотности $E$. Тогда мы назовем этот предел обобщенным якобианом и обозначим его через $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$. Очевидно, что

$$\frac{D[\varphi_1, \psi]}{D[u, v]} + \frac{D[\varphi_2, \psi]}{D[u, v]} = \frac{D[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]}{D[u, v]}$$

Отметим следующие свойства:

4) $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$ существует почти всюду в множестве $E$.

5) $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{V[\varphi, \psi]_{E\delta_\rho}}{\pi\rho^2} = \left|\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}\right|$ почти всюду в множестве $E$.

Определение. $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ называется абсолютно-непрерывной функцией $\tilde{E} \subset E$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}| < \varepsilon$, если $|\tilde{E}| < \delta$. Пара $(\varphi, \psi)$ называется в этом случае абсолютно-непрерывной.

6) Если $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ абсолютно-непрерывна, то $\overline{V}$, $\underline{V}$ и $V$ также абсолютно-непрерывны.

7) Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ состоит в том, что

$$[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \iint\limits_{\tilde{E}} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \cdot du\, dv.$$

В этом случае мы также имеем, что

$$V[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \iint\limits_{\tilde{E}} \left|\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}\right| \cdot du\, dv$$

## § 5. РАССМОТРЕНИЕ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

а) Пусть имеется пара $[u, f(u, v)]$. Рассмотрим преобразование внутри квадрата

$$\begin{bmatrix} 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} x = u \\ y = f(u, v) \end{matrix}\right\} \cdot T,$$

где $f(u, v)$ есть возрастающая функция $v$ при всяком $u$ и непрерывная во всяком интервале $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ и может быть разрывная при $v = 0$ и $v = 1$, причем может быть, что $f(u, 0) = -\infty$, а $f(u, 1) = +\infty$, или же только одна из величин $f(u, 0)$ или или $f(u, 1)$ конечна.

Потребуем еще, чтобы образ нашего квадрата при нашем преобразовании $(T)$ был бы областью, имеющей ограниченную внешнюю меру. Тогда преобразование $(T)$ будет однозначное и интегрально-ограниченное. Очевидно, что для этого необходимо (но недостаточно), чтобы множество значений $u$ в отрезке $[0,1]$, для которых $f(u, v]$ или $f(u, 1)$ (или оба вместе) бесконечны, имело бы меру $=0$.

Обозначим через $E_u$ это множество. Итак $|E_u|=0$.

Предположим теперь наличие более общего условия.

б) Пусть $f(u, v)=f_1(u, v)-f_2(u, v)$, где $f_1(u, v)$ и $f_2(u, v)$ — возрастающие функции $v$ для каждого значения $u$ непрерывные в любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$.

Предположим теперь, что множество $E_u$ для обеих функций одно и то же с той целью, чтобы $f(u, v)$ была бы функцией непрерывной при каждом $u$ как функция $v$. Значит, для $u \overline{\in} E_u$ функция $f(u, v)$ есть разность двух непрерывных возрастающих функций $\cdot\, v$ и поэтому $f(u, v)$ есть функция $v$ ограниченной вариации; наоборот, при $u \in E_u$ этого вообще не будет.

Значит, если мы обозначим полную вариацию $f(u, v)$ как функции $v$ через $W_v(u)$, то $W_v(u)$ будет конечной величиной вне множества $E_u$, т. е. почти всюду на $[0 \leqslant u \leqslant 1]$.

Обозначим также через $W_v^+(u)$ и $-W_v^-(u)$ ее положительную и отрицательную вариации. Рассмотрим два преобразования

$$\left.\begin{array}{l} x=u \\ y=f_1(u, v) \end{array}\right\}(T_1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} x=u \\ y=f_2(u, v) \end{array}\right\}(T_2)$$

Пусть дано некоторое $B$ множество $E \subset \Omega$ и пусть $\mathrm{E}_1^{(u)}$ и $\mathrm{E}_2^{(u)}$ образы его сечений данной прямой $u=\text{const}$, которым соответствуют через $(T_1)$ и $(T_2)$ конечные величины, исключая, быть может, множества меры нуль (а именно — исключая множества $E_u$); тогда очевидно, что

$$[u, f_1(u, v)]_{\mathrm{E}}=\int_0^1 |\mathrm{E}_2^{(u)}|\, du \text{ и } [u, f_2(u, v)]_{\mathrm{E}}=\int_0^1 |\mathrm{E}_2^{(u)}|\, du,$$

поэтому

$$[u, f(u, v)]_{\mathrm{E}}=\int_0^1 \{\,|\mathrm{E}_1^{(u)}|-|\mathrm{E}_2^{(u)}|\,\}\, du.$$

Возьмем теперь $E=\Omega$, тогда

$$[u, f_1(u, v)]_\Omega=\int_0^1 [f_1(u, 1)-f_1(u, 0)]\, du$$

и

$$[u, f_2(u, v)]_\Omega=\int_0^1 [f_2(u, 1)-f_2(u, 0)]\, du$$

Откуда, вычитая одно равенство из другого, получим

$$[u, f(u, v)]_\Omega=\int_0^1 [f(u, 1)-f(u, 0)]\, du,$$

но

$$f(u,1)-f(u,0)=W_v^+(u)-W_v^-(u)$$

Значит

$$[u, f(u,v)]_\Omega=\int_0^1 W_v^+(u)\,du-\int_0^1 W_v^-(u)\,du.$$

Легко также проверить, что

$$\overline{V}\,[u, f(u,v)]_\Omega=\int_0^1 W_v^+(u)\,du.$$

$$\underline{V}\,[u, f(u,v)_\Omega=\int_0^1 W_v^-(u)\,du.$$

Следовательно, сложив последние равенства, получим

$$V\,[u, f(u,v)]_\Omega=\int_0^1 W_v(u)\,du$$

Значит, мы приходим к следующему заключению. Для того, чтобы пара $[u, f(u,v)]$ была интегрально-ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^1 W_v(u)\,du$ существовал.

