Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

Б. Н. ГАРТШТЕЙН

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КРАЙНЕГО РАНГА

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ результаты n независимых наблюдений над случайной величиной ξ. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения величины ξ.

Расположив результаты наблюдений в порядке возрастания их величин, мы получим последовательность

$$x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant x_{i_n},$$

где каждый индекс i_j принимает одно из значений $1, 2, \ldots, n$.

Введем новое обозначение, положив $\xi_k^{(n)} = x_{i_k}$. Рангом порядка (r, k) результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots x_n$ мы назовем случайную величину $\rho_{rk}^{(n)} = \xi_k^{(n)} - \xi_r^{(n)}$ $(r < k)$.

За последние годы в печати появился ряд работ, посвященных изучению предельного распределения ранга порядка $(1, n)$, т. е. разности между максимальным и минимальным членами вариационного ряда, при $n \to \infty$. В большинстве этих работ изучалось предельное распределение ранга при частных предположениях о начальной функции $F(x)$. Так, Гумбель [см., например, 5] в ряде работ предполагает, что $F(x)$ нормальный закон распределения. Эльфвинг [6] считает $F(x)$ функцией экспоненциального типа с плотностью $f(x) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{p}|x|^p\right\}$, где $1 < p \leqslant 2$ и т. д.

Настоящая работа ставит своей целью изучение классов возможных предельных распределений для крайнего ранга, т. е. для ранга порядка (r, k), если при $n \to \infty$ числа r и $n-k$ сохраняют постоянные значения (в дальнейшем это предположение мы оговаривать уже не станем). Для частного случая $(r=1,\ k=n)$ задача была решена нами ранее, и полученные результаты были опубликованы без доказательства [4].

За постановку задачи и указания, данные мне при ее решении, выражаю глубокую благодарность моему руководителю профессору Б. В. Гнеденко.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим $\Phi_{rk}^{(n)}(z) = P\{\rho_{rk}^{(n)} < z\}$ и найдем выражение для этой функции распределения, предполагая функцию распределения $F(x)$

данной. Если обозначить через $F(M)$ вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi_k^{(n)}, \xi_r^{(n)})$ на множество M, то, как известно,

$$\Phi_{rk}^{(n)}(z) = \iint\limits_{x-y<z} F(dM)$$

В частности, за элемент площади dM может быть принят прямоугольник с центром в точке x,y и сторонами длины dx и dy. Тогда $F(dM) = P\{|x - \xi_k^{(n)}| < dx,\ |y - \xi_r^{(n)}| < dy\}$. Так как dx и dy — бесконечно малые величины, то $F(dM)$ совпадает с вероятностью события, состоящего в том, что из n испытаний $r-1$ испытание попадает левее точки y, а $k-r-1$ попадает между точками y и x, в то время как r-ое испытание попадает в произвольно малую окрестность точки y и k-ое — в произвольно малую окрестность точки x.

Таким образом,

$$F(dM) = \frac{n!}{(r-1)!\,(k-r-1)!\,(n-k)!} F^{r-1}(y)[F(x)-F(y)]^{k-r-1}[1-F(x)]^{n-k}\,dF(x)\,dF(y)$$

для $x > y$ и $F(dM) = 0$ для $x \leqslant y$.

Следовательно,

$$\Phi_{rk}^{(n)}(z) = \iint\limits_{0<x-y<z} \frac{n!}{(r-1)!\,(k-r-1)!\,(n-k)!} F^{r-1}(y)[F(x)-F(y)]^{k-z-1} \cdot [1 - F(x)]^{n-k}\,dF(x)\,dF(y) = \tag{1}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=k}^{n} \frac{n!}{(r-1)!\,(l-r)!\,(n-l)!} F^{r-1}(y)[F(y+z) - F(y)]^{l-r}[1 - F(y+z)]^{n-l}\,dF(y)$$

Теперь мы можем дать точную формулировку стоящей перед нами задачи.

Пусть при некотором подборе действительных чисел $a_n > 0$ и b_n функции $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \to \infty$ сходятся к некоторой собственной[1] функции распределения $\Phi(z)$. Требуется найти класс возможных предельных функций $\Phi(z)$. Функции, входящие в класс возможных предельных распределений, естественно будут определены с точностью до типа[2], так как, если при $n \to \infty$ $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi(z)$, то $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Phi(az + b)$, где $a = \lim \frac{\alpha_n}{a_n}$, $b = \lim \frac{\beta_n - b_n}{a_n}$, и, следовательно, вместе с функцией $\Phi(z)$ в класс предельных распределений ранга войдут все функции вида $\Phi(az + b)$.

[1] Несобственной называется функция распределения $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant a) \\ 1 & (x > a) \end{cases}$, где a—произвольная постоянная. Функция распределения, не являющаяся несобственной, называется собственной.

[2] Функция $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат к одному типу, если найдутся такие действительные $\alpha > 0$ и β, что $F_1(\alpha z + \beta) = F_2(z)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Наряду с функцией $\Phi_k^{(n)}(z) = P\{\xi_k^{(n)} < z\}$ рассмотрим функцию $\overline{\Phi}_r^{(n)}(z) = P\{-\xi_r^{(n)} < z\}$. Заметим, что $-\xi_r^{(n)}$ является $(n-r+1)$-ым членом вариационного ряда случайной величины $\overline{\xi}$ с функцией распределения $1-F(-x)$.

В работе Н. В. Смирнова [2] найдено выражение для функции $\Phi_k^{(n)}(z)$: при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(n)} z &= \sum_{m=k}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} F^m(z)[1-F(z)]^{n-m} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int\limits_0^{F(z)} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx \end{aligned} \tag{2}$$

В силу только что сделанного замечания

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(z) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \int\limits_0^{1-F(-z)} x^{n-r}(1-x)^{r-1}\,dx = 1 - \Phi_r^{(n)}(-z) \tag{3}$$

В работе Б. В. Гнеденко [1] был определен класс возможных предельных распределений максимального члена вариационного ряда т. е., согласно нашим обозначениям, был найден класс функций, которые могут оказаться предельными для функций распределения $\Phi_n^n(a_n z + b_n)$ при надлежащим образом подобранных постоянных $a_n > 0$ и b_n.

