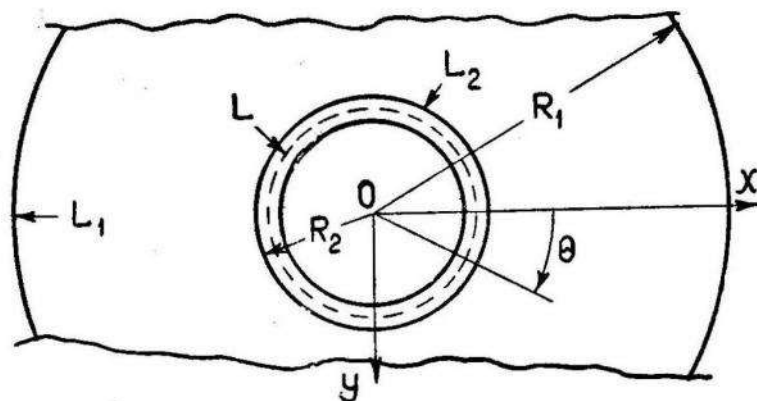


Н. П. ФЛЕЙШМАН

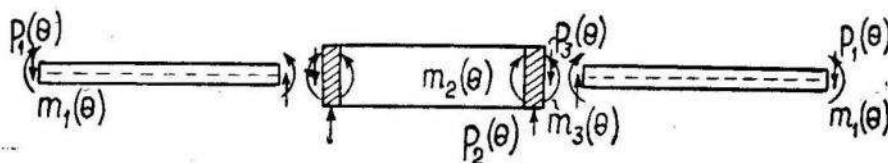
ИЗГИБ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

§ 1. *Постановка задачи. Метод решения.* Рассмотрим кольцеобразную тонкую изотропную плиту (фиг. 1), область которой ограничена концентрическими окружностями L_1 и L_2 с радиусами R_1 и R_2 .



Фиг. 1

На контуре L_1 действуют усилия $p_1(\theta) = N_n^{(1)} + \frac{\partial H_{nt}^{(1)}}{\partial s}$ и моменты $m_1(\theta) = M_n^{(1)}$, а контур L_2 подкреплён впаиванным упругим кольцом постоянного поперечного сечения из другого материала. Осевую линию кольца обозначим через L , а её радиус через R . Вдоль своей осевой линии кольцо нагружено внешними изгибающими моментами $m_2(\theta)$ и нормальными к плоскости кольца усилиями $p_2(\theta)$ (фиг. 2).¹



Фиг. 2

Оси координат $хоу$ и (r, θ) в срединной плоскости плиты направим так, как указано на фиг. 1. Ось $оз$ направим вниз.

Считая, что в срединной плоскости размер сечения подкрепляющего кольца мал по сравнению с радиусом R_2 плиты, рассмотрим условия спая между плитой и кольцом не по контуру L_2 , а по осевой линии кольца L . Кроме того, примем кольцо за тонкий упругий стержень, деформации которого описываются уравнениями малых деформаций тонких криволинейных стержней.

¹ Случай симметричного нагружения плиты поперечной нагрузкой рассмотрен в работах [1] и [2].

Для рассматриваемого случая условия на границе плиты записываются так:

1. На контуре [3] L_1 , т. е. при $r = R_1$,

$$n\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + iC_1z + C_2, \quad (1.1)$$

где $n = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$, C_1 — действительная, а C_2 — комплексная постоянные,

$$f_1 + if_2 = \frac{R_1}{2D(1-\nu)} \int_0^\theta [im_1(\theta) - R_1 \int_0^\theta p_1(\theta) d\theta] e^{i\theta} d\theta \quad (1.2)$$

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость плиты, h — толщина плиты, E и ν — упругие постоянные её материала.

2. На контуре L , т. е. при $r = R$, имеем¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= -\gamma_1(\theta), \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \gamma_2(\theta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\gamma_1(\theta)$ — угол закручивания кольца, т. е. угол поворота радиально-го сечения кольца вокруг касательной к контуру L ; $\gamma_2(\theta)$ — угол изгиба, т. е. угол поворота касательной к осевой линии кольца вокруг нормали к контуру L в данной точке; s — дуга контура L , w — прогиб срединной плоскости плиты.

