Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, випуск 5 1953

С. Д. БЕРМАН

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ПАССИВНОЙ ФОРМЕ

ВВЕДЕНИЕ

В различных разделах теории непрерывных групп возникает необходимость рассмотрения бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных от конечного числа неизвестных функций и независимых переменных с аналитическими в окрестности некоторой точки левыми частями вида

$$\left\{f_\alpha\left(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} \ldots\right) = 0\right\} \tag{1}$$

(α — индекс, пробегающий множество любой мощности).

Относительно такой системы в первую очередь встает вопрос о возможности ее сведения к хорошо изученным типам конечных систем.

В 1894 году в работе [4], посвященной теории дифференциальных инвариантов, Тресс впервые высказал теорему о том, что всякая бесконечная система дифференциальных уравнений вида (1) эквивалентна конечной. Доказательство Тресса совершенно неудовлетворительно с современной точки зрения. Для случая, когда левые части уравнений системы (1) представляют собой полиномы относительно неизвестных функций и их производных, Ритт [3] показал, что система либо несовместна, либо содержит эквивалентную себе конечную систему.

В настоящей работе рассматривается общий случай аналитических левых частей; при приведении к пассивной форме допускается сдвиг начальной точки. При этом дополнение к множеству точек, в которых (1) эквивалентна пассивной системе, оказывается нигде не плотным на дифференциальном многообразии системы (1).

I. УПОРЯДОЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Для изучения бесконечной системы дифференциальных уравнений типа (1) весьма полезным оказывается упорядочение множества Γ всевозможных частных производных от неизвестных функций по независимым переменным. Предложения, сходные с приводимыми ниже без доказательства теоремами об упорядочении производных и дифференциальных форм, рассматривались различными авторами. Такого рода теоремы можно найти, например, у Ритта [3].

Производную $\dfrac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} y_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$ будем обозначать символом

$$Д = (i, k_1, \ldots, k_m)$$

Определение 1. Будем говорить, что $Д_1=(i^{(1)}, k_1^{(1)}, \ldots, k_m^{(1)})$ больше $Д_2=(i^{(2)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_m^{(2)})$, если первая из необращающихся в нуль разностей $(i^{(1)}-i^{(2)})$, $(k_1^{(1)}-k_1^{(2)}), \ldots, (k_m^{(1)}-k_m^{(2)})$ положительна.

Непосредственно видно, что упорядочение Γ, согласно определению (1), обладает следующими свойствами:

1) Для любых двух различных производных $Д_1$ и $Д_2$ имеет место одно и только одно из соотношений:

$$Д_1 < Д_2 \text{ или } Д_1 > Д_2.$$

2) Если $Д_1 < Д_2$ и $Д_2 < Д_3$, то $Д_1 < Д_3$ (транзитивность).

3) $Д_\alpha < \frac{\partial Д_\alpha}{\partial x_i} (i=1, \ldots, m)$, т. е. дифференцирование „увеличивает" производную.

4) Если $Д_1 < Д_2$, то $\frac{\partial Д_1}{\partial x_i} < \frac{\partial Д_2}{\partial x_i} (i=1, \ldots, m)$ (одинаковое дифференцирование не нарушает порядка).

В дальнейшем будут использованы только эти четыре свойства нашего упорядочения. Поэтому всякое другое упорядочение, удовлетворяющее условиям 1)—4), также подходит для наших целей.

Имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. Всякая убывающая последовательность производных $Д_1 > Д_2 > Д_3 > \ldots$ содержит только конечное число членов.

Таким образом, определение 1 превращает Γ во вполне упорядоченное множество.

Определение 2. Условимся называть производную $Д_1=(i^{(1)}, k_1^{(1)}, \ldots, k_m^{(1)})$ кратной производной $Д_2=(i^{(2)}, k_1^{(2)}, \ldots, k_m^{(2)})$, если

$$i^{(1)}-i^{(2)}=0;\ k_j^{(1)}-k_j^{(2)} \geqslant 0;\ (j=1, \ldots, m).$$

Если $Д_1$ кратна $Д_2$, то $Д_1$ можно получить из $Д_2$ дополнительным дифференцированием (хотя бы нулькратным).

Определение 3. Всякое множество производных $M=\{Д_1, \ldots, Д_s, \ldots\}$, такое, что для любых $Д_i$, $Д_j \in M$ $(i \neq j)$ $Д_i$ и $Д_j$ не кратны друг другу, назовем отмеченным множеством.

ТЕОРЕМА 2. Отмеченное множество производных может содержать только конечное число элементов.

Доказательство этого предложения очевидно.

Определение 4. Назовем дифференциальной формой любую комплекснозначную функцию f_α от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$, неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ и конечного числа их производных.

Упорядочение множества производных с выполнением условий 1) — 4) естественным образом приводит к полуупорядочению множества дифференциальных форм. Будем обозначать старшую производную произвольной дифференциальной формы f через $L(f)$. Если f не зависит* от неизвестных функций $y_1, \ldots, y_n$, то положим $L(f)=0$.

