Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

В. Э. ЛЯНЦЕ

ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Как известно, операции дифференцирования функции соответствует операция умножения ее преобразования Фурье на независимое переменное, Это свойство преобразования Фурье дает возможность производить хотя бы формальное сведение задачи с начальными условиями для систем уравнений в частных производных определенного типа к задаче с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако практическая реализация указанной возможности сталкивается, как правило, с весьма существенным затруднением: интегралы, изображающие преобразования Фурье данных и искомых функций, расходятся.

Поэтому методом интеграла Фурье обычно пользуются „лишь для эвристического получения предполагаемого решения, которое вслед за этим следует подвергнуть непосредственной проверке" (2).

Обоснование и распространение метода интеграла Фурье на широкие классы систем уравнений в частных производных было дано акад. Петровским [1]. Указанное выше затруднение акад. Петровский преодолел с помощью весьма остроумного разложения данных и искомых функций в ряды со слагаемыми, преобразования Фурье которых изображаются уже сходящимися интегралами.

В настоящей работе реализуется идея отличия от идеи разложения в бесконечный ряд.

Пусть функция $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируемая неограниченное число раз во всем пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, равна единице в начале координат и равна нулю вне сферы $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Тогда для любой интегрируемой в каждой конечной области функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ интеграл

$$\tilde{\tilde{F}}(\Theta_1, \ldots, \Theta_n; y_1, \ldots, y_n) = \tag{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\, F(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i \sum\limits_j (x_j - y_j)\,\Theta_j} dx_1 \ldots dx_n$$

сходится для любых значений Θ_j, y_j, причем поведение функции F на бесконечности совершенно безразлично. Если, кроме того, функция F обладает достаточно „хорошими" локальными свойствами, то верна формула обращения

$$F(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\Theta_1, \ldots, \Theta_n; y_1, \ldots, y_n)\, d\Theta_1 \ldots d\Theta_n, \qquad [б]$$

что является следствием формул обращения Фурье, свойств ядра Φ и, в частности, соотношения $\Phi(0, \ldots, 0) = 1$.

Формулы [а], [б] не сохраняют соответствия между операциями дифференцирования и умножения на независимое переменное, поэтому для их применения требуется видоизменить классическую схему метода интеграла Фурье.

Представляется, что преимуществом предлагаемого в данной работе метода являются более компактные формулы для решения задачи с начальными условиями, чем те, которые были получены в работе Петровского (1). Кроме того, вопрос о нахождении всех решений сводится к нахождению одного решения (сопряженной системы уравнений), зависящего от конечного числа параметров. Это решение мы называем фундаментальным, исходя из того, что самым существенным в любой концепции фундаментального решения является требование, чтобы при изменении параметров это последнее пробегало множество, расположенное „плотно" в множестве всех решений исходной системы уравнений.

I. КОНЦЕПЦИЯ МЕТОДА

Будем рассматривать системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_k(u) = \frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{l=0}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kl}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_l}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = f_k(t, x_1, \ldots, x) \qquad [1]$$

$$(k = 1, \ldots, N)$$

Символ $\sum\limits_{(k_s)}^{K}$ означает здесь суммирование по всем целым неотрицательным $k_1, \ldots, k_n$, сумма которых не превосходит числа K. Предполагается, что коэффициенты $A_{kl}^{(k_1, \ldots, k_n)}$ а также правые части f_k являются непрерывными функциями переменного t при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть t_0 — некоторое число из интервала $0 \leqslant t_0 < T$. Задачу с начальными условиями для системы [1] сформулируем следующим образом.

В неограниченной полосе

$$t_0 \leqslant t < T, \ |x_1| < \infty, \ldots, |x_n| < \infty$$

определить решение $u_1, \ldots, u_N$ системы [1], которое на начальной гиперплоскости $t = t_0$ принимает наперед заданные значения

$$u_k \Big|_{t = t_0} = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad [2]$$

$$(k = 1, \ldots, N)$$

С целью решения задачи [1], [2] введем в рассмотрение сопряженную систему уравнений:

$$M_k(z) = \frac{\partial z_k}{\partial(-t)} - \sum_{l=0}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{lk}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} z_l}{\partial(-x_1)^{k_1} \ldots \partial(-x_n)^{k_n}} = 0 \qquad [1^*]$$

$$(k = 1, \ldots, N)$$

В нашем методе существенную роль играет формула Грина. Для любых, достаточное число раз дифференцируемых функций $u_1, \ldots, u_N$, $z_1, \ldots, z_N$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\omega}^{\omega} \cdots \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{k=1}^{N} [z_k L_k(u) - u_k M_k(z)]\, dt\, dx_1 \ldots dx_n = Q\omega, \qquad [3]$$