Очевидно, что условие (1.3) выражает равенство углов поворота радиальных и касательных сечений кольца и плиты в точках контура L .

Учитывая, что

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (1.4)$$

и что на контуре L

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial x}{\partial s} = \sin \theta, \quad (1.5)$$

составим следующую комплексную комбинацию:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + i \frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2 \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] e^{-i\theta}.$$

Таким образом, граничные условия (1.3) примут вид

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = g_1^* + i g_2^*, \quad (1.6)$$

где

$$g_1^* + i g_2^* = -\frac{1}{2} \left[\gamma_1(\theta) - i \gamma_2(\theta) \right] e^{i\theta} \quad (1.7)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в нашем случае имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{iP_z}{8D} \cdot z + \frac{M_x^* + iM_y^*}{8D} \right] \ln z + \varphi_1(z) \\ \psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} \ln z + \psi_1(z), \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹ За положительное направление отсчета углов $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ принято направление против часовой стрелки.

где P_z — главный вектор, а M_x^* и M_y^* — составляющие по осям ox и oy главного момента усилий, действующих со стороны кольца на плиту вдоль контура L . Эти величины известны, поскольку они равны соответственно главному вектору и составляющим главного момента заданных внешних усилий $m_2(\theta)$ и $p_2(\theta)$. $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — однозначные регулярные функции, которые могут быть представлены в области плиты в виде рядов Лорана

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot \frac{z^k}{R^k}, \quad \psi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cdot \frac{z^k}{R^k}. \quad (1.9)$$

В силу известного произвола в определении функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем считать, что $\alpha_0 = 0$, а β_1 — действительное число. Из условия однозначности прогибов плиты следует, что α_{-1} также вещественный коэффициент.

Учитывая (1.8), перепишем граничные условия (1.1) и (1.6) в виде

$$n\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1^0 + if_2^0 + iC_1z + C_2 \text{ на } L_1 \quad (1.10)$$

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = g_1^0 + ig_2^0 \text{ на } L, \quad (1.11)$$

где, полагая $\sigma = e^{i\theta}$, имеем:

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 = & f_1 + if_2 + \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{iR_1P_z}{2(1-\nu)D} \sigma + \frac{M_x^* + iM_y^*}{2(1-\nu)D} \right] \ln \sigma + \\ & + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln R_1 + \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} \sigma^2 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R_1P_z}{8D} \left[\frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln R_1 - 1 \right] \sigma; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} g_1^0 + ig_2^0 = & g_1^* + ig_2^* - \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln R - \\ & - \frac{RP_z}{16\pi D} (2 \ln R + 1) \sigma + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} \sigma^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Представим теперь периодические в интервале $(0, 2\pi)$ функции¹ (1.12) и (1.13) в виде комплексных рядов Фурье

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \sigma^k \\ g_1^0 + ig_2^0 = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k \sigma^k \end{aligned} \quad (1.14)$$

¹ Доказательство периодичности функции (1.12) имеется в работе [3], периодичность функции (1.13) очевидна.

Коэффициенты $F_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1^0 + i f_2^0) e^{-ik\theta} d\theta$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) известны, а коэффициенты g_k определяются дальше из решения задачи о малых деформациях тонкого подкрепляющего кольца.

Предполагая, что ряды функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1.9) сходятся не только между, но и на контурах L и L_1 и подставляя их в граничные условия (1.10) и (1.11) с учетом разложения (1.14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} [n\eta^k \beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} \eta^{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k} \eta^{-k}] \sigma^k = \\ = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_k \sigma^k + i C_1 R_1 \sigma + C_2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [\beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k}] \sigma^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_k \sigma^k, \quad \left(\eta = \frac{R_1}{R} \right).$$

Сравнивая коэффициенты при σ в первом уравнении (1.15) и учитывая, что β_1 и α_{-1} вещественные коэффициенты, получим что $C_1=0$, так как

$$F_1 = - \frac{R_1}{4(1-\nu)\pi D} \left[\left(\frac{3+\nu}{4} + \frac{1+\nu}{2} \ln R_1 \right) R_1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} m_1(\theta) d\theta \right] \quad (1.16)$$

также вещественное число.