Определение 5. Будем говорить, что ранг формы f_1 меньше ранга формы f_2 и обозначать это записью $R(f_1) < R(f_2)$, если $L(f_1) < L(f_2)$.

* Когда мы говорим, что форма f зависит от неизвестных функций, то подразумевается, что они могут входить в f под знаком дифференцирования.

Если $L(f_1)=L(f_2)$, мы будем считать, что $R(f_1)=R(f_2)$. В частности, все дифференциальные формы, не содержащие неизвестных функций, имеют одинаковый ранг.

Согласно определению 5, всякое соотношение порядка между дифференциальными формами сводится к такому же соотношению между их старшими производными. Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Во всяком непустом множестве дифференциальных форм существует форма наименьшего ранга.

Определение 6. Форму f_2 назовем приведенной по отношению к f_1, если f_2 не содержит производных, кратных $L(f_1)$.

Определение 7. Будем называть цепочкой последовательность $Q=\{f_1, f_2, \dots f_s, \dots\}$ дифференциальных форм, обладающую следующими свойствами: 1) Если $s=1$, то $f_1 \neq 0$. 2) При $s>1$ f_1 зависит от неизвестных функций; при этом для $i>j$ f_i приведена по отношению к f_j и $R(f_j)<R(f_i)$.

Нетрудно видеть, что всякая цепочка может содержать только конечное число членов. Множество всех цепочек также можно упорядочить.

Определение 8. Пусть даны две цепочки $Q_1=\{f_1, \dots, f_r\}$ и $Q_2=\{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$. Мы скажем, что ранг Q_1 больше ранга Q_2 и будем обозначать это записью $R(Q_1)>R(Q_2)$, если 1) существует такое натуральное число j, что $R(f_i)=R(\varphi_i)$ при $i=1, \dots, j-1$ и $R(f_j)>R(\varphi_j)$, либо 2) $s>r$ и $R(f_i)=R(\varphi_i)$ для $i=1, \dots, r$.

Легко доказывается транзитивность такого упорядочения цепочек.

Из любого множества L дифференциальных форм, содержащего ненулевые формы, можно выделить последовательность форм, являющуюся цепочкой.

В качестве цепочки можно взять, например, любую форму $\varphi \neq 0$ $(\varphi \in L)$.

Определение 9. Пусть дано множество L дифференциальных форм. Цепочку наименьшего ранга, которую можно составить из форм L, назовем разрещающей цепочкой в L.

Определение 10. Пусть $Q=\{f_1, \dots, f_s\}$ — цепочка и φ приведена по отношению ко всем f_i $(i=1, \dots, s)$. Условимся в этом случае говорить, что φ приведена по отношению к Q.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L — множество дифференциальных форм, $Q=\{f_1, \dots, f_s\}$ — разрешающая цепочка в L и $L \supset \varphi \neq 0$. Тогда φ не является приведенной по отношению к Q.

Доказательство. Пусть форма φ приведена по отношению к Q. Тогда $R(\varphi)>R(f_1)$, так как в противном случае φ сама была бы цепочкой меньшего ранга, чем Q. Продолжив это рассуждение, мы придем к выводу, что $R(\varphi)>R(f_s)$, но тогда $\tilde{Q}=\{f_1, \dots, f_s, \varphi\}$ — цепочка, меньшего ранга, чем ранг разрешающей цепочки Q в L, составленная из форм L. Полученное противоречие доказывает теорему.

II. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы переходим к рассмотрению систем дифференциальных уравнений в частных производных от n неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ m независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\left\{ f_\alpha \left(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} \ldots \right) = 0 \right\} \tag{1}$$

(α пробегает множество любой мощности).

Так как множество Γ (независимых переменных, неизвестных функций и их всевозможных производных) счетно, то мы можем так расположить его элементы в бесконечную последовательность: $\Gamma = \{u_1, u_2, \ldots\}$, что $u_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $u_{m+k} = y_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

В дальнейшем относительно систем вида (1) мы будем предполагать выполненными следующие условия:

а) Для всех α f_α — дифференциальные формы, аналитические по совокупности входящих в них аргументов (рассматриваемых как независимые переменные) в окрестности некоторой начальной точки $\{u_1^0, u_2^0, \ldots\}$ бесконечномерного пространства.

б) f_α $(u_1^0, u_2^0, \ldots) = 0$.

в) Существуют такие положительные числа r_i, что ряд f_α $(u_1, u_2 \ldots)$ для всех α сходится при $|u_i - u_i^0| < r_i$.

Определение 11. Решением системы (1) назовем систему функций $y_i = \varphi_i$ $(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, аналитических в области Ω: $|x_j - x_j^0| < k_j$, $k_j \leqslant r_j$, $x_j = u_j$ $(j = 1, \ldots, m)\lambda$ обладающих свойствами:

1. Для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega$ точка $(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots, u_s \ldots)$ такова, что $|u_m - u_m^0| < r_m$ (m пробегает натуральный ряд).