где Q_ω есть интеграл от известных билинейных форм от функций u_k, z_k и их производных до порядка $K-1$ включительно, распространенных по границе цилиндра $R(\omega, t_0, t_1)$,

$$R\,(\omega, t_0, t_1) \colon\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ |x_1| < \omega, \ldots, |x_n| < \omega$$

Введем понятие фундаментального решения. Фундаментальной системой решений системы [1*] будем называть матрицу (z_{kj}), каждый столбец которой есть решение системы [1*], удовлетворяющее начальным условиям

$$z_{kj}\Big|_{t=t_1} = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$z_{jj}\Big|_{t=t_1} = \Phi(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\, e^{i \sum (x_k - y_k)\, \Theta_k} \qquad [2_j^*]$$

$$(0 \leqslant t_1 \leqslant T)$$

и существующее в полосе

$$t_1 \geqslant t > 0,\ |x_1| < \infty, \ldots, |x_n| < \infty$$

Таким образом, фундаментальная система решений зависит от $n+1$ переменных $t, x_1, \ldots, x_n$ и $2n+1$ параметров $t_1, y_1, \ldots, y_n$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$.

Допустим, что фундаментальная система решений (z_{kj}) системы [1*] существует и пусть $u_1, \ldots, u_N$ некоторое решение задачи [1], [2]. Для функций u_k и z_{kj} формула Грина [3] принимает вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\omega}^{\omega} \cdots \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{k=1}^{N} z_{kj} f_k(t, x_1, \ldots, x_n)\, dt\, dx_1, \ldots, dx_n = Q_\omega$$

Перейдем здесь к пределу при $\omega \to \infty$. Предположим, что производные функции z_{kj}, (u_k) по переменным $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $K-1$ включительно весьма быстро обращаются в нуль на бесконечности (не слишком быстро возрастают, когда $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$) так, что интегралы, входящие в состав выражения Q_ω и распространенные по боковым граням $x_j = \pm\omega$ цилиндра $R(\omega, t_0, t_1)$, в пределе равны нулю. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} z_{kj} f_k\, dt\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} z_{kj}\, u_k\, dx_1 \ldots dx_n \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} \qquad [3_j]$$

Принимая во внимание начальные условия [2], [2_j*], находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_j|_{t=t_1}\Phi(x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n)\, e^{i\sum(x_k-y_k)\Theta_k} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} z_{kj} f_k\, dt\, dx_1 \ldots dx_n +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} z_{kj}|_{t=t_0}\varphi_k\, dx_1 \ldots dx_n$$

откуда в силу формул обращения [а], [б]

$$u_j(t_1, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\left[\int_{t_0}^{t_1} z_{kj} f_k\, dt + \right. \qquad [4]$$

$$\left. + z_{kj}|_{t=t_0}\varphi_k\right] dx_1 \ldots dx_n$$

$$(j = 1, \ldots, N)$$

В дальнейшем будет доказано, что для всех систем вида [1], удовлетворяющих необходимому условию корректности постановки задачи [1], [2], фундаментальная система решений (z_{kj}) существует и что при достаточно общих предположениях относительно поведения функций f_k и φ_k [1] формулы [4] действительно представляют искомое решение.

II. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Системе уравнений в частных производных [1*] поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

---

[1] Эти предположения несколько слабее предположений, принятых в работе Петровского.

$$\frac{dw_k}{dt}+\sum_{l=1}^{N}\sum_{(k_s)}^{K}A_{lk}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t)\ (i\alpha_1)^{k_1}\ldots(i\alpha_n)^{k_n}w_l=0 \qquad [5]$$
$$(k=1,\ldots,N)$$

Пусть $w_{1j}\ldots,w_{nj},\ (j=1,\ldots,N)$

$$w_{kj}=w_{kj}\ (t,t_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

решение системы [5], удовлетворяющее начальным условиям

$$w_{kj}\Big|_{t=t_1}=\begin{cases}0 \text{ при } k\neq j\\ 1 \text{ при } k=j\end{cases} \qquad [6]$$

Необходимое условие (равномерной) корректности постановки задачи [1], [2] было найдено акад. Петровским (1). Оно может быть сформулировано следующим образом:

Для всех вещественных $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$

$$|w_{kj}|<C(1+|\alpha_m|)^p$$
$$(0\leqslant t\leqslant t_1\leqslant T;\ \text{к},\ j=1,\ldots,N), \qquad [7]$$

где $|\alpha_m|=\max(|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|)$ C — постоянная и $p\geqslant 0$ — целое число.

