Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

В. Ф. РОГАЧЕНКО

# О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ 2-й СТЕПЕНИ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ГИПЕРЦИРКУЛЯ

§ 1. А. С. Смогоржевским (1, 2, 3) было доказано, что любая задача на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского может быть решена без помощи линейки, если в качестве инструментов используются все три циркуля: обычный циркуль, орициркуль и гиперциркуль.[1] Другими словами, А. С. Смогоржевский показал возможность выполнения построений, аналогичных построениям Маскерони в евклидовой плоскости.

Н. М. Несторович (4, стр. 76—77) поставил вопрос о возможности ограничений числа циркулей при использовании их для решения задач 2-й степени: нельзя ли при решении конструктивных задач 2-й степени без помощи линейки ограничиться использованием только одного или хотя бы каких-либо двух циркулей из трех?

В настоящей статье делается первый шаг в решении этой задачи — показывается, что при любых построениях 2-й степени в плоскости Лобачевского без помощи линейки достаточно использовать только два циркуля: обычный циркуль (чертящий окружности) и гиперциркуль (чертящий эквидистанты). В дальнейшем, для сокращения, комплекс: циркуль-гиперциркуль будем обозначать через [ц-г].

При использовании в построениях линейки и всех трех циркулей решение всякой конструктивной задачи сводится к вычерчиванию прямых, окружностей, орициклов и эквидистант, а также к определению точек пересечения любых двух из этих четырех видов линий.

Имея в своем распоряжении только [ц-г], мы можем вычерчивать лишь окружности и эквидистанты, а также находить точки пересечения двух окружностей, двух эквидистант или окружности с экви дистантой.

В дальнейшем мы предполагаем, что прямая задается двумя различными точками $A$ и $B$, а орицикл задается осью $AA'$ и точкой $A$, лежащей на этой оси.[2]

Желая показать достаточность [ц-г] для решения любой конструктивной задачи 2-й степени, мы должны показать, как с помощью [ц-г] можно решить следующие задачи:

[1] О конструкции орициркуля и гиперциркуля и способах их использования в построениях см. работу Н. М. Несторовича (4, стр. 91—92, 105—107).

[2] Позднее будет показано, что другие способы задания орицикла могут быть сведены с помощью [ц-г] к указанному способу.

1. Найти точки пересечения прямой и окружности, центр которой известен.
2. Найти точки пересечения прямой и эквидистанты.
3. Найти точку пересечения двух прямых.
4. Найти точку пересечения прямой и орицикла.
5. Найти точки пересечения окружности и орицикла.
6. Найти точки пересечения эквидистанты и орицикла.
7. Найти точки пересечения двух орициклов.

Что касается вычерчивания прямой и орицикла, то без специальных инструментов — линейки и орициркуля — непрерывную прямую и непрерывный орицикл, конечно, вычертить нельзя. Однако мы покажем, что с помощью [ц-г] можно легко решить следующие две задачи:

8. Найти любое число точек на данной прямой.
9. Найти любое число точек на данном орицикле.

Перечисленные девять задач будем называть *главными задачами.* При решении этих задач нам придется решать некоторые *элементарные задачи,* разрешимость которых с помощью [ц-г] мы предварительно покажем. Кроме того, мы покажем, как с помощью [ц-г] можно решать *основные задачи,* связанные с особенностями теории параллельных в плоскости Лобачевского.

В дальнейшем элементарные, основные и главные задачи мы будем называть задачами соответственно первой, второй или третьей группы. Мы будем пользоваться следующими обозначениями для задаваемых или проводимых линий:

пр. $AB$ — прямая, проходящая через данные точки $A$ и $B$;

$k(O, r)$ или $k(O, AB)$ — окружность с центром в точке $O$ и радиусом $r$ или $AB$;

$h(AA', B)$ — орицикл с направленной осью $AA'$, проходящий через точку $B$;

$e(AB, d)$ или $e(AB, CD)$ — эквидистанта с базисом $AB$ и дистанцией $d$ или $CD$;

$e(AB, C)$ — эквидистанта с базисом $AB$, проходящая через точку $C$.

Прямые и орициклы, являющиеся элементами построения, на чертежах будут обозначаться пунктиром.

§ 2. Покажем, как с помощью [ц-г] решаются элементарные задачи.

ЗАДАЧА I, 1. Удвоить данный отрезок $AB$ (вообще умножить его на $n$ — целое).[1]

Строим (фиг. 1) $k(B, AB)$ и $e(AB, d)$, где $d < AB$. Пусть $C$ и $D$ — точки их пересечения. Строим $k_1(D, AC)$. Пусть точка $E$ — одна из точек пересечения $k$ и $k_1$. Тогда $AE = 2AB$, так как точка $E$ будет вторым концом диаметра окружности радиуса $AB$. Повторив указанное построение достаточное число раз, получим $AF = nAB$.

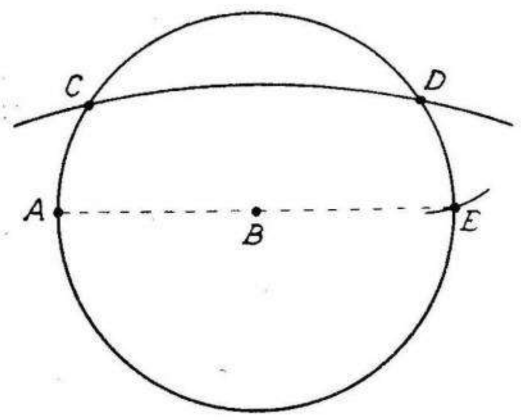
ЗАДАЧА I, 2. Восстановить перпендикуляр к данной прямой $AB$ в данной на ней точке $C$.