Оказалось, что предельными в таком смысле могут быть лишь функции следующих типов:

$$1)\quad \Phi_\alpha(z) = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0 \\ e^{-z^{-\alpha}} & z > 0 \end{cases}$$

$$2)\quad \Psi_\alpha(z) = \begin{cases} e^{-(-z)^\alpha} & z \leqslant 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

$$3)\quad \lambda(z) = e^{-e^{-z}} \quad -\infty < z < \infty$$

где α — положительная постоянная.

Н. В. Смирнов [2] обобщил эти результаты, получив класс возможных предельных (в том же смысле) распределений для k-ого члена вариационного ряда, если число $n-k$ сохраняет постоянное значение при $n \to \infty$.

Оказалось, что этот класс состоит из функций следующих типов:

$$1)\quad \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(n-k)!} \displaystyle\int_{z^{-\alpha}}^{\infty} e^{-x} x^{n-k}\,dx & z > 0 \end{cases}$$

$$2) \qquad \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-k)!}\displaystyle\int_{(-z)^\alpha}^{\infty} e^{-x} x^{n-k}\,dx & z \leqslant 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

$$3) \qquad \lambda^{(n-k+1)}(z) = \frac{1}{(n-k)!}\int_{e^{-z}}^{\infty} e^{-x} x^{n-k}\,dx \qquad -\infty < z < \infty$$

Эти законы Смирнов назвал обобщенными законами Гнеденко.

Очевидно, что класс предельных распределений $(-r)$-ого члена вариационного ряда совпадает с классом предельных распределений $(n-r+1)$-ого члена вариационного ряда и, в частности, класс предельных распределений минус-минимального члена состоит из законов Гнеденко.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функция распределения $F(x)$ такова, что предельные распределения k-ого и $(-r)$-ого членов вариационного ряда существуют, то класс предельных распределений для ранга порядка (r, k) состоит из функций распределения следующих типов:

$$1)\ \Phi_\alpha^{(r)}(z); \qquad 2)\ \Psi_\alpha^{(r)}(z); \qquad 3)\ \lambda^{(r)}(z);$$

$$4)\ \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad 5)\ \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad 6)\ \lambda^{(n-k+1)}(z);$$

$$7)\ \Phi_\alpha^{(r)}(z) * \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(az); \quad 8)\ \Psi_\alpha^{(r)}(z) * \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(az); \quad 9)\ \lambda^{(r)}(z) * \lambda^{(n-k+1)}(az).$$

Здесь α и a — положительные постоянные; функции

$$\Phi_\alpha^{(l)}(z), \qquad \Psi_\alpha^{(l)}(z), \qquad \lambda^{(l)}(z),$$

где $l = r$ или $l = n-k+1$ определены, как у Смирнова; знак * указывает на операцию компонирования:

$$F_1(z) * F_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-x)\,dF_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(z-x)\,dF_1(x).$$

Для доказательства теоремы мы используем тот факт, что в случае существования предельных распределений k-ого и $(-r)$-ого членов вариационного ряда функции распределения ранга порядка (r, k) сходятся при некоторой нормировке $a_n >$ и b_n к собственной функции распределения тогда и только тогда, когда при той же нормировке композиции функции распределения k-ого и $(-r)$-ого членов сходятся к той же функции распределения.

Лемма 1 следующего параграфа обобщает это предложение, так как в случае существования предельного распределения минус-минимального (а одновременно и $(-r)$-ого) члена вариационного ряда условия леммы выполняются.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Положим

$$\Psi_{rk}^{(n)}(z) = \Phi_k^{(n)}(z) * \overline{\Phi}_r^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k^{(n)}(z-x)\, d\overline{\Phi}_r^{(n)}(x) \tag{4}$$

Имеет место следующая лемма:

ЛЕММА 1. Если для данных $a_n > 0$ и b_n' существует $z_0 < \infty$[1] такое, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} [1 - F(-a_n z - b_n')]^n = 0 \qquad (z \leqslant z_0)$

б) $\liminf\limits_{n\to\infty} [1 - F(-a_n z - b_n')]^n > 0 \quad (z > z_0)$,

то при любом подборе величин b_n

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) - \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n)| = 0$$

Доказательство. В силу формулы (1)

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=k}^{n} \frac{n!}{(r-1)!\,(l-r)!\,(n-l)!} F^{r-1}\ [a_n(z+x) + b_n''][F(a_n(z+x) + b_n'') -$$

$$- F(a_n x - b_n']^{l-r}[1 - F(a_n x - b_n')]^{n-l} dF(a_n x - b_n') = \tag{5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^{n} \frac{(n-r)!}{(l-r)!\,(n-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{l-r} \right.$$

$$\left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l} \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!} F^{r-1}(a_n x - b_n')[1 - F(a_n x - b_n')]^{n-r} dF(a_n x - b_n')$$

(Здесь $b_n'' = b_n - b_n'$).

Из формул (2), (3) и (4) следует, что

$$\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^{n} \frac{n!}{l!\,(n-l)!} F^l(a_n(z-x) + b_n'') \right.$$

$$[1 - F(a_n(z-x) + b_n'')]^{n-l} \cdot \tag{6}$$

$$\cdot \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} F^{r-1}(-a_n x - b_n')[1 - F(-a_n x - b_n')]^{n-r} dF(-a_n x - b_n') =$$

---

[1] Мы не исключаем тот случай, когда $z_0 = -\infty$.

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=k}^{n}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}F^{l}(a_n(z+x)+b''_n)\,[1-F(a_n(z+x)+b''_n]^{n-l}\,\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}F^{r-1}(a_nx-b'_n)\,[1-F(a_nx-b'_n)]^{n-r}\,dF(a_nx-b'_n).$$

Интеграл, стоящий в формуле (5), представим в виде суммы интегралов:

$$I_1+I_2=\int\limits_{-\infty}^{-z_0}+\int\limits_{-z_0}^{\infty}$$

Точно так же на сумму двух интегралов разобьем последний интеграл формулы (6):

$$\overline{I_1}+\overline{I_2}=\int\limits_{-\infty}^{-z_0}+\int\limits_{-z_0}^{\infty}$$

(z_0 здесь определено условием леммы).