Всюду в дальнейшем предполагается, что для системы [1] условие [7] выполнено.

Построим фундаментальную систему решений системы [1*]. Положим

$$\tilde z(\alpha,\Theta,y)=z(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ \Theta_1,\ldots,\Theta_n;\ y_1,\ldots,y_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)\,e^{i\Sigma(x_k-y_k)\Theta_k}\,e^{i\Sigma x_k\alpha_k}\,dx_1\ldots dx_n$$

$\tilde z(\alpha,\Theta,y)$ есть преобразование Фурье функции $z_{jj}|_{t=t_1}$ (ср. [2_j*]). После замены переменных $\xi_k=x_k-y_k$ получаем

$$\tilde z(\alpha,\Theta,y)=\frac{e^{i\Sigma\alpha_k y_k}}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,e^{i\Sigma(\Theta_k+\alpha_k)\xi_k}\,d\xi_1\ldots d\xi_n \qquad [8]$$

В силу того что ядро Φ дифференцируемо неограниченное число раз во всем пространстве и обращается в нуль вне единичной сферы с центром в начале координат, функция $\tilde z(\alpha,\Theta,y)$ при $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2\to\infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени наибольшего из чисел $|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|$.

Поэтому, а также в силу условия [7] интегралы

$$z_{kj}=z_{kj}(t,t_1,x,y,\Theta)=z_{kj}(t,t_1;\ x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_n;\ \Theta_1,\ldots,\Theta_n)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}w_{kj}(t,t_1,\alpha)\,\tilde z(\alpha,\Theta,y)\,e^{-i\Sigma\alpha_k x_k}\,d_{\alpha_1}\ldots d_{\alpha_n} \qquad [9]$$
$$(k,j=1,\ldots,N)$$

сходятся и допускают дифференцирование по переменным $x_1, \ldots, x_n$ под знаком интеграла неограниченное число раз.

Из соотношений [5], [6] и [8] следует, что для каждого j, $j=1, \ldots, N$ функции $z_{1j}, \ldots, z_{Nj}$ удовлетворяют системе [1*] при $t_1 \geqslant t \geqslant 0$, $|x_1| < \infty, \ldots, |x_n| < \infty$ и начальным условиям [2_j*]. Таким образом, [9] есть интегральное представление искомой фундаментальной системы решений (z_{kj}).

Докажем следующее предложение.

ЛЕММА I. Пусть$(z_{kj}(t, t_1, x, y, \Theta))$ — фундаментальная система решений системы [1*]. Тогда транспонированная матрица $(z_{jk}(t, t_1, x, y, \Theta))$, рассматриваемая как функция переменных $t_1, y_1, \ldots, y_n$, является фундаментальной системой решений системы [1].

Доказательство этой леммы можно бы получить, исходя из формулы Грина [2]. Однако мы предпочитаем непосредственную проверку. Прежде всего из [8] находим:

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} \tilde{z}(\alpha, \Theta, y)}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} = (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} \tilde{z}(\alpha, \Theta, y)$$

Поэтому, принимая во внимание [9], имеем

$$L_k(z_j) = \frac{\partial z_{jk}}{\partial t_1} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kl}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} z_{jl}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dw_k}{dt_1} - \sum_{l=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kl}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t_1)(i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} w_{jl} \right\} \times$$

$$\times \tilde{z}(\alpha, \Theta, y) e^{-i\Sigma \alpha_k x_k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = 0$$

В самом деле, из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при любом l, $l=1, \ldots, N$ строка $w_{l1}, \ldots, w_{lN}$, рассматриваемая как функция переменного t_1, является решением системы уравнений, сопряженной с системой [5]. Следовательно, выражения в фигурных скобках тождественно исчезают.

Приступим теперь к изучению соотношений [4]. Положим

$$I_{k_1, \ldots, k_n} = I_{k_1, \ldots, k_n}(t_1, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} z_j}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} dx_1 \ldots dx_n \qquad [10]$$

$$(k_1 + \ldots + k_n \leqslant K)$$

Интеграл [10] соответствует производной одного какого-нибудь из тех слагаемых, из которых состоит сумма [4].[1]

---

[1] Рассмотрение интегралов, входящих в сумму [4] и содержащих в качестве подинтегральных выражений функции f_k производится в точности так же, как рассмотрение интегралов [10]. Действительно, встречающееся в [4] интегрирование по времени t не вызывает дополнительных затруднений, ибо оно производится в конечных пределах.