Удвоив отрезок $AC$ (I, 1), найдем точку $D$. С помощью циркуля находим точку $E$, равноудаленную от $A$ и $D$ и отличную от $C$. Тогда $EC \perp AB$.

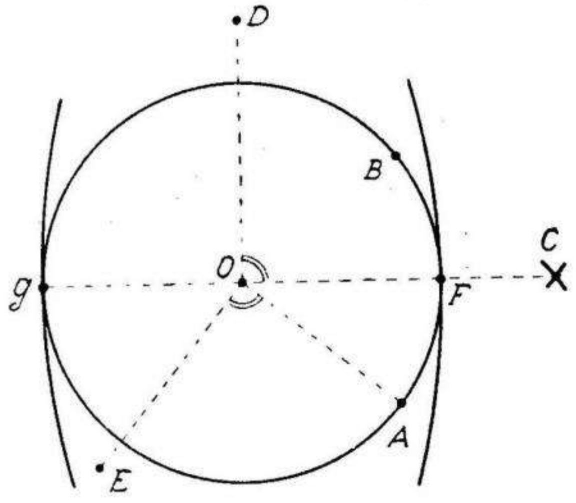
[1] Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 134).

ЗАДАЧА I, 3. Разделить пополам дугу $\smile{AB}$ окружности с данным центром $O$.

Находим точку $C$ (фиг. 2), равноудаленную от концов дуги $A$ и $B$ и не совпадающую с центром $O$ окружности. Строим прямую $OD \perp OC$ (I, 2). Берем в гиперциркуль отрезок $OA = r$ и строим $e(OD, r)$.[1] Точки $F$ и $G$ касания эквидистанты с данной окружностью

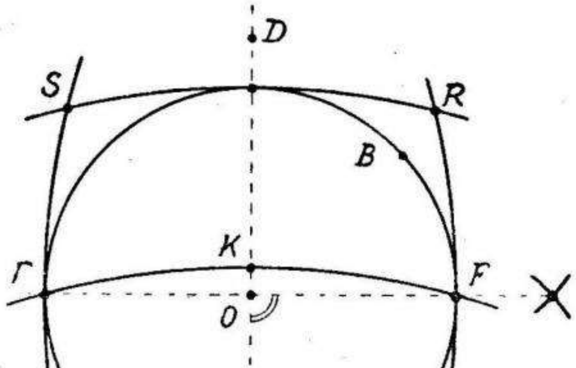



Фиг. 1




Фиг. 2

делят пополам дуги окружности, определяемые точками $A$ и $B$, так как общая касательная окружности и эквидистанты будет перпендикулярна к прямой $OC$ в середине дуги $\smile{AB}$ окружности. Можно увеличить точность построения, определяя середину дуги окружности не как точку касания окружности и эквидистанты, а как точку их пересечения. Для этого (фиг. 3), кроме $e(OD, r)$, строим $e(OC, r)$. Эти эквидистанты пересекутся в точках $P, Q, R, S$. Пусть $P$ и $Q$ лежат по одну сторону пр. $OC$. Строим $e(PQ, r)$. Она пересечет окружность в искомых точках $F$ и $G$. Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из конгруентности смешанолинейных четырехугольников $OEQF$ и $HQFK$ и из того, что серединой дуги $\smile{AB}$ окружности служит середина дуги $\smile{QR}$ эквидистанты.




Фиг. 3.

ЗАДАЧА I, 4. Удвоить данный угол $\angle ABC$ (вообще умножить его на $n$ — целое).

---

[1] Для того, чтобы можно было взять в гиперциркуль отрезок $OA = r$, строим еще пр. $OE \perp OA$, по которой направим базис гиперциркуля.

Строим $k(B, BA)$ и $k_1(C, CA)$. Пусть $D$ — вторая точка пересечения этих окружностей. Тогда $\angle ABD = 2\angle ABC$ в силу конгруентности треугольников $ABC$ и $DBC$. Повторяя построение достаточное число раз, получим $\angle ABE = n\angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 5. Разделить данный угол $\angle ABC$ пополам (вообще на $2^n$ частей).

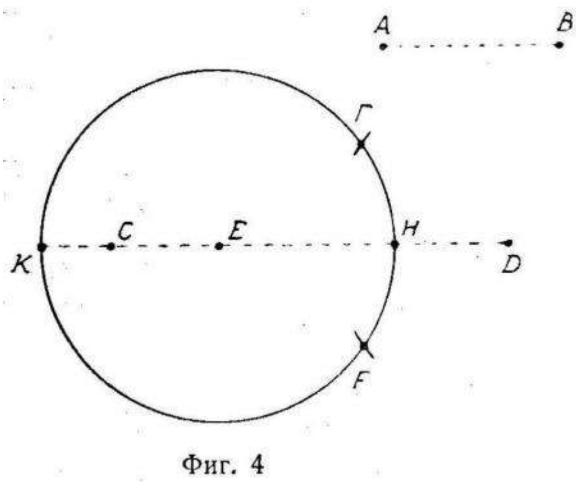
Строим $\angle ABD = 2\angle ABC$ (I,4). Так как $AB = AD$, то точки $A$ и $D$ суть концы дуги окружности с центром в точке $B$. Делим дугу $\overset{\frown}{AD}$ пополам (I,3). Пусть $E$ — середина дуги $\overset{\frown}{AD}$. Разделив теперь дугу $\overset{\frown}{AE}$ пополам, получим точку $F$, так что $\angle ABF = \frac{1}{2}\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$. Повторяя операцию $n$ раз, можем получить $\angle ABG = \frac{1}{2^n}\angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 6. Перенести отрезок $AB$ на данную прямую $CD$, отложив его от данной точки $E$.