2. Для $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$ функции φ_i при подстановке в систему (1) вместо y_i обращают систему (1) в тождество.

Определение 12. Пусть имеются две системы уравнений

$$\mathrm{I}\ \{f\alpha\ (\ldots)\} = 0 \text{ и } \mathrm{II}\ \{\varphi_\beta\ (\ldots)\} = 0,$$

заданные в окрестности общей начальной точки $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_s^0, \ldots)$ и удовлетворяющие условиям а), б), в). Назовем эти системы эквивалентными в точке $(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_s^0, \ldots)$, если в некоторой области $|x_i - x_i^0| < k_i$, $x_i = u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ всякое решение системы I является решением системы II и наоборот.

Определение 13. Аналитическим нулем системы (1) будем называть всякую точку бесконечномерного пространства $(u_1, u_2, \ldots, u_s \ldots)$, $|u_j - u_j^0| < r_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, обращающую в нуль все уравнения системы (1). Множество A всех аналитических нулей системы (1) назовем аналитическим многообразием системы.

Определение 14. Условимся называть дифференциальным нулем системы точку $\{u_i'\}$, обладающую следующими свойствами:

1) $\{u_i'\}$ — аналитический нуль системы,

2) существуют функции $y_i = \varphi_i$ $(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающие уравнения (1) в некоторой области Ω: $|x_j' - x_j| < k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

в тождества, для которых u_i' $(i > m)$ являются значениями производных $\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m} y_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$ в точке $(x_1', \ldots, x_m')$, $x_j' = u_j'$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Дифференциальным многообразием $\mathfrak{M}$ системы (1) будем называть совокупность дифференциальных нулей системы.

Если (1) совместна, то любая точка $\{u_i'\}$, где $u_i' = x_i'$, $u'_{m+k} = y_k$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, а остальные u_i представляют собой значения производных от y_j в точке $(x_1', \ldots, x_m')$, является дифференциальным нулем системы.

Определение 15. Пусть дана конечная система дифференциальных уравнений от n неизвестных функций m независимых переменных вида:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m} y_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} = f(\ldots\ldots); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{s_1+s_2+\ldots+s_m} y_j}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_m^{s_m}} = \varphi(\ldots\ldots) \end{gathered} \tag{2}$$

аналитическими в окрестности некоторой точки правыми частями. предположим, что эта система удовлетворяет следующим ограничениям:

1) в правой части каждого уравнения присутствуют производные, меньшие, чем в левой части. (Мы предполагаем, что множество производных каким-то образом упорядочено с выполнением свойств 1)—4));

2) производные в левых частях образуют отмеченное множество (см. определение 3);

3) если в левых частях встречаются производные от одного и того же y_i, то должно выполняться следующее условие: пусть $Д_1 = f_1(\ldots)$ и $Д_2 = f_2(\ldots)$ — уравнения с одним и тем же y_i в левых частях и $Д$ производная, кратная одновременно $Д_1$ и $Д_2$:

$$Д_1 = (i,\ k_1^{(1)}, \ldots, k_m^{(1)}),\ Д_2 = (i,\ k_1^{(2)}, \ldots, k_m^{(2)}),\ Д_3 = (i,\ k_1, \ldots, k_m)$$

Тогда

$$\frac{\partial^{\left(k_1 - k_1^{(1)}\right) + \ldots + \left(k_m - k_m^{(1)}\right)} f_1}{\partial x_1^{\left(k_1 - k_1^{(1)}\right)} \ldots \partial x_m^{\left(k_m - k_m^{(1)}\right)}} = \frac{\partial^{\left(k_1 - k_1^{(2)}\right) + \ldots + \left(k_m - k_m^{(2)}\right)} f_2}{\partial x_1^{\left(k_1 - k_1^{(2)}\right)} \ldots \partial x_m^{\left(k_m - k_m^{(2)}\right)}}$$

тождественно, в силу уравнений (2), т. е. если исключить из этого равенства все кратные производных, участвующих в левых частях системы (2), с помощью уравнений (2).

Систему (2), удовлетворяющую ограничениям 1) — 3), мы будем называть пассивной системой (см. [1]).

Данное нами определение пассивной системы несколько уже определения Рикье, но вполне достаточно для дальнейшего.

Пассивные системы играют исключительную роль в общей теории уравнений в частных производных. Именно для них сформулированы теоремы существования и единственности решения при заданных начальных условиях, В связи с этим представляет определенный интерес изучение возможности приведения системы (1) к эквивалентной ей пассивной системе. Отметим, что вопрос о приведении к пассивной форме любой конечной аналитической системы был детально изучен выдающимся советским математиком Н. М. Гюнтером.