Совершенно аналогично трактуется случай пары $[f(u,v), v]$; она интегрально-ограниченная, если $\int\limits_0^1 W_u(v)\,dv$ существует. Здесь $W_u(v)$ есть полная вариация $f(u,v)$ как функции $u$ при данном значении $v$.

Это как раз то условие, которое дает Товнелли в вопросе квадрируемости поверхностей $z=f(x,y)$ о смысле Лебега, называя это условие свойством ограниченности полной вариации функции двух переменных [2].

Отметим еще, что

$$V\,[u, f(u,v)]_E=\int_0^1 W_v^{E_v}(u)\,du$$

$$V\,[f(u,v), v]_E=\int_0^1 W_u^{E_u}(v)\,dv,$$

где $W_v^{E_v}(u)$ означает полную вариацию $f(u,v)$ к к функции $u$ при данном $v$ по множеству $E_v$, полученному от сечения $E$ прямой $v=wnst$. Аналогичный смысл имеет $W_u^{E_u}(v)$.

## § 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть нам дана поверхность $S$, заданная уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{array}\right\} (S) \qquad (u, v) \in \Omega$$

где $\varphi$, $\psi$ и $\chi$ непрерывные функции в области $\Omega$, причем пары $(\psi, \chi)$, $(\chi, \varphi)$ и $(\varphi, \psi)$ интегрально-ограничены $\Omega$.

Пусть $E$ есть какое-либо $B$ множество. Рассмотрим следующий вектор

$$R_E = [\psi, \chi]_E \cdot \bar{i} + [\chi, \varphi]_E \cdot \bar{j} + [\varphi, \psi]_E \cdot \bar{\kappa}.$$

Пусть $E$ есть круг $\delta_\rho$ радиуса $\rho$ и пусть

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{[\psi, \chi]\delta_\rho}{|\delta_\rho|}; \ \lim_{\rho \to 0} \frac{[\chi, \varphi]\delta_\rho}{|\delta_\rho|} \text{ и } \lim_{\rho \to 0} \frac{[\varphi, \psi]\delta_\rho}{|\delta_\rho|}$$

существует одновременно. Это имеет место почти всюду в $\Omega$. Эти величины мы условились обозначать соответственно через

$$\frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]}, \quad \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \quad \text{и} \quad \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$$

Тогда вектор

$$\frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]} \bar{i} + \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \bar{j} + \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \bar{\kappa}$$

носит название нормального вектора к поверхности.

Легко проверить, что этот вектор независим от выбора системы координат так же точно, как и вектор $R_E$. Мы этого не доказываем здесь, отсылая к доказательству, данному в указанной нами статье.

Составим затем величину длины вектора

$$|\bar{R}_E| = \sqrt{[\varphi, \psi]_E^2 + [\chi, \varphi]_E^2 + [\varphi, \psi]_E^2} = \{\varphi, \psi, \chi\}_E$$

Разобьем $\Omega$ на $n$ $B$ множеств $E_1$, $E_2 \ldots$, $E_n$ и рассмотрим точную верхнюю границу выражения:

$$\sum_{K=1}^{n} \{\varphi, \psi, \chi\}_{E_k}$$

при всевозможных выборах множеств $E_1, \ldots, E_n$ и $n$. Эта граница и будет мерой поверхности $S$ (соответствующей области $\Omega$).

Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности в нашем смысле состоит в том, что пары $(\psi, \chi)$, $(\chi, \varphi)$ и $(\varphi, \psi)$ были бы интегрально-ограниченными. Это обстоятельство вытекает из очевидного сложного неравенства

$$\left.\begin{matrix} V(\psi,\chi)_\Omega \\ V(\chi,\varphi)_\Omega \\ V(\varphi,\psi)_\Omega \end{matrix}\right\} \leqslant \sum_1^n \sqrt{\{V[\psi,\chi]_{E_k}\}^2 + \{V[\chi,\varphi]_{E_k}\}^2 + \{V[\varphi,\psi]_{E_k}\}^2} \leqslant V[\psi,\chi]_\Omega + \\ + V[\chi,\varphi]_\Omega + V[\varphi,\psi]_\Omega,$$

а также из того факта, что мера поверхности определяется еще как точная верхняя граница величины:

$$\sum_1^n \sqrt{\{V[\psi,\chi]_{E_k}\}^2 + \{V[\psi,\varphi]_{E_k}\}^2 + \{V[\varphi,\psi]_{E_k}\}^2}$$

что доказывается чрезвычайно просто.

Для частного случая поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, следует, что мера поверхности может быть определена как точная верхняя граница величины:

$$\sum_1^n \sqrt{|E_k|^2 + \{\int_0^1 W_u^{E_{ku}}(u)\,du\}^2 \quad \{\int_0^1 W_v^{E_{kv}}(v)\,dv\}^2}.$$

Смысл входящих сюда обозначений был определен в конце § 5. Здесь $x = u$ и $y = v$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А С. Praванько. — О некоторых непрерывных преобразованиях плоскости в плоскость и мероопределении поверхности. Уч. зап. Львов. университета, т. XII, вып. 3, 1949.

2. Tonelli L. — Sulla quadratura delle superficie. Atti Aecad Nar Lincei (6). 3 (357—363), (445—450), (638—658) 1926.