Так как

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_nz+b_n)-\Psi_{rk}^{(n)}(a_nz+b_n)|=|I_1+I_2-\overline{I_1}-\overline{I_2}|\leqslant|I_1-\overline{I_1}|+|I_2-\overline{I_2}|,$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$|I_1-\overline{I_1}|\to 0$ и $|I_2-\overline{I_2}|\to 0$ при $n\to\infty$.

В силу условия а) леммы при $n\to\infty$

$$\overline{I_2}=\int\limits_{-z_0}^{\infty}\left\{\sum_{l=k}^{n}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}F^{l}(a_n(z+x)+b''_n)\,[1-F(a_n(z+x)+b''_n)]^{n-l}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}F^{r-1}(a_nx-b'_n)\,[1-F(a_nx-b'_n)^{n-r}\,dF(a_nx-b'_n)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=n-r+1}^{n}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}[1-F(-a_nz_0-b'_n)]^{l}\,\cdot$$

$$\cdot\,F^{n-l}(-a_nz_0-b'_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Для оценки I_2 заметим, что при любом x функция

$$\Phi_{rk}^{(n)}(x,\,z)=\sum_{l=k-r}^{n-r}\frac{(n-r)!}{l!\,(n-r-l)!}\left[\frac{F(x+z)-F(x)}{1-F(x)}\right]^{l}\left[\frac{1-F(x+z)}{1-F(x)}\right]^{n-l-r}$$

представляет собой вероятность того, что из $n-r$ испытаний не менее $k-r$ испытаний попадет левее точки $z+x$ и не более $n-k$ правее точки $z+x$ при условии, что все испытания попадут правее точки x. Поэтому при любых x и при $z>0$

$$0 \leqslant \Phi_{rk}^{(n)}(x, z) \leqslant 1$$

В силу условия а) леммы

$$I_2 = \int_{-z_0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^{n} \frac{(n-r)!}{(l-r)!\,(n-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x)+b_n'') - (Fa_n x - b_n')}{1-F(a_n x - b_n')} \right]^{l-r} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{1-F(a_n(z+x)+b_n'')}{1-F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l} \right\} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} F^{r-1}(a_n x - b_n')$$

$$[1-F(a_n x - b_n')]^{n-r}\, dF(a_n x - b_n') =$$

$$= \int_{-z_0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!\,(n-r-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x)+b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1-F(a_n x - b_n')} \right]^{l} \right.$$

$$\left. \left[\frac{1-F(a_n(z+x)+b_n'')}{1-F(-a_n x - b_n')} \right]^{n-l-r} \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} F^{r-1}(a_n x - b_n')\,[1-F(a_n x - b_n')]^{n-r}\, dF(a_n x - b_n') \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=n-r+1}^{n} \frac{n!}{l!\,(n-l)!} F^{n-l}(-a_n z_0 - b_n') \cdot [1-F(-a_n z_0 - b_n')]^{l} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Таким образом, при $n \to \infty$ $I_2 \to 0$ и $\overline{I}_2 \to 0$, поэтому и $|I_2 - \overline{I}_2| \to 0$.

Перейдем к оценке $|I_1 - \overline{I}_1|$. Так как интегралы берутся в смысле Лебега-Стильтьеса и в интегралах I_1 и $\overline{I_1}$ интегрирующая функция одна и та же, то чтобы доказать, что $|I_1 - \overline{I}_1| \to 0$, достаточно показать, что разность интегрируемых функций стремится к нулю для всех x, $-\infty < x < -z_0$.

Для доказательства этого предложения воспользуемся леммой 1 второй части работы Смирнова [2]. Эта лемма утверждает, что для функции распределения $\Phi_k^{(n)}(z)$ при любом z и постоянном k имеют место неравенства:

$$\frac{1-\sigma_n}{(k-1)!} \int_0^{nF(z)} e^{-x} x^{k-1}\, dx \leqslant \Phi_k^{(n)}(z) \leqslant \frac{1+\rho_n}{(k-1)!} \int_0^{nF(z)} e^{-x} x^{k-1}\, dx,$$

где ρ_n и σ_n положительны, не зависят от z и стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Очевидно, что для случая, когда число $n-k$ сохраняет постоянное значение, имеют место аналогичные неравенства:

$$\frac{1-\sigma_n}{(n-k)!}\int\limits_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx \leqslant \Phi_k^{(n)}(z) \leqslant \frac{1-\rho_n}{(n-k)!}\int\limits_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx,$$

т. е.

$$\left|\Phi_k^{(n)}(z)-\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Таким образом

$$\left|\Phi_k^{(n)}(a_n(z+x)+b''_n)-\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{n\left[1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\right]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

Точно так же

$$\left|\sum_{l=k-r}^{n-r}\frac{(n-r)!}{l!\,(n-r-l)!}\left[\frac{F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)-F\left(a_nx-b'_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^l \left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^{n-l-r}- \right.$$

$$\left. -\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{(n-r)\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{8}$$

Оценим далее разность

$$\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{(n-r)\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx - \frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{n\left[1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\right]}^{\infty} e^{-x}x^{n-k}dx \quad (x<z_0) \tag{9}$$

В силу условия б) леммы для значений $x<-z_0$ должно быть $\liminf\limits_{n\to\infty}\left[1-F\left(a_nx-b'_n\right)\right]^n>0$, откуда следует, что

$$F\left(a_nx-b'_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому, если подпоследовательность $n_i[1-F(a_{n_i}(z+x)+b''_{n_i})]$ сходится к некоторому (конечному, бесконечному или нулевому) пределу, то и подпоследовательность $(n_i-r)\left[\frac{1-F\left(a_{n_i}(z+x)+b''_{n_i}\right)}{1-F\left(a_{n_i}x-b'_{n_i}\right)}\right]$

сходится к тому же пределу и, следовательно, разности (9) по такой подпоследовательности стремятся к нулю. Так как из любой подпоследовательности $n_k\left[1-F\left(a_{n_k}(z+x)+b''_{n_k}\right)\right]$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то ни по одной подпоследовательности индексов n_k разности (9) не могут сходитъся ни в одной точке $z+x$ к числу, отличному от нуля. Отсюда следует, что при $n\to\infty$ разности (9) сходятся к нулю.