ЛЕММА 1. Пусть система (1), удовлетворяющая условиям а), б), в), содержит уравнения вида

$$Д_1 = f_1(\ldots), \; Д_2 = f_2(\ldots), \ldots, \; Д_s = f_s(\ldots\ldots), \tag{3}$$

разрешенные относительно старших производных, причем $M = \{Д_1, \ldots, Д_s\}$ — отмеченное множество. Тогда с помощью уравнений (3) можно в (1) исключить все кратные производные $Д_i$ $(i=1, \ldots, s)$. Иными словами, система (1) эквивалентна системе, уравнения которой (за исключением уравнений (3) не содержат производных, кратных $Д_i$ $(i=1, \ldots, s)$.

Доказательство. Возьмем любое уравнение системы (1) $f_i=0$, не принадлежащее системе (3), и покажем, как из него исключить все кратные производных $Д_i$ $(i=1, \ldots, s)$.

Пусть f_i содержит такие производные. Обозначим старшую из них через L_1. Пусть L_1 кратна $Д_r$

$$Д_r = (i, k_1^{(r)}, \ldots, k_m^{(r)}), \; L_1 = (i, k_1, \ldots, k_m).$$

Имеет место соотношение

$$\frac{\partial^{\left(k_1 - k_1^{(r)}\right) + \ldots + \left(k_m - k_m^{(r)}\right)} Д_r}{\partial x_1^{\left(k_1 - k_1^{(r)}\right)} \ldots \partial x_m^{\left(k_m - k_m^{(r)}\right)}} = L_1 = \frac{\partial^{\left(k_1 - k_1^{(r)}\right) + \ldots + \left(k_m - k_m^{(r)}\right)} f_r}{\partial x_1^{\left(k_1 - k_1^{(r)}\right)} \ldots \partial x_m^{\left(k_m - k_m^{(r)}\right)}}. \tag{4}$$

Выполним в правой части соотношения (4) дифференцирование и подставим в форму f_i вместо L_1 его выражение (4).

Мы получим форму f_i', не содержащую L_1. Если f_i' не содержит производных, кратных $Д_i$ $(i=1, \ldots, s)$, то процесс исключения произведен. В противном случае, обозначим через L_2 старшую из этих производных. Тогда $L_1 > L_2$. Действительно, новые производные в f_i' могли появиться только из (4), но все производные в правой части (4) меньше, чем L_1. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность производных

$$L_1 > L_2 > L_s > \ldots,$$

которая неминуемо должна оборваться. Таким образом, из любой формы $f_i \bar{\in} (3)$ с помощью (3) может быть произведено исключение производных, кратных $Д_i$ $(i=1, \ldots, s)$.

Для дальнейшего представляется удобным рассматривать аналитическое и дифференциальное многообразия системы (1) как подмножества топологического произведения счетного числа одномерных комплексных пространств (см. [6], стр. 392). При этом A и $\mathfrak{M}$ топологизируются естественным образом. Топологизированное дифференциальное многообразие системы (1) будем обозначать через R.

Отметим, что R метризуемо. Окрестности точек этого пространства условимся обозначать $U^r(z)$, $V^r(z)$ и т. д.

Определение 16. Пусть $z = \{u_i\} \in R$. Мы скажем, что дифференциальная форма φ содержит $\mathfrak{M}$ в окрестности z, если φ аналитична в этой точке и обращается в нуль в некоторой окрестности $U^r(z)$.

Определение 17. Пусть $z = \{u_i\}$ — дифференциальный нуль совместной системы вида (1), удовлетворяющей условиям а), б), в). Присоединим к множеству F всех форм f_α из (1) формы, содержащие $\mathfrak{M}$ в точке z. Получившееся множество дифференциальных форм обозначим $\bar{F}_z$. Разрешающую цепочку в $\bar{F}_z$ будем называть разрешающей цепочкой в точке z для системы (1).

Отметим, что все формы разрешающих цепочек системы (1) для всех $z \in R$ обязательно будут зависеть от неизвестных функций, т. к., если аналитическая функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ обращается в нуль в некоторой окрестности (евклидовой) точки $x_1', x_2', \ldots, x_m'$, то $f(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0$ ($x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные).

ЛЕММА 2. Пусть $z_1 = \{u_i'\} \in R$. Тогда существует такая окрестность $U_0^r(z_1)$, что все $z \in U_0^r(z_1)$ попадают в область сходимости форм разрешающей цепочки в точке z_1. Доказательство этого простого предложения очевидно.

ЛЕММА 3. Пусть $z_1 \in R$ и $U^r(z_1)$ — окрестность, удовлетворяющая условиям леммы 2. Разрешающую цепочку в точке z будем в дальнейшем обозначать через Φ_z. Если $z \in U^r(z_1)$, то $R(\Phi_z) \leqslant R(\Phi_{z_1})$. Действительно, в точке z мы можем присоединять формы, не являющиеся аналитическими в точке z_1*.