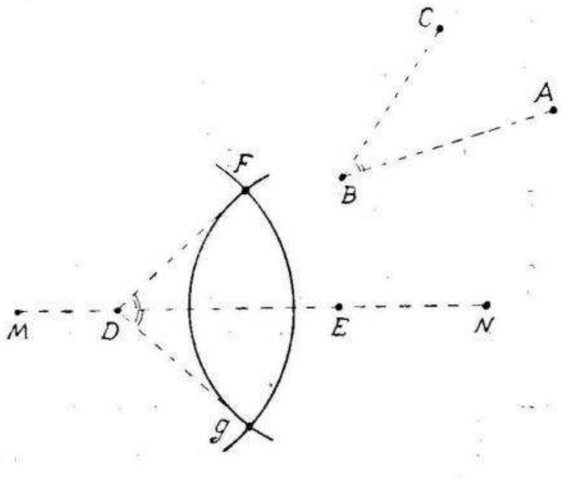
Строим $k(E, AB)$ (фиг. 4). Находим на ней точки $F$ и $\Gamma$, симметричные относительно пр. $CD$. Находим середины $H$ и $K$ каждой из дуг $\overset{\frown}{F\Gamma}$ (I, 3). Тогда $EH = EK = AB$.

ЗАДАЧА I, 7. Построить угол, равный заданному углу $\angle ABC$ при данной прямой $MN$ в данной на ней точке $D$.

Отложим отрезок $AB$ (фиг. 5) на прямой $MN$ от точки $D$ (I, 6).




Фиг. 4



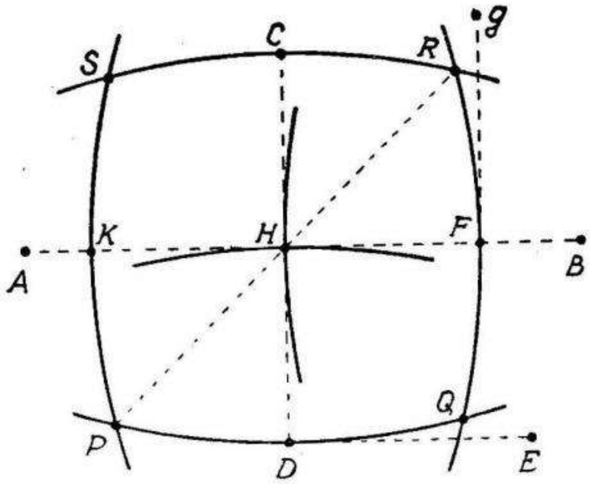

Фиг. 5

Пусть точка $E$ — конец этого отрезка. Строим $k(D, BC)$ и $k_1(E, AC)$. Пусть $F$ и $G$ — точки пересечения $k$ и $k_1$. Тогда $\angle EDF = \angle EDG = \angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 8. Из данной точки $C$ опустить перпендикуляр на данную прямую $AB$.[1]

[1] Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 136).

Находим точку $D$ (фиг. 6), симметричную с точкой $C$ относительно пр. $AB$. Строим пр. $DE \perp CD$ (I, 2). Строим затем эквидистанту с базисом $AB$, проходящую через точку $C$ (и точку $D$), а также эквидистанту с базисом $CD$ и той же дистанцией, что и предыдущая. Пусть они пересекаются в точках $P$, $Q$, $R$, $S$. Находим далее точку $F$, симметричную с точкой $C$ относительно пр. $PR$. Строим пр. $FG \perp AF$. Наконец, строим эквидистанты с базисами $DE$ и $FG$ и той же дистанцией, что и предыдущие. Одна из четырех точек пересечения этих эквидистант (на чертеже точка $H$) есть основание перпендикуляра, опущенного из точки $C$ на пр. $AB$. Действительно, в точке $H$ взаимно делятся пополам равные перпендикулярные отрезки $CD$ и $FK$, являющиеся касательными к двум ветвям эквидистант, имеющих равные дистанции и перпендикулярные базисы.




Фиг. 6

ЗАДАЧА I, 9. Разделить данный отрезок $AB$ пополам (вообще на $2^n$ частей).

Находим точку $C$, одинаково удаленную от точек $A$ и $B$. Затем находим основание $M$ перпендикуляра, опущенного из точки $C$ на пр. $AB$ (I, 8). Тогда $AM = MB = \frac{1}{2} AB$.

§ 3. Прежде чем перейти к решению основных задач, покажем как решить первые две главные задачи.

ЗАДАЧА III, 1. Найти точки пересечения пр. $AB$ и окружности, центр $O$ которой известен.

Случай 1°. Прямая не проходит через центр окружности. Строим точку $O_1$, симметричную с точкой $O$ относительно пр. $AB$. Строим $k(O_1, r)$, где $r$ — радиус данной окружности. Если эти две окружности пересекаются, то их общие точки $C$ и $D$ суть искомые точки.

Случай 2°. Прямая проходит через центр окружности. Искомые точки пересечения найдем, если отложим на пр. $AB$ по обе стороны от точки $O$ отрезки, равные радиусу данной окружности (I, 6).

ЗАДАЧА III, 2. Найти точки пересечения пр. $AB$ и эквидистанты $e(CD, d)$.