Ввиду того, что

$$\Bigg|\sum_{l=k}^{n}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}F^l\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\left[1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\right]^{n-l}-$$

$$-\sum_{l=k-r}^{n-r}\frac{(n-r)!}{l!\,(n-r-l)!}\left[\frac{F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)-F\left(a_nx-b'_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^l$$

$$\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^{n-l-r}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\Bigg|\sum_{l=k}^{n}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}F^l\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\left[1-F\left(a_n(z+x)+b'_n\right)\right]^{n-l}-$$

$$-\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{n\left[1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\right]}^{\infty}e^{-x}x^{n-k}\,dx\Bigg|+$$

$$+\Bigg|\sum_{l=k-r}^{n-r}\frac{(n-r)!}{l!\,(n-l-r)!}\left[\frac{F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)-F\left(a_nx-b'_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^l$$

$$\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]^{n-l-r}-$$

$$-\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{(n-r)\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]}^{\infty}e^{-x}x^{n-k}\,dx\Bigg|+\Bigg|\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{(n-r)\left[\frac{1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)}{1-F\left(a_nx-b'_n\right)}\right]}^{\infty}e^{-x}x^{n-k}\,dx-$$

$$-\frac{1}{(n-k)!}\int\limits_{n\left[1-F\left(a_n(z+x)+b''_n\right)\right]}^{\infty}e^{-x}x^{n-k}\,dx\Bigg|,$$

— из формул (7), (8) и (9) следует, что разности интегрируемых функций в интегралах I_1 и $\overline{I}_1$ стремятся к нулю при $n\to\infty$, что и завершает доказательство леммы 1.

Для доказательства теоремы нам потребуется еще оценка порядка роста нормирующих коэффициентов a_n. Этой цели служат леммы 2, 3, 4.

ЛЕММА 2. Если при $n \to \infty$ число $n-k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \to \infty \text{ и } a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} \to 0.$$

Доказательство. Для того, чтобы $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \to \infty$ и надлежащим образом подобранных постоянных $a_n > 0$ и b_n сходились к $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^\alpha \text{ для всех } k > 0 \tag{10}$$

Это условие было найдено Б. В. Гнеденко [1] для случая $k = n$. Н. В. Смирнов [2] показал, что и для того случая, когда $k \neq n$ но при $n \to \infty$, $n-k$ остается постоянным, условие (10) также является необходимым и достаточным.

Далее, в цитированной уже работе Гнеденко показано, что если a_n выбраны как наименьшие x, удовлетворяющие неравенствам

$$1 - F\Big(x(1+0)\Big) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 - F\Big(x(1-0)\Big), \tag{11}$$

то

$$n\Big(1 - F(a_n z)\Big) \to z^{-\alpha} \text{ для всех } z > 0, \tag{12}$$

причем сходимость эта равномерна на интервале $(0, \infty)$.

Допустим, что утверждение нашей леммы неверно, т. е. что $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ не стремится к ∞ или $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}$ не стремится к 0. Мы покажем, что первое из этих предположений приводит нас к противоречию. Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

Если $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ не стремится к ∞, то либо

а) $\limsup a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} = A < \infty$, либо

б) $\limsup a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} = \infty$, но $\liminf a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} < \infty$.

Если $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходятся при $n \to \infty$ к некоторой собственной функции распределения, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (это следует из леммы 3 цитированной ранее работы Гнеденко) и, следовательно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{(n+1)^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}{n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}} \to 1$$

Отсюда следует, что множество предельных точек последовательности $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ всюду плотно на некотором интервале, если только последовательность $a \cdot n^{-\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon}$ не сходится.

Таким образом, в случае б) существует конечная и отличная от нуля предельная точка A последовательности $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$.

Выберем подпоследовательности $\overline{n}_i$ и $\overline{\overline{n}}_i$ таким образом, чтобы отношение $\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}$ осталось ограниченным для всех i и чтобы

$$\begin{gathered} a_{\overline{n}_i} \cdot \overline{n}_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \to A \\ a_{\overline{\overline{n}}_i} \cdot \overline{\overline{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \to \infty \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда, с одной стороны, в силу (12) и (13)

$$\lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(\overline{\overline{n}}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(a_{\overline{\overline{n}}_i} \cdot \frac{\overline{\overline{n}}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{\overline{n}}_i}} x\right)\right] =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \left(x \cdot \frac{\overline{\overline{n}}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{\overline{n}}_i}}\right)^{-\alpha} = \infty$$

С другой стороны,

$$\lim_{i\to\infty} \overline{n}_i \left[1 - F\left(\overline{n}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim_{i\to\infty} \overline{n}_i \left[1 - F\left(a_{\overline{n}_i} \cdot \frac{\overline{n}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{n}_i}} x\right)\right] = \left(\frac{A}{x}\right)^{\alpha},$$

$$\lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(\overline{\overline{n}}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim_{i\to\infty} \overline{n}_i \left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)\left[1 - F\left(\overline{n}_i^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} \cdot x\right)\right] =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)\left[\frac{x}{A}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}\right]^{-\alpha} = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{x}{A}\right)^{-\alpha}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{\alpha\varepsilon} < \infty .$$

Таким образом, случай б) не может иметь места. Если имеет место случай а), то мы всегда можем выбрать последовательность индексов n_i таким образом, чтобы для всех целых $k > 1$ и для достаточно больших n_i имело место неравенство

$$a_{n_i k} \leqslant \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}, \tag{14}$$

где β — некоторая положительная постоянная, не зависящая от k.

В самом деле, если $A = 0$, то мы можем выбрать подпоследовательность $a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ так, чтобы для всех $n > n_i$ было $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} < a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$. Полагая $n = n_i k$ и $\beta = 1$, получим неравенство (14).

Если же $A > 0$, то в качестве подпоследовательнвсти $a_{n_i} n_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ возьмем любую подпоследовательность, сходящуюся к A.

Тогда для произвольно малого положительного δ и достаточно больших n_i будут выполняться неравенства $a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} > A - \delta$ и при любом целом $k > 1$ $a_{n_ik} \cdot (n_i k)^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} < A + \delta$.

Отсюда мы получим неравенство (14) $\left(\beta = \frac{A+\delta}{A-\delta}\right)$.