Определение 18. Пусть $z_0 = \{u_i^0\} \in R$, $U_0^r(z_0)$ — окрестность, для которой выполнены ограничения леммы 2, Φ_{z_0} — разрешающая, цепочка в точке z_0. Если существует такая окрестность $U_1^r(z_0) \subseteq U_0^r(z_0)$ что для всех $x \in U_1^r(z_0)$ Φ_{z_0} остается разрешающей цепочкой, то точку z_0 будем называть точкой экстремальности.

Любую окрестность $U^r(z_0)$, во всех точках которой Φ_{z_0} остается разрешающей цепочкой, назовем окрестностью экстремальности.

ЛЕММА 4. Множество экстремальных точек всюду плотно в R. Доказательство. Пусть $z_1 \in R$. Покажем, что в любой окрестности $U^r(z_1)$ существует экстремальная точка.

Предположим, что z_1 — не экстремальная точка. Найдем окрестность $U_0^r(z_1)$, удовлетворяющую условиям леммы 2. Пусть $V_1^r(z_1) \subseteq U_0^r(z) \cap U^r(z_1)$. Если $z_2 \in V_1^r(z_1)$ — не экстремальная точка, то для нее найдется окрестность $U_1^r(z_2)$, подчиненная ограничениям леммы 2.

Рассмотрим пересечение $V_1^r(z_1) \cap U_1^r(z_2) = W(z_2)$ и возьмем $z_3 \in W(z_1)$. Ввиду соотношения

$$R(\Phi_{z_1}) > R(\Phi_{z_2}) > R(\Phi_{z_3}) > \ldots$$

после конечного числа шагов мы придем в экстремальную точку. Лемма доказана.

Определение 19. Пусть R топологизированное тихоновским образом дифференциальное многообразие совместной системы (1),

* Ясно, что в случае $R(\Phi_z) = R(\Phi_{z_1})$, $\Phi(z_1)$, является разрешающей цепочкой и в точке z.

подчиненной условиям а), б), в). Назовем точкой пассивности системы (1) любую точку $z \in R$, в которой (1) эквивалентна пассивной системе.

ЛЕММА 5. Если $z_0 \in R$, то в любой окрестности $U^r(z_0)$ существует точка, в которой система (1) эквивалентна пассивной системе. Если (1) совместна, то в качестве этой точки всегда можно выбрать экстремальную точку пассивности.

Доказательство. Если система (1) несовместна, то можно сказать, что она эквивалентна в точке z_0 системе $1=0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что (1) совместна. $U^r(z_0)$, в силу леммы 4, содержит экстремальную точку z_1. Будем исследовать (1) в окрестности точки z_1.

Через $\bar{F}$ обозначим множество всех форм f_α из (1), через $\bar{F}_z$ множество всех дифференциальных форм, содержащих $\mathfrak{M}$ в точке z.

Рассмотрим разрешающую цепочку в точке z_1:

$$\Phi_{z_1} = \{f_1, \ldots, f_s\}.$$

Пусть $L(f_i) = q_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Если $\left.\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\right|_{z_1} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то (1) эквивалентна в точке z_1 системе

$$f_1 = 0, \ldots, f_s = 0; \; f_i \in \Phi_{z_1} \; (i = 1, \ldots, s).$$

В самом деле, мы можем разрешить все уравнения $f_i = 0$ относительно старших производных q_i и затем, в силу леммы 1, исключить все их кратные из форм системы $\bar{F}_{z_1}$.

Пусть $f_i \neq \varphi \in \bar{F}_{z_1}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

После исключения всех производных, кратных q_i $(i = 1, \ldots, s)$ φ перейдет в форму φ', содержащую $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1 и приведенную по отношению к Φ_{z_1}. Но тогда, в силу теоремы 4, $\varphi' \equiv 0$. Предположим, что для некоторых $j \leqslant s$ $\left.\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\right|_{z_1} = 0$. Обозначим те формы цепочки Φ_{z_1}, для которых $\left.\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\right|_{z_1} = 0$, через $f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_k}$ (в порядке возрастания номеров).

Пусть $U_e^r(z_1)$ такая окрестность экстремальности точки z_1, что для всех

$$z \in U_e^r(z_1) \; \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \neq 0 \; (i \neq i_j; \; j = 1, 2, \ldots, k).$$

Такая окрестность всегда существует, в силу аналитичности наших форм и экстремальности точки z_1. Возьмем произвольную окрестность $U^r(z_1)$ и покажем, что в ней существует точка пассивности системы (1). Могут представиться только два случая:

1. Существует окрестность $\tilde{U}(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ такая, что для всех $z \in \tilde{U}(z_1)$ и любого натурального p $\left.\frac{\partial^p f_{i_1}}{\partial q^p_{i_1}}\right|_z = 0$.

2. Найдутся такая окрестность $U^r{}_1(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ и такое натуральное число m, что

$$\left.\frac{\partial^j f_{i_1}}{\partial q^j_{i_1}}\right|_z = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1),$$

если $z \in U_1^r(z_1)$, и во всякой окрестности $V^r(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ сустуют такие точки z, в которых $\left.\frac{\partial^m f_{i_1}}{\partial q_i^m}\right|_z \neq 0$.