Если $AB \perp CD$, то находим основание $E$ перпендикуляра (I, 8) и на пр. $AB$ по обе стороны от точки $E$ откладываем отрезок $d$ (I, 6). Если $AB$ не перпендикулярна к $CD$, то искомые точки будут найдены, если найдем точки пересечения данной эквидистанты и эквидистанты, ей симметричной относительно пр. $AB$. Для этого находим точки $C_1$ и $D_1$, симметричные с точками $C$ и $D$ относительно данной пр. $AB$. Далее строим $e_1(C_1D_1, d)$. Здесь возможны три случая.

Случай 1°. Если прямые $AB$ и $CD$ пересекаются, то обе эквидистанты пересекаются в четырех точках, образуя криволинейный четырехугольник. Одна из пар противоположных вершин этого четырехугольника представляет собой пару искомых точек пересечения данных прямой и эквидистанты.

Случай 2°. Если прямые $AB$ и $CD$ сверхпараллельны и длина $h$ их общего перпендикуляра меньше дистанции $d$, то эквидистанты имеют только две общих точки, которые и будут искомыми точками пересечения. Если $h = d$, то эквидистанты касаются и точка их касания будет точкой касания данных прямой и эквидистанты. Если $h$ больше $d$, то прямая и эквидистанта общих точек не имеют.

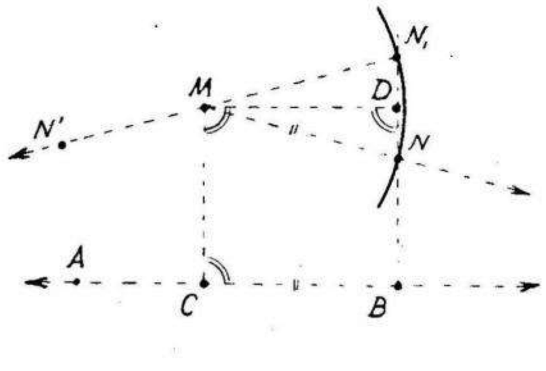
Случай 3°. Если $AB$ параллельна $CD$, то эквидистанты в конечной части плоскости пересекаются только в одной точке, которая и будет искомой точкой пересечения.

Рассматриваемая задача дает возможность, не решая задачи о пересечении двух прямых $AB$ и $CD$ (III, 3), легко узнать, будут ли они пересекающимися, сверхпараллельными или параллельными. Для этого строим, например, $e(CD, A)$ и ищем вторую точку $F$ пересечения этой эквидистанты с пр. $AB$. Если точка $F$ существует и лежит на второй ветви эквидистанты, то прямые $AB$ и $CD$ пересекаются. Если точка $F$ лежит на той же ветви, что и точка $A$, или совпадает с точкой $A$, то пр. $AB$ сверхпараллельна пр. $CD$. Если, наконец, вторая точка $F$ пересечения прямой и эквидистанты в конечной части плоскости не существует, то $AB \parallel CD$.

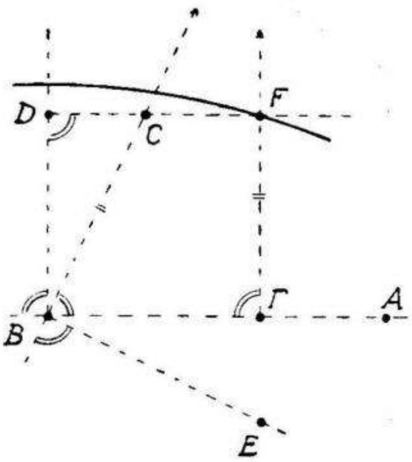
Перейдем теперь к решению основных задач.

ЗАДАЧА II, 1. Из данной точки $M$, лежащей вне данной пр. $AB$, провести пр. $MN$, параллельную $AB$.[1]

Построение основано на свойствах трипрямоугольника. Из $M$ на пр. $AB$ опускаем (фиг. 7) перпендикуляр $MC$ (I, 8). Проводим пр.




Фиг. 7




Фиг. 8

$MD \perp MC$ (I, 2). Затем из $B$ на пр. $MD$ опускаем перпендикуляр $BD$. Строим $k(M, BC)$ и находим точки $N$ и $N_1$ пересечения этой окружности с пр. $BD$ (III,1). Продолжая пр. $MN_1$ по другую сторону

[1] См. работу Н. М. Несторовича (4, задача 158, 1-е решение). Мы даем измененный вариант, чтобы избежать определения точки пересечения двух прямых.

точки $M$, получим пр. $MN'$. Прямые $MN$ и $MN'$ параллельны прямой $AB$ в соответствующие стороны, так как $\angle CMN = \angle CMN' = \Pi(CM)$.

ЗАДАЧА II, 2. Построить угол параллельности $\alpha = \Pi(a)$, отвечающий отрезку $a = AB$.

Перпендикулярно к отрезку $AB$ строим пр. $AC$ (I, 2). Строим пр. $BD \parallel AC$ (II,1). Тогда $\angle ABD = \Pi(AB)$.

ЗАДАЧА II, 3. Для данного угла $\alpha = \angle ABC\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ построить отрезок $a = \Delta(\alpha)$, отвечающий углу $\alpha$ как углу параллельности.

Строим (фиг. 8) $BD \perp AB$ и $BE \perp BC$ (I, 2). Из точки $C$ опускаем прямую $CD \perp BD$ (I, 8). Приняв $BE$ за базис эквидистанты, проходящей через точку $C$, возьмем отрезок $BC$ в гиперциркуль, а затем, построив $e(AB, BC)$, находим точки пересечения ее с прямой $CD$ (III, 2).[1] Пусть $F$ — та из двух точек пересечения, для которой точка $C$ лежит между $D$ и $F$. Из точки $F$ опускаем $FG \perp AB$ (I, 8). Тогда в трипрямоугольнике $BDFG \angle GBC = \Pi(BG)$, т. е. отрезок $BG$ — искомый отрезок, отвечающий углу $\angle ABC$ как углу параллельности.