Из соотношения (10) и неравенства (14) мы имеем:

$$\frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F(a_{n_ik})} < \frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F\left(a_{n_ik} \cdot \beta \cdot k^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}\right)} \to \beta^{\alpha} \cdot k^{1-\alpha\varepsilon} \tag{15}$$

С другой стороны, из неравенства (11) следует, что

$$\frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F(a_{n_ik})} \xrightarrow[i \to \infty]{} k \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) противоречат друг другу для больших k (например, для $k > \beta^{\frac{1}{\varepsilon}}$). Таким образом, осуществление случая а) также оказывается невозможным, что и доказывает, что в предположениях нашей леммы $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \to \infty$.

ЛЕММА 3. Если при $n \to \infty$ число $n - k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$ $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \to \infty$ и $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} \to 0$.

Доказательство. Чтобы при $n \to \infty$ последовательность $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходилась к $\Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$ при некоторых, надлежащим образом подобранных, постоянных $a_n \to 0$ и b_n, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Существует такое x_0, что $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ и $F(x_0) = 1$.

2) Для всякого $k > 0$.

$$\lim_{x \to -0} \frac{1 - F(x_0 + kx)}{1 - F(x_0 + x)} = k^{\alpha} \quad \text{(см. в литер 1 и 2).}$$

При этом, как показано в цитированной уже работе Б. В. Гнеденко, a_n могут быть выбраны как наименьшие x, удовлетворяющие неравенству:

$$1 - F\left(-x(1-0) + x_0\right) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 - F\left(-x(1+0) + x_0\right). \tag{18}$$

Для таким образом выбранных a_n

$$n\left[1 - F(a_n x + x_0)\right] \to (-x)^{\alpha} \tag{19}$$

равномерно относительно x на интервале $(-\infty, 0)$.

Допустим, что утверждение первой части нашей леммы неверно, т. е. что при $n \to \infty$ $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$ не стремится к бесконечности.

В этом случае, либо а) $\limsup a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} = \infty$, но $\liminf a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} < \infty$, либо б) $\limsup a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} = A < \infty$. Проводя в точности те же рассуждения, какие были сделаны при доказательстве леммы 2, мы заключаем, что в случае а) должна существовать некоторая конечная и отличная от нуля предельная точка A последовательности $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$. Выберем подпоследовательности индексов $\overline{n}_i$ и $\overline{\overline{n}}_i$ таким образом, чтобы отношение $\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}$ оставалось ограниченным для всех i и чтобы

$$\begin{gathered}\overline{n}_i^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \cdot a_{\overline{n}_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty \\ \overline{\overline{n}}_i^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon} \cdot a_{\overline{\overline{n}}_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \mathrm{A}\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда, с одной стороны, в силу (19) и (20)

$$\lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(\overline{\overline{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(a_{\overline{\overline{n}}_i} \cdot \frac{\overline{\overline{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{\overline{n}}_i}} x\right)\right] =$$

$$= \lim \left(-\frac{\overline{\overline{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{\overline{n}}_i}} x\right)^{\alpha} = 0$$

для всех x интервала $(-\infty, 0)$.

С другой стороны,

$$\lim_{i\to\infty} \overline{n}_i \left[1 - F\left(\overline{n}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim_{i\to\infty} \overline{n}_i \left[1 - F\left(a_{\overline{n}_i} \cdot \frac{\overline{n}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}{a_{\overline{n}_i}} x\right)\right] = \left(-\frac{x}{A}\right)^{\alpha}$$

и $$\lim_{i\to\infty} \overline{\overline{n}}_i \left[1 - F\left(\overline{\overline{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] = \lim \overline{n}_i \left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right) \left[1 - F\left(\overline{n}_i^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} \left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} x\right)\right] =$$

$$= \lim \frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i} \left[-\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{-\frac{1}{\alpha}-\varepsilon} \cdot \frac{x}{A}\right]^{\alpha} = \lim \left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{-\alpha\varepsilon} \left(-\frac{x}{A}\right)^{\alpha} > 0$$

для, $x < 0$ в силу выбора подпоследовательностей $\overline{n}_i$ и $\overline{\overline{n}}_i$. Полученное противоречие доказывает невозможность осуществления случая а).

Если имеет место случай б), то, как и при доказательстве леммы 2, мы выбираем подпоследовательность индексов n_i таким образом, чтобы для всех целых $k > 1$ и достаточно больших n_i имели место неравенства.

$$a_{n_i k} \leqslant \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}, \tag{21}$$

где β — некоторая положительная, независящая от k постоянная. Из соотношения (17,2) и неравенства (21) мы получаем:

$$\frac{1 - F(x_0 - a_{n_i k})}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \leqslant \frac{1 - F\left(x_0 - \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}\right)}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \longrightarrow \beta^{\alpha} k^{-1 - \alpha\varepsilon} \tag{22}$$

С другой стороны, из неравенства (18) следует, что

$$\frac{1 - F(x_0 - a_{n_i k})}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} k^{-1} \tag{23}$$

Однако соотношения (22) и (23) противоречат друг другу для достаточно больших k (например, для $k > \beta^{\frac{1}{\varepsilon}}$). Таким образом, осуществление случая б) также оказывается невозможным, что и завершает доказательство первой части леммы. Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

ЛЕММА 4. Если при $n \to \infty$ число $n - k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \lambda^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$a_n \cdot n^{\varepsilon} \to \infty \text{ и } a_n \cdot n^{-\varepsilon} \to 0$$

Доказательство. Для того, чтобы при $n \to \infty$ последовательность функций распределения $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходилась к $\lambda^{(n-k+1)} z$ при некоторых постоянных $a_n > 0$ и b_n, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $A(z)$ такая, что $A(z) \to 0$ для $z \to z_0 - 0$ и что для всех значений x

$$\lim_{z \to z_0 - 0} \frac{1 - F(z(1 + A(z)\, x)}{1 - F(z)} = e^{-x},$$

[см. в литер. 1],

где число $z_0 \leqslant \infty$ определяется соотношениями $F(z_0) = 1$ и $F(z) < 1$ для $z < z_0$. При этом b_n могут быть выбраны как наименьшие x, удовлетворяющие неравенствам

$$F(x - 0) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant F(x + 0) \tag{24}$$

и для $z = b_n$ $A(z) = \frac{a_n}{b_n}$, т. е.

$$\lim_{b_n \to z_0 - 0} \frac{1 - F(b_n + a_n x)}{1 - F(b_n)} \to e^{-x} \tag{25}$$

Допустим, что утверждение первой части нашей леммы неверно, т. е., что при $n \to \infty$ последовательность $a_n \cdot n^{\varepsilon}$ не стремится к бесконечности.