Сравнивая дальше коэффициенты при σ^k ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) в уравнениях (1.15), получим

$$\begin{aligned} n\eta^k \beta_k - (k-2) \eta^{-(k-2)} \bar{\beta}_{-(k-2)} + \eta^{-k} \bar{\alpha}_{-k} = F_k, \\ \beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k} = g_k. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Коэффициент β_0 определится при сравнении членов не зависящих от σ во втором уравнении (1.15).

Для решения системы (1.17) нам еще нужно определить g_k — коэффициенты разложения функции $g_1^0 + i g_2^0$ (1.14). Для этого, учитывая (1.13) и (1.7), необходимо выразить деформации $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ кольца, находящегося под совместным действием внешней нагрузки $m_2(\theta)$ и $p_2(\theta)$ и внутренних усилий, действующих со стороны плиты. Со стороны плиты на кольцо действуют изгибающие моменты $m_3(\theta)$ и перерезывающие силы $p_3(\theta)$ (фиг. 2), которые выражаются по формулам [1]:

$$\begin{aligned} m_3(\theta) = (M_r)_{r=R} = -2D \operatorname{Re} \{ 2(1+\nu) \varphi'(z) + \\ + (1-\nu) e^{2i\theta} [\psi'(z) + \bar{z} \psi''(z)] \}_{r=R} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} p_3(\theta) = \left(N_r + \frac{\partial H r \theta}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{R} \right)_{r=R} = \frac{2D}{R} \operatorname{Re} \left\{ (1-\nu) z^2 \varphi'''(z) - \right. \\ \left. - (\nu+3) z \varphi''(z) + e^{2i\theta} (1-\nu) [2\psi'(z) + z \psi''(z)] \right\}_{r=R}. \end{aligned}$$

После подстановки в (1.18) соответствующих производных от функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (1.8) с учётом (1.9) получим

$$m_3(\theta) = \frac{D}{R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k' \sigma^k, \quad (1.19)$$

$$p_3(\theta) = \frac{D}{R^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k' \sigma^k,$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_0' &= -2 \left[2(1+\nu)\beta_1 - (1-\nu)\alpha_{-1} \right] - \frac{RP_z}{8\pi D} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu)\ln R \right], \\ m_1' &= -2 \left[(3+\nu)\beta_2 - (1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} \right] - \frac{1+\nu}{8\pi D} (M_y^* + iM_x^*), \\ m_k' &= -(k+1)[2(1+\nu) + k(1-\nu)]\beta_{k+1} - (1-\nu)(k-1)\alpha_{k-1} + \\ &+ (k-1)[2(1+\nu) - k(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(k-1)} + (k+1)(1-\nu)\bar{\alpha}_{-(k+1)}, \\ &\text{при } (k=2, 3, \dots) \\ m_{-k}' &= \bar{m}_k' \text{ при } (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0' &= -\frac{RP_z}{2\pi D}, \\ p_1' &= \frac{3-\nu}{8\pi D} (M_y^* + iM_x^*) + 2[(1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} - (3+\nu)\beta_2], \\ p_k' &= k(k+1)[(k-1)(1-\nu) - (3+\nu)]\beta_{k+1} + k(k-1)(1-\nu)\alpha_{k-1} - \\ &- k(k-1)[(3+\nu) + (k+1)(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(k-1)} + (k+1)(1-\nu)k\bar{\alpha}_{-(k+1)}, \\ &\text{при } (k=2, 3, 4, \dots) \\ p_{-k}' &= \bar{p}_k' \text{ при } (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Предполагая теперь возможность разложения внешних усилий $p_2(\theta)$ и $m_2(\theta)$ в комплексные ряды Фурье, представим их в виде¹⁾

$$\left. \begin{aligned} m_2(\theta) &= \frac{D}{R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k \sigma^k \\ p_2(\theta) &= \frac{D}{R^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k \sigma^k \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

¹⁾ При этом силы $p_2(\theta)$ уже приведены к средней линии кольца.

где M_k и P_k — известные коэффициенты, а именно:

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{R}{2\pi D} \int_0^{2\pi} m_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \\ P_k &= \frac{R^2}{2\pi D} \int_0^{2\pi} p_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким образом, полная нагрузка, действующая на кольцо по его осевой линии, имеет вид

$$\begin{aligned} m(\theta) &= m_3(\theta) - m_2(\theta) = \frac{D}{R} \sum_{-\infty}^{+\infty} m_k \sigma^k, \\ p(\theta) &= p_3(\theta) - p_2(\theta) = \frac{D}{R_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k \sigma^k, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$m_k = m'_k - M_k, \quad p_k = p'_k - P_k \quad (1.25)$$

Для равновесия кольца необходимо выполнение следующих условий:

$$p_0 = 0, \quad m_1 = p_1, \quad m_{-1} = p_{-1} \quad (1.26)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что они действительно автоматически выполняются.