ЗАДАЧА II, 4. Построить общий перпендикуляр двух сверхпараллельных прямых $AB$ и $CD$.

Строим $e(AB, C)$ и находим вторую точку $C_1$ пересечения эквидистанты с пр. $CD$. Если точки $C$ и $C_1$ совпадают, т. е. пр. $CD$ касается эквидистанты в точке $C$, то опускаем $CF \perp AB$. Пр. $CF$ будет общим перпендикуляром прямых $AB$ и $CD$. Если же точки $C$ и $C_1$ не совпадают, то делим отрезок $CC_1$ пополам (I, 9) и из середины $E$ этого отрезка опускаем $EF \perp AB$. Пр. $EF$ есть общий перпендикуляр прямых $AB$ и $CD$.

§ 4. Перейдем теперь к вопросу о разрешимости остальных главных задач с помощью [ц-г]. Построения будем проводить, пользуясь свойствами инверсии в плоскости Лобачевского.[2]

Предварительно решим несколько вспомогательных задач.

ЗАДАЧА 1. Построить образ $\varkappa$ абсолюта плоскости Лобачевского при инверсии относительно окружности $k$ с центром $O$.

Искомым образом будет окружность $\varkappa$, концентрическая с окружностью $k$ и находящаяся внутри $k$. Действительно, если провести (фиг. 9) любой орицикл, пересекающий ортогонально окружность $k$ в точках $A$ и $B$, то при инверсии он перейдет в себя, а его бесконечно удаленная точка (то есть общая бесконечно удаленная точка его осей) перейдет в середину дуги $\overset{\frown}{AB}$ орицикла. Геометрическое место середин дуг всех орициклов, ортогонально пересекающих окружность $k$, есть окружность $\varkappa$, концентрическая с окружностью инверсии $k$. Отсюда вытекает способ построения окружности $\varkappa$. Взяв на окружности инверсии $k$ произвольную точку $A$, строим $AA' \perp OA$ (I, 2) и пр. $OC' \parallel AA'$ (II,1). Орицикл $h(OC', A)$ ортогонален окружности $k$. Найдем точку $C$ этого орицикла, лежащую на его оси $OC'$

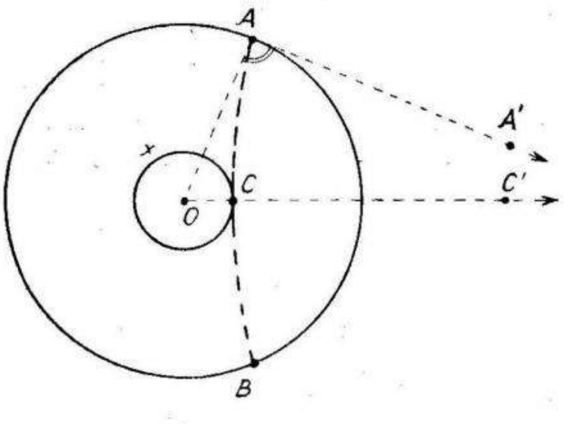
[1] Точек пересечения будет две, так как прямые $AB$ и $CD$ сверхпараллельны и дистанция $BC$ эквидистанты больше длины их общего перпендикуляра $BD$ как гипотенуза треугольника $BCD$.

[2] Об этом см у А. С. Смогоржевского (3, стр. 51—55).

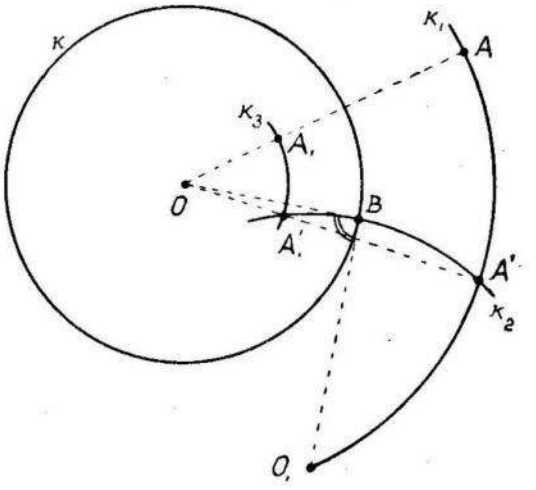
(построение такой точки будет указано ниже). Отрезок $OC$ есть радиус искомой окружности $\varkappa$.

ЗАДАЧА 2. Найти точку $A_1$, являющуюся образом точки $A$ при инверсии относительно окружности $k$.

Строим (фиг. 10) $k_1(O, OA)$. На окружности инверсии $k$ берем произвольную точку $B$. Проводим $BO_1 \perp OB$ (I, 2) и строим $k_2(O_1, O_1B)$,




Фиг. 9




Фиг. 10

которая будет ортогональна окружности $k$. Пусть $A'$ — одна из точек пересечения $k_1$ и $k_2$.[1] Находим вторую точку пересечения $A_1'$ окружности $k_2$ и луча $OA'$ (III, 1). Точка $A_1'$ есть образ точки $A'$. Строим, наконец, окружность $k_3(O, OA_1')$ и находим точку пересечения $A_1$ этой окружности и луча $OA$. Точка $A_1$ есть искомый образ точки $A$.[2]

ЗАДАЧА 3. Найти линию, являющуюся образом прямой $AB$, проходящей через центр окружности инверсии $k$.