ЛЕММА 2. Пусть φ_k является функцией непрерыно дифференцируемой $H(q)$ раз по любой комбинации переменных $x_1, \ldots, x_n$, где

$$H(q) = (p+q-1)\,q + (p+K)\,(n+2),$$

причем для любого $h \leqslant H(q)$

$$\left| \frac{\partial^h \varphi_k}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right| \leqslant \| F \| \, (1+|x_m|)^q; \ (\| F \| - \text{константа}) \qquad [11]$$

Тогда в выражении [10] внутренний и внешний интеграл сходятся равномерно в каждой области пространства $y_1, \ldots, y_n$ и справедлива оценка:

$$|I_{k_1} \ldots {}_{k_n}| < A(q) \, \| F \| \, (1+|x_m|)^q, \qquad [12]$$

где $A(q)$ константа, не зависящая от φ_k. Здесь (как и всюда в дальнейшем), $|x_m|$ соответственно $|y_m|$ означает наибольшее из чисел $|x_1|, \ldots, |x_n|$ соответственно $|y_1|, \ldots, |y_n|$.

Доказательство. Достаточно показать, что в условиях леммы интеграл

$$J_{k_1}, \ldots, {}_{k_n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} \, dx_1 \ldots dx_n \qquad [13]$$

сходится равномерно в каждой конечной области и что для него выполняется неравенство

$$\left| J_{k_1} \ldots {}_{k_n} \right| < \frac{B(q) \, \| F \| \, (1+|y_m|)^q}{(1+|\Theta_m|)^{n+1}}, \qquad [14]$$

где $B(q)$ константа, не зависящая от φ_k и $|\Theta_m|$.

Принимая во внимание [8] и [9], находим

$$\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha) \, \tilde{z}(\alpha, \Theta, y) \, e^{-i \Sigma \alpha_k y_k} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

В последнем интеграле произведем замену переменных, полагая $\alpha_k - \Theta_k$ вместо α_k, $k = 1, \ldots, n$. Получим

$$\frac{\partial^k z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} =$$

$$= i^k e^{i \Sigma \Theta_k (x_k - y_k)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \ldots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta)$$

$$\tilde{z}(\alpha, 0{,}0) \, e^{-i \Sigma \alpha_k (x_k - y_k)} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

Заметим следующее: для производных функции w_{kj} по параметрам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ справедливо, легко проверяемое по индукции, неравенство

$$\left| \frac{\partial^\lambda w_{kj}}{\partial\alpha_1^{\lambda_1} \ldots \partial\alpha_n^{\lambda_n}} \right| < C_\lambda (1 + |\alpha_m|)^{p + (p + K - 1)\lambda}, \qquad [16]$$

где C_λ константа и $|\alpha_m| = \max |\alpha_k|$ (ср. (1)).

Из этого замечания и из того, что функция $z(\alpha, 0,0)$, а также ее производные любого порядка стремятся к нулю бытрее всякой отрицательной степени $|\alpha_m|$, когда $|\alpha_m| \to \infty$, следует, что интеграл [15] имеет смысл и при $|x_m| \to \infty$ стремится к нулю быстрее всякой отрицательной степени $|x_m|$.

Поэтому и в силу условия [11] интеграл [13] также сходится. В интеграле [13] произведем замену переменных, полагая x_k вместо $x_k - y_k$. Принимая во внимание [15], получим

$$J_{k_1 \ldots k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k (x + y)\, z_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)} e^{i\Sigma \Theta_k y_k} dx_1 \ldots dx_n, \qquad [17]$$

где

$$z_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \ldots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta) \times$$
$$\times \tilde{z}(\alpha, 0,0)\, e^{-i\Sigma \alpha_k x_k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \qquad [18]$$

и

$$\varphi_k (x + y) = \varphi_k (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Продифференцируем обе части равенства [18] и в правой части выполним интегрирование по частям. Найдем

$$\frac{\partial^h z_{kj}^{(k_1 \ldots k_n)}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} =$$
$$= \frac{i^{\lambda + k}}{x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^\lambda}{\partial\alpha_1^{\lambda_1} \ldots \partial\alpha_n^{\lambda_n}} \Big[(\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \ldots$$
$$\ldots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta) \Big] \times$$
$$\times (-i\alpha_1)^{h_1} \ldots (-i\alpha_n)^{h_n} \tilde{z}(\alpha, 0,0)\, e^{-i\Sigma \alpha_k x_k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

Отсюда и из оценки [16] следует, что

$$\left| \frac{\partial^h z_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right| < \frac{D_\lambda}{(1 + |x_m|)^\lambda} (1 + |\Theta_m|)^{p + K + (p + K - 1)\lambda}, \qquad [19]$$

где D_λ константа, а числа λ и h не зависят друг от друга.