Рассмотрим сначала первый случай и покажем, что он невозможен. В самом деле, $f_{i_1}(u_0, \ldots, u_t)$ является аналитической функцией своих аргументов в точке z_1. В окрестности любой точки $(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_t)$ (здесь имеется в виду обычная евклидова окрестность), такой, что $z = \{\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t+1}, \ldots\} \in U_1^r(z_1)$, $f_{i_1}(\overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_i)$ разлагается в степенной ряд. Пусть $U_s = q_{i_1}$. Рассмотрим функцию одного переменного u_t

$$f_{i_1}(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{t-1}, u_t) = \varphi(u_t).$$

Разложение $\varphi(u_t)$ в окрестности точки u_t дает:

$$\varphi(u_t) = \varphi'(\tilde{u}_t)\ (u_t - \tilde{u}_t) + \frac{\varphi''(\tilde{u}_t)}{2!}(u_t - \tilde{u}_t)^2 + \ldots =$$

$$= \left.\frac{\partial f_{i_1}}{\partial u_t}\right|_{(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_t)} \cdot (u_t - \tilde{u}_t) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial u_t^2}\right|_{(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_t)} \cdot (u_t - \tilde{u}_t)^2 + \ldots.$$

Так как, по предположению, $\left.\frac{\partial^j f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^j}\right|_{(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_t)} = 0$ при любом натуральном j,

то $f_{i_1}(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{t-1}, u_t) = 0$ при любом u_t. Но это означает, что форма $f_{i_1}(u_0, \ldots, u_{t-1}, a)$, где a — любое комплексное число, содержит дифференциальное многообразие $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1, т. е. принадлежит к $\overline{F}_{z_1}$. Последнее заключение ведет к противоречию. Действительно, всегда можно найти такое a_1, чтобы $f_{i_1}(u_0, \ldots, u_{t-1}, a_1) \not\equiv 0$.

Обозначим дифференциальную форму $f_{i_1}(u_0, \ldots, u_{t-1}, a_1)$ через f_{i_1}'. Ранг f_{i_1}' не может быть меньше ранга f_1, т. к. тогда f_{i_1}' сама была бы цепочкой ранга, меньшего, чем $R(\Phi_{z_1})$. Далее $R(f_{i_1}') \nless R(f_2)$, ибо в этом случае последовательность (f_1, f_{i_1}') имела бы ранг, меньший, чем $R(\Phi_{z_1})$. Продолжая это рассуждение, мы придем к выводу, что $R(f_{i_1}') > R(f_{i_1 - 1})$. Но тогда $S = \{f_1, \ldots, f_{i_1-1}, f_{i_1}'\}$ будет цепочкой и $R(S) < R(\Phi_1)$. Итак, первый случай неосуществим.

Разберем вторую возможность. В случае 2 $\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ содержит $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1 и, следовательно, принадлежит к $\overline{F}_{z_1}$.

Обозначим $\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ через $\tilde{f}_{i_1}$. Тогда $\tilde{\Phi}_{z_1} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{i_1-1}, \tilde{f}_{i_1}, \ldots, f_s\}$ — в $\overline{F}_{z_1}$, причем $R(\tilde{\Phi}_{z_1}) = R(\Phi_{z_1})$. По условию, в любой окрестности $V^z(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ существуют точки z, для которых $\left.\frac{\partial f_{i_1}}{\partial q_{i_1}}\right|_z \neq 0$.

Возьмем одну из таких точек — z_2. Тогда в точке z_2 i_1-й член цепочки Φ_{z_1} будет разрешим относительно $q_{i_1} = L(\tilde{f}_{i_1})$. При этом, т. к. мы не вышли из окрестности экстремальности точки z_1, $\tilde{\Phi}_{z_1}$ остается разрешающей цепочкой в точке z_2.

Заметим, что $z_2 \in U^r(z_1)$ — произвольной, заранее заданной окрестности точки z_1 в R. Дальнейшее доказательство не представляет затруднений.

Рассуждая совершенно аналогично, мы можем в любой окрестности точки z_2, в частности, в $U^r(z_2) \subseteq U^r(z_1)$, найти точку, в которой i_2-й член разрешающей цепочки будет разрешим относительно своей старшей производной и т. д. Через конечное число шагов в произвольной окрестности $U^r(z_1)$ экстремальной точки z_1 мы найдем точку z_k, в которой система (1) будет эквивалентна системе, получаемой приравниванием нулю форм разрешающей цепочки

$$\Phi_{zk} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}.$$

Разрешив уравнения $\{\varphi_i = 0\}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ относительно старших производных, получим пассивную систему