Так как прямая $AB$ ортогональна окружности $k$, то при инверсии она переходит в себя. При этом отрезок прямой внутри окружности $\varkappa$ будет образом идеальной части прямой и наоборот; отрезки прямой, заключенные между окружностями $k$ и $\varkappa$, будут образами лучей прямой, лежащих вне окружности $k$ и наоборот.

ЗАДАЧА 4. Найти линию, являющуюся образом прямой $AB$, если прямая $AB$, не проходя через центр инверсии, пересекает образ $\varkappa$ абсолюта в двух различных точках.[3]

Пусть прямая $AB$ (фиг. 11) пересекает окружность $k$ в точках $C$ и $D$, а окружность $\varkappa$ в точках $E$ и $F$. Находим середину $G$ меньшей из дуг $EF$ окружности $\varkappa$ (I, 3). На луче $OG$ находим отрезок параллельности $OH$, отвечающий углу $\angle EOG$ как углу параллельности (II, 3). Проводим $HK \perp OH$ (I, 2) и строим эквидистанту $e(HK, C)$.

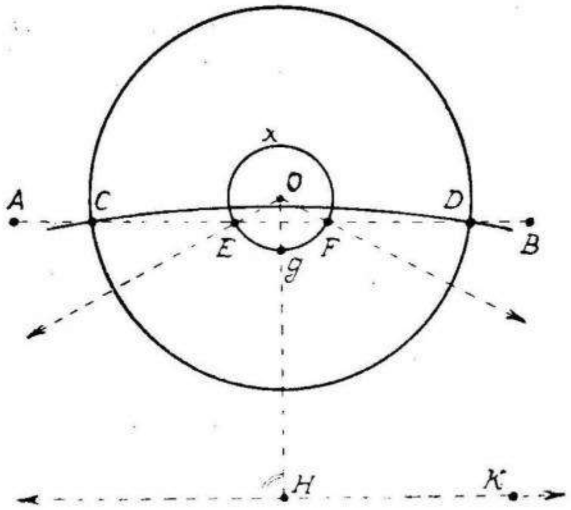
[1] Чтобы $k_1$ и $k_2$ пересекались достаточно взять $O_1$ на $k_1$ или вне ее.

[2] При решении последних двух задач мы воспользовались построениями А. С. Смогоржевского (3, стр. 137–138), несколько изменив их, чтобы избежать использования орициркуля.

[3] Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 140).

Ветвь эквидистанты $e$, проходящая через точки $C$ и $D$, ортогональна окружности $\varkappa$ и является образом части прямой $AB$, находящейся вне окружности $\varkappa$.

Перейдем теперь к решению следующей главной задачи.

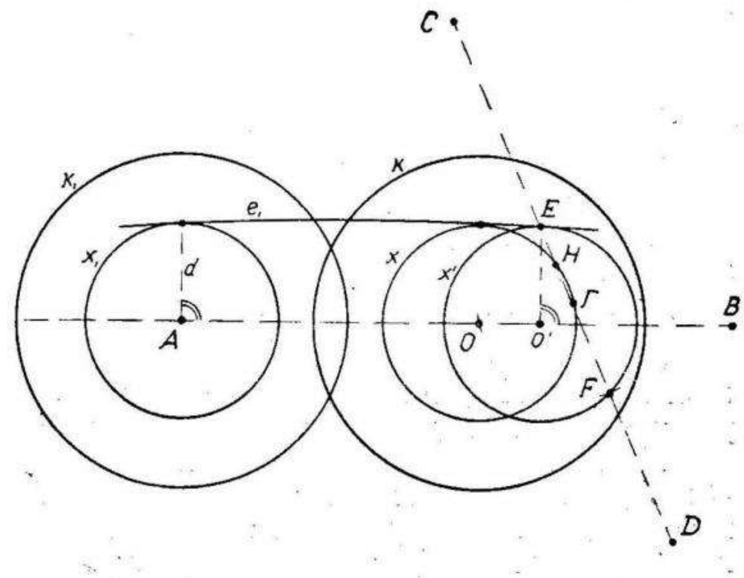



Фиг. 11

ЗАДАЧА III, 3. Найти точку пересечения двух прямых $AB$ и $CD$.

Предварительно выясняем, пересекаются ли вообще данные прямые или нет (III, 2). Если прямые пересекаются, то находим основания $E$ и $F$ перпендикуляров, опущенных из $C$ и $D$ на пр. $AB$. Если $AB \perp CD$, то точки $E$ и $F$ совпадают, что дает искомую точку пересечения перпендикулярных прямых. Для того, чтобы найти точку $M$ пересечения двух данных, заведомо пересекающихся не перпендикулярных прямых, нужно найти точку пересечения $M_1$ образов этих прямых при инверсии относительно некоторой окружности $k$. Прообраз этой точки $M_1$ и есть искомая точка $M$ пересечения прямых. Легко видеть, что всегда можно так выбрать центр $O$ окружности инверсии $k$ на одной из данных прямых, чтобы вторая прямая пересекала образ абсолюта — окружность $\varkappa$ в двух точках, притом лежащих по одну сторону от первой прямой.[1]

Действительно, пусть даны пересекающиеся неперпендикулярные прямые $AB$ и $CD$ (фиг. 12). Строим $k_1(A, r)$, где $r$ — произвольный радиус и находим соответствующий образ $\varkappa_1$ абсолюта плоскости (задача 1). Определив радиус $d$ окружности $\varkappa_1$, строим $e_1(AB, d)$, которая пересечет пр. $CD$ в двух точках. Пусть $E$ — одна из этих точек. Опустив из нее $EO' \perp AB$ (I,8) и построив $\varkappa'(O', d)$, найдем вторую точку $F$ пересечения $\varkappa'$ и пр. $CD$. Найдем середину $\Gamma$ отрезка $EF$ (I, 9) и, сде-




Фиг. 12

[1] Для того, чтобы искомая точка пересечения не оказалась внутри окружности $\varkappa$.