С помощью интегрирования по частям преобразуем интеграл [17] следующим образом:

$$J_{k_1 \ldots k_n} =$$

$$= \frac{i^h}{\Theta_1^{h_1} \ldots \Theta_n^{h_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^h}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \left[\varphi_k (x+y) z^{(k_1 \ldots k_n)} \right] e^{i \Sigma \Theta_k x_k} dx_1 \ldots dx_n$$

Принимая во внимание [11] и [19], получим

$$\left| J_{k_1 \ldots k_n} \right| < \frac{D'_\lambda (1 + |\Theta_m|)^{p+K+(p+K-1)\lambda}}{(1+|\Theta_m|)^h} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\| F \| (1 + |x_m| + |y_m|)^q}{(1+|x_m|)^\lambda} dx_1 \ldots dx_n$$

Полагая здесь $h = H(q)$, $\lambda = q + n + 1$ и заметив, что

$$(1 + |x_m| + |y_m|)^q < 2^q (1 + |x_m|)^q (1 + |y_m|)^q,$$

находим

$$|J_{k_1 \ldots k_n}| < \frac{2^q D'_{q+n+1}}{(1+|\Theta_m|)^{n+1}} \| F \| (1 + |y_m|)^q \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{(1+|x_m|)^{n+1}}.$$

Этим самым лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть для системы [1] выполняется условие [7]. Тогда фундаментальная система решений (z_{kj}) системы [1*] существует, причем производные любого порядка функций z_{kj} при $|x_m| \to \infty$ убывают быстрее любой отрицательной степени $|x_m|$. Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$, $f_1, \ldots, f_N$ непрерывно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$ $H(q)$ раз, $H(q) = (p + K - 1) q + (p + K)(n + 2)$, ($q$ — целое число $\geqslant 0$), причем для любого $h \leqslant H(q)$

$$\left| \frac{\partial^h \varphi_k}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right|, \left| \frac{\partial^h f_k}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_n^{h_n}} \right| \leqslant \| F \| (1 + |x_m|)^q,$$

где $\| F \|$ константа, то существует одно и только одно такое решение $u_1, \ldots, u_N$ задачи [1], [2], что производные каждой из функций $u_1, \ldots, u_N$ до порядка $K - 1$ включительно возрастают не быстрее некоторой конечной степени $|x_m|$.

Функции $u_1, \ldots, u_N$ можно вычислить по формулам [4] и для них справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant A_q \| F \| (1 + |x_m|)^q; \qquad [20]$$

1 Заметим, что из неравенства [20] следует достаточность условия Петровского [7] для равномерной корректности постановки задачи [1], [2], если эту корректность измерять посредством метрики с весом $(1+|x_m|)^q$. Результат Петровского соответствует случаю $q = 0$.

при этом A_q означает константу, не зависящую от φ_k, f_k и начального момента t_0.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что интегралы [4] сходятся равномерно в каждой конечной области, что для них операция L_k выполнима под знаком внутреннего интеграла и что для функций u_k, определяемых соотношениями [4], справедливо неравенство [20].

Покажем, что $L_k(u) = f_k$ при $k = 1, \ldots, N$. Имеем

$$L_k(u) = \frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} u_j}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{N} \Bigg\{ \Bigg[\frac{\partial z_{lk}}{\partial t_1} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} z_{lj}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} \Bigg] \Bigg|_{t=t_1} \varphi_l +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial z_{lk}}{\partial t_1} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kj}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} z_{lj}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} \right] f_l +$$

$$+ z_{lk} \Bigg|_{t=t_1} f_l \Bigg|_{t=t_1} \Bigg\} dx_1 \ldots dx_n$$

В силу леммы 1 выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю. Поэтому, принимая во внимание начальные условия [2_j^*] и формулы обращения [а], [б], находим

$$L_k(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y) f_k(t_1, x) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= f_k(t_1, x).$$

Из соотношений [2_j^*], [а], [б] следует также, что функции u^k удовлетворяют условиям [2].

Тот факт, что функции z_{kj} и их производные любого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ убывают быстрее любой наперед заданной отрицательной степени $|x_m|$ усматривается непосредственно из интегрального представления фундаментальной системы решений [9] оценки [16] и элементарных теорем о порядке убывания трансформации Фурье. Из этого факта и оценки [20] следует законность рассуждений, которые привели нас к соотношениям [4], что доказывает единственность решения задачи [1], [2] в вышеуказанном смысле.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. — Бюллетень МГУ, Серия А, вып. 7. 1938.
2. Курант-Гильберт. — Методы математической физики, т. 2.