Тогда либо а) $\lim\sup\ a_n \cdot n^\varepsilon = \infty$, но $\lim\inf a_n \cdot n^\varepsilon < \infty$, либо б) $\lim\sup a_n \cdot n^\varepsilon < \infty$.

В случае а) мы можем, как и при доказательстве лемм 2 и 3, утверждать, что множество предельных точек последовательности $a_n \cdot n^\varepsilon$ всюду плотно на интервале между значениями $\lim\sup a_n \cdot n^\varepsilon$ и $\lim\inf\ a_n \cdot n^\varepsilon$.

Следовательно, мы можем выбрать две конечные и отличные от нуля предельные точки A_1 и A_2 последовательности $a_n \cdot n^\varepsilon$. Пусть $A_1 < A_2$. Выберем две подпоследовательности индексов $\overline{n}_i$ и $\overline{\overline{n}}_i$ таким образом, чтобы при $i \to \infty$ выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{\overline{n}_i} \cdot \overline{n}_i^\varepsilon \to A_1 \\ a_{\overline{\overline{n}}_i} \cdot \overline{\overline{n}}_i^\varepsilon \to A_2 \end{cases} \tag{26}$$

$$\frac{\overline{n}_i}{\overline{\overline{n}}_i} \to 0 \tag{27}$$

Из (26) следует, что при $i \to \infty$

$$\frac{a_{\overline{n}_i}}{a_{\overline{\overline{n}}_i}} = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^\varepsilon + 0\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^\varepsilon \tag{28}$$

Далее из соотношений (24) и (25) мы заключаем, что

$$\frac{1-F\left(b_{\overline{n}_i} - a_{\overline{n}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i} + a_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} = \frac{1-F\left(b_{\overline{n}_i} - a_{\overline{n}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{n}_i}\right)} \cdot \frac{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i} + a_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} \cdot \frac{1-F\left(b_{\overline{n}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} =$$

$$= e^2 \cdot \frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i} + 0\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right). \tag{29}$$

С другой стороны, из формулы (28) получаем, учитывая, что $\overline{\overline{n}}_i > \overline{n}_i$ и, следовательно, $b_{\overline{\overline{n}}_i} > b_{\overline{n}_i}$

$$\frac{1-F\left(b_{\overline{n}_i} - a_{\overline{n}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i} + a_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} > \frac{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i} - a_{\overline{n}_i}\right)}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i} + a_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} =$$

$$= \frac{1-F\left[b_{\overline{\overline{n}}_i} - a_{\overline{\overline{n}}_i}\left\{\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^\varepsilon + 0\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^\varepsilon\right\}\right]}{1-F\left(b_{\overline{\overline{n}}_i}\right)} = \tag{30}$$

$$= e^{\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^\varepsilon} + 0(1)$$

Из соотношений (29) и (30) следует, что для достаточно больших i должно иметь место неравенство:

$$\exp\left\{\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)^{\varepsilon}\right\} < e^2 \cdot \left(\frac{\overline{\overline{n}}_i}{\overline{n}_i}\right)$$

Однако при $i \to \infty$ левая часть этого неравенства стремится к бесконечности быстрее, чем правая. Полученное противоречие доказывает невозможность осуществления случая а).

Если имеет место случай б), то, как и при доказательстве лемм 2 и 3, мы выбираем подпоследовательности индексов n_i таким образом, чтобы для всех целых $k > 1$ и достаточное больших n_i имели место неравенства

$$a_{n_i k} \leqslant \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\varepsilon}, \tag{31}$$

где β — некоторая положительная, не зависящая от k постоянная.

Из неравенства (24) и формулы (25) мы получим:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1 - F\left(b_{n_i} - a_{n_i}\right)}{1 - F\left(b_{n_i k} + a_{n_i k}\right)} = e^2 \cdot k \tag{32}$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (31), получим:

$$\frac{1 - F\left(b_{n_i} - a_{n_i}\right)}{1 - F\left(b_{n_i k} + a_{n_i k}\right)} > \frac{1 - F\left(b_{n_i k} - a_{n_i k} \cdot \frac{k^{\varepsilon}}{\beta}\right)}{1 - F\left(b_{n_i k}\right)} \to e^{\frac{k^{\varepsilon}}{\beta}} \tag{33}$$

Из соотношений (32) и (33) можно заключить, что для любого целого $k > 1$ выполняется неравенство:

$$e^{\frac{k^{\varepsilon}}{\beta}} < e^2 \cdot k$$

Однако неравенство это для достаточно больших k оказывается несправедливым. Полученное противоречие показывает, что случай б) не может иметь места, что и завершает доказательство первой части леммы. Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Доказательство теоремы. Прежде всего очевидно, что если последовательность $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \to \infty$ сходится к собственной функции распределения и если $\frac{\alpha_n}{a_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) = \Phi_k^{(n)}\left(a_n \cdot \frac{\alpha_n}{a_n} z + b_n\right) \to \varepsilon(z) = \begin{cases} 0 & (z \leqslant 0) \\ 1 & (z > 0) \end{cases}$$

Поэтому, если при $n \to \infty$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z), \quad \overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — собственная функция распределения, отличная от любой функции распределения $\Phi_\beta^{(r)}(z)$ при $\beta \leqslant \alpha$, то

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + \beta_n) \to \varepsilon(z)$$

Это следует непосредственно из лемм 2, 3 и 4.