$$q_1 = \psi_1(\ldots.), \ldots. \; q_s = \psi_s(\ldots.),$$

эквивалентную системе (1).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для совместной системы (1), удовлетворяющей условиям а), б), в), дополнение к множеству точек пассивности нигде не плотно в R.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из того факта, что множество экстремальных точек пассивности, всюду плотное в R, согласно лемме 5, образует в R область. В самом деле, пусть z_1 — экстремальная точка пассивности системы (1). Тогда существует такая окрестность $U^r(z_1) \subset U^r_e(z_1)$ (в качестве $U^r_e(z_1)$ можно взять любую окрестность экстремальности точки z_1), что для всех $z \in U^r(z_1)$ формы разрешающей цепочки

$$\Phi_{z_1}\{f_1, \ldots, f_s\}$$

будут обладать тем свойством, что

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\right|_z \neq 0; \; (q_i = L(f_i); \; i = 1, \ldots, s).$$

Разрешив уравнения

$$f_1(\ldots.) = 0, \ldots., f_s(\ldots.) = 0$$

в окрестности любой точки $z \in U^r(z_1)$, мы получим пассивную систему, эквивалентную системе (1). Таким образом, экстремальные точки пассивности образуют область в R.

Алгебраическая теория кольца I_n аналитических в некоторой точке функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, разработанная Рюккертом, позволяет в некоторых частных случаях найти пассивную систему, эквивалентную системе (1), среди более узкого по сравнению с общим случаем основной теоремы класса дифференциальных форм.

ТЕОРЕМА 5. Каждый идеал в I_n обладает конечным базисом.

Определение. 20. Многообразием идеала I в кольце I_n будем называть совокупность общих нулей базисных рядов I. Отметим следующее предложение, аналогичное второй теореме Гильберта для кольца полиномов, фактически доказанное Рюккертом (см. [5]):

ТЕОРЕМА 6. Если ряд $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит многообразие идеала I в кольце I_n, то некоторая натуральная степень $f(x_1, \ldots, x_n)$ входит в I.

Определение 22. Множество Σ аналитических в окрестности точки $\{u_i^0\}$ дифференциальных форм назовем гильбертовски замкнутым, если выполнены следующие условия:

1) если $f \in \Sigma$, $q \in \Sigma$, то $f \pm q \in \Sigma$;

2) из $f \in \Sigma$ следует, что $\varphi f \in \Sigma$, (φ — любая форма, аналитическая в начальной точке);

3) если $f^\rho \in \Sigma$ (ρ — натуральное число), то $f \in \Sigma$;

4) из $f \in \Sigma$ следует, что $\dfrac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} \in \Sigma$.

Любое множество F аналитических в точке $\{u_i'\}$ дифференциальных форм можно дополнить до гильбертовски замкнутого множества, если к множеству $\tilde{F}$ всех линейных комбинаций $\sum\limits_i \psi_i \dfrac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} f_{r_i}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$

($f_{r_i} \in F$, ψ_i — аналитичны в точке $\{u_i'\}$) присоединить все формы φ, удовлетворяющие условию $\varphi^\rho \in \tilde{F}$ (ρ — натуральное число.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\bar{F}$ гильбертовское замыкание множества форм F и $S \subset F$. Если формы, входящие в S, зависят в совокупности от конечного числа производных, то S — идеал. (Конечно, допускается умножение на формы ψ, зависящие только от тех производных, которые входят в формы $\varphi \in S$).

Доказательство этого предложения не представляет затруднений.

ТЕОРЕМА. Пусть дана совместная система вида (1), подчиненная условиям а), б), в). Будем обозначать множество форм f_α через F, его гильбертовское замыкание в точке z через $\bar{F}_z$. Пусть далее A и $\mathfrak{M}$ ее аналитическое и дифференциальное многообразия, а R' и R их тихоновская топологизация. Предположим, кроме того, что система (1) обладает следующими свойствами:

I. В некоторой окрестности $U_0^{r'}(z_0)$ $(z_0 \in R')$ аналитическое многообразие A совпадает с дифференциальным $\mathfrak{M}$.

II. Для всех $z \in U_0^{r'}(z_0)$ выполняется условие: если какая-нибудь форма φ обращается в нуль в $U^{r'}(z)$, то она содержит многообразие идеала S, все формы которого зависят в совокупности только от конечного числа производных $(S \in F)$.

Тогда дополнение к множеству точек пассивности нигде не плотно в $U^{r'}(z_0)$, причем для точки пассивности z_1 эквивалентная системе (1) пассивная система получается путем разрешения некоторых из уравнений $\bar{F}_{z_1}$ относительно старших производных.

Доказательство. В каждой точке $z \in U_0^{r'}(z_0)$ можно гильбертовски замкнуть F до системы $\bar{F}_z$ и взять в $\bar{F}_z$ разрешающую цепочку Φ_z. Эту цепочку условимся называть гильбертовски разрешающей. Так же, как и в лемме 4, можно ввести понятие гильбертовски экстремальной точки и доказать, что множество экстремальных точек всюду плотно в $U^{r'}(z_0)$. При этом I гарантирует, что экстремальные точки будут точками совместности.