лав окружностью радиуса $d$ с центром в точке $\Gamma$ засечку на пр. $AB$, получим точку $O$ (III, 1). Затем строим $\varkappa(O, d)$, которая будет пересекать пр. $CD$ в точках $\Gamma$ и $H$, лежащих по одну сторону от прямой $AB$. Остается построить $k(O, r)$, являющуюся окружностью инверсии, с помощью которой будем находить точку пересечения прямых $AB$ и $CD$. [1]

Итак, пусть построена окружность $k(O, r)$ такая, что окружность $\varkappa(O, d)$ перекает пр.$CD$ в точках $E$ и $F$, лежащих по одну сторону от пр. $AB$. При инверсии относительно $k$ пр. $AB$ перейдет в себя (задача 3), а пр. $CD$ перейдет в эквидистанту $e$, ортогональную окружности $\varkappa$ (задача 4). При этом пр. $AB$ будет сверхпараллельна базису эквидистанты $e$, так как она лежит вне угла $\angle EOF$, образованного прямыми $OE$ и $OF$, параллельными базису эквидистанты. Следовательно, пр. $AB$ будет пересекать одну ветвь эквидистанты $e$ в двух различных точках $M_1$ и $N_1$, из которых одна точка, например $M_1$, лежит вне окружности $\varkappa$. Найдя образ $M$ точки $M_1$ при инверсии относительно окружности $k$ (задача 2), получим искомую точку пересечения прямых $AB$ и $CD$.

ЗАДАЧА III, 4. Найти точки пересечения прямой и орицикла.

ЗАДАЧА III, 5. Найти точки пересечения окружности и орицикла.

ЗАДАЧА III, 6. Найти точки пересечения эквидистанты и орицикла.

ЗАДАЧА III, 7. Найти точки пересечения двух орициклов.

Н. М. Несторович (4, стр. 135—144) показал, что эти четыре задачи могут быть решены с помощью циркуля и линейки, т. е. путем определения точек пересечения двух прямых или двух окружностей или прямой и окружности. Выше мы показали, что с помощью [ц-г] можно находить точки пересечения любого из этих трех видов. Следовательно, с помощью [ц-г] может быть решена каждая из задач III, 4—7.

ЗАДАЧА III, 8. Найти любое число точек на данной прямой $AB$.

Задача решается многократным комбинированием операций удвоения и деления пополам отрезка $AB$ (I, 1, 9).

ЗАДАЧА III, 9. Найти любое число точек на данном орицикле.

Проведем под произвольным углом $\alpha < \frac{\pi}{2}$ к оси $AA'$ пр. $AB$ и найдем $AC = \Delta(\alpha)$ (II, 3). Удвоив отрезок $AC$ в сторону точки $C$ (I, 1), получим точку $D$, принадлежащую данному орициклу. Проводя прямые $AB$ под различными углами $\alpha < \frac{\pi}{2}$ к оси $AA'$, получим любое число точек орицикла. Задачу можно решить иначе: через произвольную точку $C$ провести $CC' \parallel AA'$, затем найти точку $D$ орицикла, лежащую на его оси $CC'$ (см. ниже § 5, б).

§ 5. Нам остается рассмотреть различные способы задания орицикла и показать, что с помощью [ц-г] они могут быть сведены к одному.

[1] Если угол между прямыми $CD$ и $AB$ будет меньше угла между прямыми $CD$ и $EO'$, то уже окружность $\varkappa'$ будет пересекать пр. $CD$ в точках $E$ и $F$, лежащих по одну сторону пр. $AB$. Тогда дополнительное построение окружности $\varkappa$ производить нет необходимости.

Известно (4, стр. 133—135), что орицикл может быть задан одним из следующих четырех способов:

*а*) направленной осью $AA'$ и точкой $A$ на ней;

*б*) направленной осью $AA'$ и точкой $B$ вне ее;

*в*) тремя точками $A$, $B$, $C$ (при этом должно быть: $\angle ABC = \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) + \Pi\left(\frac{BC}{2}\right)$);

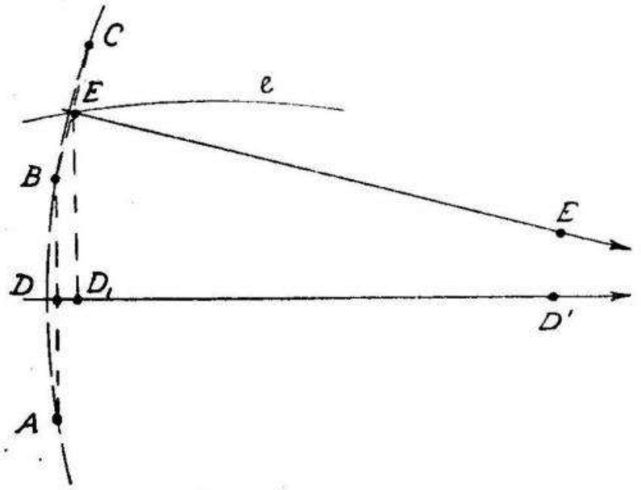
*г*) отрезком дуги орицикла.

В качестве основного способа задания орицикла мы принимаем способ *а*), как наиболее естественный и соответствующий заданию окружности центром и радиусом.

Покажем, что при наличии комплекса инструментов [ц-г] способы *б-г*) задания орицикла могут быть приведены к способу *а*).