Так как предел композиций равен композиции пределов двух функций распределения и так как композиция собственной функции распределения $\Phi(z)$ и несобственной функции $\varepsilon(z)$ равна функции $\Phi(z)$, то в этом случае

$$\lim \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n) = \lim \Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n) =$$
$$= \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) * \varepsilon(z) = \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$$

Точно также, если

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Phi_\alpha^{(r)}(z),\ \Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi(z) \neq \Phi_\beta^{(n-k+1)}(z)$$

ни при каком $\beta \leqslant \alpha$, то

$$\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \to \varepsilon(z) \text{ и } \Psi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n) \to \Phi_\alpha^{(r)}(z)$$

Из леммы 1 следует, что если $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi(z)$ при $n \to \infty$, то и $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi(z)$.

Таким образом, если при $n \to \infty$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z),\ \Phi_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n)$$

сходится либо к $\Phi_\beta^{(r)}(z)$ при $\beta > \alpha$, либо к $\Psi_\beta^{(r)}(z)$ при любом $\beta > 0$, либо к $\lambda^{(r)}(z)$, то последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится при $n \to \infty$ к $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$. Если же $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Phi_\alpha^{(r)}(z)$, а $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходится либо к $\Phi_\beta^{(n-k+1)}(z)$ $(\beta > \alpha)$, либо к $\Psi_\beta^{(n-k+1)}(z)$ при любом $\beta > 0$, либо к $\lambda^{(n-k+1)}(z)$, то последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к $\Phi_\alpha^{(r)}(z)$.

Точно так же из лемм 3 и 4 можно заключить, что если

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \underset{n \to \infty}{\to} \lambda^{(n-k+1)}(z), \text{ а } \overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Psi_\alpha^{(n)}(z)$$

при любом $\alpha > 0$, то последовательность функций $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$, а, следовательно, в силу леммы 1, и последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к функции распределения $\lambda^{(n-k+1)}(z)$. Если же $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \lambda^{(r)}(z)$, а $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ при любом $\alpha > 0$, то последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к функции распределения $\lambda^{(r)}(z)$.

Если при $n \to \infty$ $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, а $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \to \Psi_\beta^{(r)}(z)$ при $\beta < \alpha$, то из леммы 4 следует, что последовательность функций распределения $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$, а, в силу леммы 1, и последовательность функций распределения $\Phi_{rk}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к

$$\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z).$$

Если же

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \underset{n \to \infty}{\to} \Psi_\alpha^{(r)}(z),\ \Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \to \Psi_\beta^{(n-k+1)}(z)\ (\beta < \alpha),$$

то последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n+b_n)$ сходится при $n\to\infty$ к $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$.

Таким образом, если k-ый и $(-r)$-ый члены вариационного ряда имеют существенно различные предельные распределения (несущественно различными мы называем предельные распределения, отличающиеся лишь верхними индексами, т. е. $\Phi_\alpha^{(r)}(z)$ и $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$ и $\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, $\lambda^{(r)}(z)$ и $\lambda^{(n-k+1)}(z)$, то можно найти нормировку, при которой последовательность функций распределения ранга порядка (r, k) сходится к функции одного из следующих типов:

$$\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z);\quad \Phi_\alpha^{(r)}(z);\quad \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z);\quad \Psi_\alpha^{(r)}(z);$$

$$\lambda^{(n-k+1)}(z);\quad \lambda^{(r)}(z).$$

В силу известной теоремы Хинчина [3] о сходимости последовательности типов, мы можем утверждать, что в этом случае последовательность функций распределения ранга порядка (r, k) ни при какой нормировке не может сходиться к собственной функции распределения, не однотипной с функцией, найденной таким путем.

Рассмотрим далее тот случай, когда предельные распределения k-го и $(-r)$-го членов вариационного ряда несущественно различны, т. е. когда

а) либо $\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\Phi_\alpha^{(r)}(z)$,

б) либо $\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_\alpha^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z)$,

в) либо $\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\lambda^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\lambda^{(r)}(z)$.

Если $\frac{a_n}{\alpha_n}\to\infty$ при $n\to\infty$ или $\frac{a_n}{\alpha_n}\to 0$ при $n\to\infty$, то мы получим те же возможные предельные распределения для ранга порядка (r, k), что и в случае существенно различных предельных распределений k-го и $(-r)$-го членов вариационного ряда.

Если же при $n\to\infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n}\to a$, где $0<a<\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n\cdot az+\beta_n).$$

Поэтому, если при $n\to\infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n}\to a$, то в случаях:

а) $\lim\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+b_n+\beta_n)=\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)*\Phi_\alpha^{(r)}(az)$;

б) $\lim\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+b_n+\beta_n)=\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)*\Psi_\alpha^{(r)}(az)$;

в) $\lim\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+b_n+\beta_n)=\lambda^{(n-k+1)}(z)*\lambda^{(r)}(az)$.

Наконец, если при $n\to\infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n}$ не сходится ни к какому пределу, то выберем из этой последовательности подпоследовательность $\frac{a_{n_i}}{\alpha_{n_i}}$, сходящуюся к конечному, нулевому или бесконечному пределу. Применяя к подпоследовательности $\Psi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z+b_{n_i}+\beta_{n_i})$ те же рассуждения, какие мы применяли раньше ко всей последовательности, мы получим, что либо $\Psi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z+b_{n_i}+\beta_{n_i})$, либо $\Psi_{rk}^{(n_i)}(\alpha_{n_i}z+b_{n_i}+\beta_{n_i})$ сходятся при $n\to\infty$ к собственной функции распределения $\Phi(z)$, принадлежащей к одному из указанных в условиях теоремы типов. В силу леммы 1, к той же функции сходится последовательность $\Phi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z+b_{n_i}+\beta_{n_i})$ или $\Phi_{rk}^{(n_i)}(\alpha_{n_i}z+b_{n_i}+\beta_{n_i})$. В силу теоремы Хинчина последовательность $\Phi_{rk}^{(n_i)}(z)$ ни при какой нормировке не может сходиться к собственной функции распределения, не однотипной с функцией $\Phi(z)$. Поэтому либо вся последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(z)$ при некоторой нормировке сходится к функции распределения $\Phi(z)$, либо последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(z)$ вообще ни при какой нормировке не сходится к собственной функции распределения.

Наша теорема тем самым доказана.

ПРИМЕРЫ. Приведем примеры, показывающие, что все указанные в теореме предельные распределения действительно существуют.