Зная полную нагрузку (1.24) кольца, можно выразить его деформации $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta) &= DR \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \sigma^k, \\ \gamma_2(\theta) &= DR \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \sigma^k, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{m_0}{A}; \quad a_1 = \frac{m_1}{A+C}; \quad a_{-1} = \frac{m_{-1}}{A+C}; \\ b_0 &= b_1 = b_{-1} = 0; \quad a_{-k} = \bar{a}_k; \quad b_{-k} = \bar{b}_k; \\ a_k &= -\frac{1}{(k^2-1)^2} \left[p_k \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \right) - m_k \left(\frac{1}{A} + \frac{k^2}{C} \right) \right], \\ b_k &= \frac{i}{k(k^2-1)^2} \left[p_k \left(\frac{k^2}{A} + \frac{1}{C} \right) - k^2 m_k \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \right) \right], \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$A = E_1 J_1$ — жесткость кольца на изгиб; $C = G_1 J_k$ — жесткость кольца на кручение; E_1 и G_1 соответственно модуль Юнга и модуль сдвига материала кольца; J_1 — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно главной оси, лежащей в плоскости кольца; J_k — величина, имеющая специальное выражение для каждого вида поперечного сечения, известное из теории кручения.

Формулы (1.27) и (1.28) представляют собой решение задачи о малых деформациях тонкого кругового кольца под действием нагрузок (1.24). Это решение нетрудно получить методом операционного исчисления [4].

Учитывая выражения для $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ (1.27), подставим (1.7) в (1.13) и получим коэффициенты разложения функции (1.14), т. е. правые части второго уравнения (1.17), в виде:

$$\begin{aligned} g_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + i M_y^*}{4D} \ln R - \frac{m_{-1}}{2(\delta_1 + \delta_2)}, \\ g_1 &= -\frac{m_0}{2\delta_1} - \frac{R P_z}{16\pi D} (1 + 2 \ln R), \\ g_2 &= -\frac{m_1}{2(\delta_1 + \delta_2)} + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - i M_y^*}{8D}, \\ g_{k+1} &= \frac{1}{2k(k+1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} - (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ \bar{g}_{-(k-1)} &= -\frac{1}{2k(k-1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} + (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.29)$$

где:

$$\delta_1 = \frac{A}{RD}, \quad \delta_2 = \frac{C}{RD} \quad (1.30)$$

— относительные жесткости кольца на изгиб и кручение.

Входящие в (1.29) числа m_k и p_k определены выражениями (1.25), (1.23), (1.21), (1.20).

Если теперь в системе (1.17) k принимает значения $k+1$ и $-k+1$, ($k=0, 1, 2, 3, \dots$), получаем [после перехода к сопряженным значениям в последних двух уравнениях, соответствующих значению $(-k+1)$] следующие четыре уравнения, из которых определяются неизвестные коэффициенты β_{k+1} , $\bar{\beta}_{-(k-1)}$, $\alpha_{-(k+1)}$, α_{k-1} :

$$\begin{aligned} n\eta^{k+1} \beta_{k+1} - (k-1) \eta^{-(k-1)} \bar{\beta}_{-(k-1)} + \eta^{-(k+1)} \bar{\alpha}_{-(k+1)} &= F_{k+1}, \\ \beta_{k+1} - (k-1) \bar{\beta}_{-(k-1)} + \bar{\alpha}_{-(k+1)} &= g_{k+1}, \\ (k+1) \eta^{k+1} \beta_{k+1} + n\eta^{-(k-1)} \bar{\beta}_{-(k-1)} + \eta^{k-1} \alpha_{k-1} &= \bar{F}_{-(k-1)}, \\ (k+1) \beta_{k+1} + \bar{\beta}_{-(k-1)} + \alpha_{k-1} &= \bar{g}_{-(k-1)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отметим, что при $k=0$ последние два уравнения системы (1.31) совпадают с первыми, а их определитель

$$\Delta_0 = -\frac{2}{\delta_1(1-\nu)\eta} \left\{ (\eta^2-1)(1-\nu^2) + \delta_1[(1+\nu)\eta^2 + (1-\nu)] \right\} \quad (1.32)$$

отличен от нуля и, следовательно, из них однозначно определяются коэффициенты β_1 и α_{-1} .