Возьмем любую точку $z' \in U_0^{r'}(z_0)$ и покажем, что в любой окрестности $U^{r'}(z')$ существует экстремальная точка пассивности. Отсюда сразу будет следовать утверждение теоремы (см. основную теорему).

Рассмотрим какую-нибудь гильбертовски экстремальную точку $z_1 \in U^{r'}(z')$ и возьмем в ней гильбертовски разрешающую цепочку $\Phi_{z_1} = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

Пусть $L(f_i) = q_i$. Если $\left.\frac{\partial f_i}{\partial q_i}\right|_{z_1} \neq 0$, $(i = 1, \ldots, k)$, то z_1 будет точкой пассивности и система (1) будет эквивалентна в точке z_1 пассивной системе

$$\{q_i = \psi_i(\ldots)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Предположим, что $\left.\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\right|_{z_1} = 0 \ (j = i_1, \ldots, i_s)$.

Тогда рассмотрим „достаточно малую“ окрестность экстремальности $U_e^{r'}(z_1) \subseteq U^{r'}(z')$, для которой

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_i} \neq 0 \quad (i \neq i_j;\ j = 1, \ldots, s).$$

Следует исследовать два случая:

а′) Для любого натурального n $\frac{\partial^n f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^n} = 0$ в некоторой окрестности $\tilde{U}^{r'}(z_1)$.

Это предположение приводит к противоречию так же, как и при доказательстве леммы 5.

б′) Найдется такое натуральное m, что $\left.\frac{\partial^n f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^n}\right|_z = 0 (n = 1, \ldots, m-1)$, если $z \in V^{r'}(z_1)$ ($V^{r'}(z_1)$ — некоторая окрестность точки z_1), и в любой окрестности $W^{r'}(z_1)$ найдутся точки, в которых $\frac{\partial^m f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^m} \neq 0$.

В этом случае $\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ обращается в нуль на R' в некоторой окрестности $V^{r'}(z_1)$, и значит, в силу условия II, содержит многообразие идеала $S \subset \bar{F}_{z_1}$ ($\bar{F}_{z_1}$ — гильбертовское замыкание F в точке z_1).

Но тогда из теоремы 6 следует, что некоторая степень $\left(\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}\right)^\rho$ содержится в S, а значит и в $\bar{F}_{z_1}$.

Вследствие гильбертовской замкнутости $\bar{F}_{z_1}$,

$$\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}} \in \bar{F}_{z_1}.$$

Дальнейшее рассуждение развертывается по пути, указанному в доказательстве леммы 5.

От цепочки $\Phi_{z_1} = \{f_1, \ldots, f_{i_1} \ldots f_k\}$ мы переходим к цепочке

$$\Phi_{z_2} = \{f_1, \ldots, \tilde{f}_{i_1}, \ldots, f_k\}, \left(\tilde{f}_i = \frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}\right),$$

причем $\left.\frac{\partial \tilde{f}_{i_1}}{\partial q_{i_1}}\right|_{z_2} \neq 0.$

Далее можно перейти в точку z_3, в которой гильбертовски разрешающая цепочка $\Phi_{z_3} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_k\}$ будет обладать тем свойством, что

$$\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}\right|_{z_3} \neq 0 \quad (i \neq i_j;\ j = 3, \ldots, s) \quad (\text{при } (s \geqslant 3).$$

После конечного числа шагов мы придем в точку $z_N \in U^{r'}(z')$, в которой система (1) будет эквивалентна гильбертовски разрешающей цепочке $\Phi_{z_N} \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$, т. е. системе

$$\psi_1(\ldots) = 0; \ \ldots . \ \psi_k(\ldots .) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

причем $\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial q_i}\right|_{z_N} \neq 0.$

Разрешив уравнения $\{\psi_i = 0\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ относительно старших производных q_i, получим пассивную систему

$$q_1 = \varphi_1\left(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_m^{k_m}} \ldots\right); \ldots . \ q_k = \varphi_k(\ldots .),$$

эквивалентную системе (1) в точке z_N. Теорема доказана.

В различных частных случаях удается еще более сузить класс дифференциальных форм, среди которых разыскивается пассивная система, эквивалентная системе вида (1).

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Я. Б. Лопатинскому за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

Фи нников С. П. — Метод внешних форм Картана, 1948.

Гюнтер Н. М. — О модулях алгебраических форм. Труды Тбилисского математического института, IX, 1941.

Ritt — Differential equations from the algebraic standpoint, 1932.

Tresse — Sur les invariants différentiels des groupes continus des transformations. Acta Mathematica, № 18, 1894.

Rückert — Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Mathematische Annalen, 107, 1933.

Александров П. С. — Введение в общую теорию множеств и функций, 1948.

Ван-дер-Варден — Современная алгебра, т.т. I и II, 1947.

Thomas — Differential systems, 1937.