1)

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(-x)^{\beta}} & \text{для } x\leqslant -1\\ 1-\dfrac{1}{2}(-x)^{\alpha} & \text{для } -1<x\leqslant 0\\ 1 & \text{для } x>0\end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_nz+b_n)\underset{n\to\infty}{\to}\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n=\sqrt[\alpha]{\frac{2}{n}},\ b_n=0,$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_nz+\beta_n)\to\Phi_\beta^{(r)}(z) \text{ при } \alpha_n=\sqrt[\beta]{\frac{n}{2}},\ \beta_n=0,$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_nz)\to\Phi_\beta^{(r)}(z) \text{ при } n\to\infty$$

2)

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{2}x^{\alpha} & \text{для } 0<x\leqslant 1\\ 1-\dfrac{1}{2x^{\beta}} & \text{для } x>1\end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_nz+b_n)\to\Phi_\beta^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n=\sqrt[\beta]{\frac{n}{2}},\ b_n=0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_nz+\beta_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z) \quad \text{при } \alpha_n=\sqrt[\alpha]{\frac{2}{n}},\ \beta_n=0$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_nz)\to\Phi_\beta^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } n\to\infty$$

3)
$$F(x)=\begin{cases} 0 \ \text{для}\ x\leqslant 0 \\ x^{\alpha}\ \text{для}\ 0< x\leqslant 1\ \alpha>1 \\ 1\ \text{для}\ x>1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_1^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ a_n=\frac{1}{n\alpha},\ b_n=1,$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ \alpha_n=n^{-\frac{1}{\alpha}},\ \beta_n=0,$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ n\to\infty.$$

4)
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{для}\ x\leqslant -1 \\ 1-(-x)^{\alpha} & \text{для}\ -1<x\leqslant 0\quad \alpha>1 \\ 1 & \text{для}\ x>1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ a_n=n^{-\frac{1}{\alpha}},\ b_n=0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\Psi_1^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ \alpha_n=\frac{1}{n\alpha},\ \beta_n=1$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+\beta_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ n\to\infty.$$

5)
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{для}\ x\leqslant 0 \\ 1-e^{-x^{\alpha}} & \text{для}\ x>0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\lambda^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ a_n=\frac{1}{\alpha}(\lg n)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}};\ b_n=(\lg n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ \alpha_n=n^{-\frac{1}{\alpha}},\ \beta_n=0$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+b_n)\to\lambda^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ n\to\infty.$$

6)
$$F(x)=\begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{для}\ x\leqslant 0 \\ 1 & \text{для}\ x>0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)\ \text{при}\ a_n=n^{-\frac{1}{\alpha}},\ b_n=0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\lambda^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ \alpha_n=\frac{1}{\alpha}(\lg n)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\ \beta_n=(\lg n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z+\beta_n)\to\lambda^{(r)}(z)\qquad \text{при}\ n\to\infty$$

7)
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x\leqslant -1 \\ (1+x)^{\alpha} & \text{для } -1<x\leqslant -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^{\alpha}} & \text{для } -\frac{1}{2}<x\leqslant \frac{1}{2} \quad (\alpha>1) \\ 1-(1-x)^{\alpha} & \text{для } \frac{1}{2}<x\leqslant 1 \\ 1 & \text{для } x>1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n=n^{-\frac{1}{\alpha}},\ b_n=1$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Psi_\alpha^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n,\ b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+2b_n)\to\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)*\Psi_\alpha^{(r)}(z)\quad (n\to\infty)$$

8)
$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^{\alpha}} & \text{для } x\leqslant 0 \\ 1-\frac{1}{2(1+x)^{\alpha}} & \text{для } x>0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n=\sqrt[\alpha]{\frac{n}{2}},\ b_n=-1$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z+b_n)\to\Phi_\alpha^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n \text{ и } b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+2b_n)\to\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)*\Phi_\alpha^{(r)}(z)\quad (n\to\infty)$$

9)
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z+b_n)\to\lambda^{(n-k+1)} \text{ при } a_n=\frac{1}{\sqrt{2\lg n}};\ b_n=-\sqrt{2\lg n}+\frac{\lg\lg n+\lg 4\pi}{2\sqrt{2\lg n}}$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z+b_n)\to\lambda^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n \text{ и } b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z+2b_n)\to\lambda^{(n-k+1)}(z)*\lambda^{(r)}(z) \text{ при } n\to\infty.$$

Приведенные примеры дают наглядное представление о некоторых свойствах предельных распределений ранга, которые легко могут быть получены аналитическим путем. Так, например, примеры 1—6 показывают, что если для начальной функции распределения $F(x)$ предельным распределением для ранга порядка (r, k) окажется одно из распределений $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ или $\lambda^{(n-k+1)}(z)$, то для начальной функции респределения $1-F(-x)$ предельным распределением для р нга окажется соответственно распределение $\Phi_\alpha^{(r)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$ или $\lambda^{(r)}(z)$ и наоборот. Примеры 7—9 показывают, что если начальное распределение симметрично, т. е. $F(x)=1-F(-x)$, то для ранга порядка (r, k) предельным окажется одно из разпределений $\Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z) * \Phi_{\alpha}^{(r)}(z)$, $\Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z) * \Psi_{\alpha}^{(r)}(z)$ или $\lambda^{(n-k+1)}(z) * \lambda^{(r)}(z)$.

Общие необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять начальная функция распределения $F(x)$, чтобы предельное распределение ранга было того или иного типа, легко могут быть получены из условий сходимости функций распределения максимального члена вариационного ряда к возможным предельным законам, найденных в работе Б. В. Гнеденко.

ЛИТЕРАТУРА

Гнеденко Б. В. — Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Annals of Mathematics Vol. 44, № 3, 1943.

Смирнов. Н. В. — Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. Труды математического института им. Стеклова, т. 25, 1949.

3. Хинчин. А. Я. — Предельные законы для сумм независимых случайных величин. ОНТИ, 1938.

4. Гартштейн Б. Н. — О некоторых предельных закономерностях для ранга. ДАН СССР, т. 60, № 7, 1948.

5. Gumbel E. J. — The distribution of range. Annals of Mathematical Statistics, v. XVII, № 3, 1947.

6. Elfving G. — The asimptotical distribution of range in samples from a normal population. Biometrika, v. XXXIV, pp. 112—113, 1947.