Способ *г*) легко сводится к способу *в*), если на начерченном отрезке дуги орицикла взять три различные точки.

Способ *в*) можно свести к способу *б*). Действительно, пусть даны точки $A,B,C$ орицикла (фиг. 13). Найдем середину $D$ отрезка $AB$ и середину $E$ отрезка $BC$ (I, 9). Строим $DD' \perp AB$ и $EE' \perp BC$ (I, 2). Тогда $DD' \parallel EE'$. Опускаем $ED_1 \perp DD'$ (I, 8) и, построив $e\,(DD',\ ED_1)$, определяем, в какую сторону сходятся параллельные прямые $DD'$ и $EE'$. Этим определяется направление оси орицикла. Взяв, например, ось $DD'$ и точку $A$ орицикла, приходим к способу *б*).




Фиг. 13

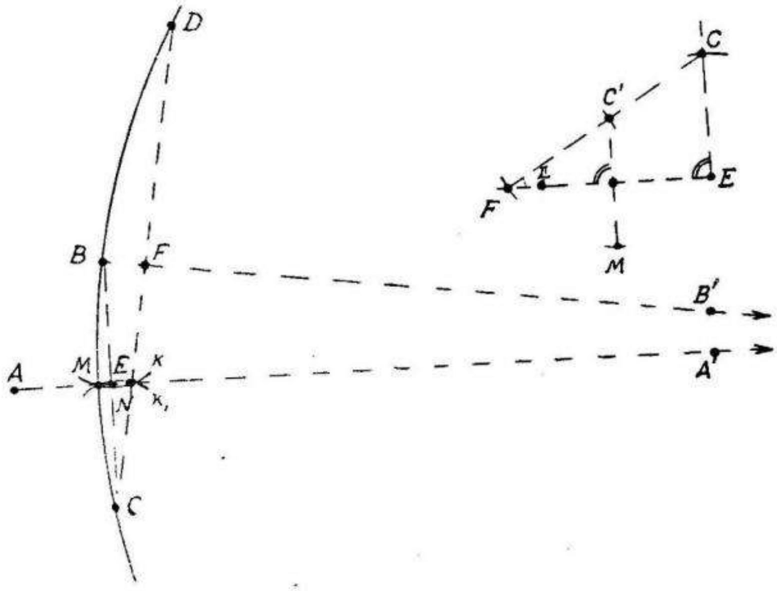
Покажем теперь как с помощью [ц-г] можно способ *б*) свести к способу *а*). Построение сводится к нахождению середины дуги орицикла и основано на соображениях, высказанных А. С. Смогоржевским (3, стр. 137).

Пусть (фиг. 14) дана дуга $\breve{BC}$ орицикла и точка $M$ на ней, такая, что $\breve{BM} = \breve{MC}$. Пусть, далее, точка $E$ — середина хорды $BC$ дуги $\breve{BC}$ орицикла и $CM$ — хорда дуги $\breve{CM}$. Тогда $\angle CME = \Pi\left(\frac{CM}{2}\right)$. Из прямоугольного треугольника $CME$ получаем:

$$\operatorname{sh} CE = \operatorname{sh} CM \cdot \sin \Pi\left(\frac{CM}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh} CM}{\operatorname{ch} \frac{CM}{2}} = 2 \operatorname{sh} \frac{CM}{2}$$

Сравнив крайние члены, получим: $\operatorname{sh}\frac{CM}{2} = \operatorname{sh} CE \cdot \sin\frac{\pi}{6}$.

Итак, пусть даны ось $AA'$ орицикла и точка $B$ орицикла вне оси. Проведем ось $BB' \parallel AA'$ (II, 1). Находим точку $C$ орицикла, симметричную с $B$ относительно оси $AA'$ и точку $D$ орицикла, симметричную с $C$ относительно оси $BB'$. Находим, далее, середину $E$ отрезка $BC$ и середину $F$ отрезка $CD$ (I, 9). Строим прямоугольный треугольник по катету $CE$ и гипотенузе $CF$ (I, 2 и III, 1). Угол, противолежащий катету $CE$, равен $\frac{\pi}{6}$. Строим затем прямоугольный треугольник по гипотенузе $CE$ и острому углу $\frac{\pi}{6}$ (III, 1 и I, 8). Противолежащий этому углу катет равен $\frac{CM}{2}$. Удвоив этот отрезок (I, 1), получим $CM$. Строим $k(B, CM)$ и $k_1(C, CM)$. Одна из двух точек $M$ и $N$ пересечения этих окружностей и будет искомой точкой орицикла, лежащей на оси $AA'$. Это будет та точка (на чертеже точка $M$), которая лежит относительно второй точки ($N$) в сторону, противоположную направлению оси $AA'$.



Фиг. 14

Итак, мы показали, что с помощью комплекса инструментов [ц-г] можно решить все главные задачи III, 1—9. Так как к решению этих главных задач, в конечном счете, сводится решение всех задач на построение второй степени в плоскости Лобачевского, то этим самым доказано, что решение любой задачи на построение второй степени в плоскости Лобачевского может быть выполнено с помощью только двух инструментов — циркуля и гиперциркуля. Следовательно, участие орициркуля в построениях Маскерони на плоскости Лобачевского не обязательно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смогоржевський О. С. — Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в просторі Лобачевського з допомогою циркуля, гороциркуля і гіперциркуля. Матем. збірник Київського держ. університету, 2, 1948.

2. Смогоржевський О. С. — Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського, Київ, 1949.

3. Смогоржевский А. С. — Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.-Л., 1951.

4. Несторович Н. М. — Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.-Л., 1951.