При $k=1$ из первых двух уравнений (1.31) определитель которых имеет вид

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\eta^2(1-\nu)(\delta_1+\delta_2)} \left\{ (3+\nu)(1-\nu)(\eta^4+1) + \right. \\ \left. + [(1-\nu) + (3+\nu)\eta^4](\delta_1+\delta_2) \right\} \quad (1.33)$$

и также отличен от нуля, определяются коэффициенты β_2 и α_{-2} . Зная β_2 и α_{-2} , находим β_0 из четвертого уравнения (как мы уже указали выше). Третье уравнение (1.31) при $k=1$ удовлетворяется автоматически в силу того, что к его правой части нужно добавить произвольную постоянную C_2 (см. первое уравнение (1.15)).

Остается показать, что полученная система (1.31) всегда разрешима и при $k \geq 2$. Для этого заметим, что при конкретном решении этой системы можно выразить $\alpha_{-(k+1)}$ и α_{k-1} из первого и третьего уравнений и подставить их в оставшиеся уравнения. Таким образом получим систему двух уравнений с двумя неизвестными β_{k+1} и $\beta_{-(k-1)}$, определитель которой будет

$$\Delta_k = \frac{1}{2(k^2-1)} \left[A^{(k)} + B^{(k)} \frac{1}{\delta_1} + C^{(k)} \frac{1}{\delta_2} + D^{(k)} \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{1}{\delta_2} \right], \quad (1.34)$$

где

$$A^{(k)} = 2(k^2-1) \left\{ (k^2-1)(\eta^2-1)^2 + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \eta^{2(k+1)} \right] \left[1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \eta^{-2(k-1)} \right] \right\} > 0$$

$$B^{(k)} = \frac{2(3+\nu)}{1-\nu} \left[(2k+1+\nu)\eta^{2(k+1)} - (2k-1-\nu)\eta^{-2(k-1)} - \right.$$

$$\left. - (3+\nu)\eta^4 \right] + 2k^2(3+\nu) - 2\eta^2(k^2-1) \left[\eta^2(1-\nu) + 2(1+\nu) \right] > 0$$

$$C^{(k)} = \frac{2(3+\nu)}{1-\nu} \left[(2k+1+\nu)\eta^{2(k+1)} - (2k-1-\nu)\eta^{-2(k-1)} - (3+\nu)\eta^4 \right] -$$

$$- 2\eta^4(k^2-1)(1-\nu) + 4(k^2-1)(3-\nu)\eta^2 - 2(5-\nu)k^2 + 16 > 0,$$

$$D^{(k)} = 2(3+\nu)^2(\eta^{2(k+1)}-1)(1-\eta^{-2(k-1)}) -$$

$$- 2(k^2-1)(1-\nu)^2(\eta^2-1)^2 > 0$$

Следовательно, доказано, что система (1.31) однозначно определяет коэффициенты α_k и β_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1.9) и поставленная задача полностью решена.

Ряды (1.9) сходятся в кольце (включая контуры) абсолютно и равномерно, если $p_1(\theta)$ и $p_2(\theta)$ удовлетворяют условию Дирихле, а $m_1(\theta)$

и $m_2(\theta)$ непрерывны и имеют первую производную, удовлетворяющую условию Дирихле.

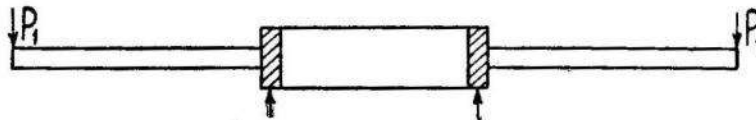
Если в полученном решении заменим везде R_1 на R и наоборот, получим автоматически решение аналогичной задачи о напряжениях в кольцеобразной плите, нагруженной усилиями $p_1(\theta)$ и моментами $m_1(\theta)$ по внутреннему контуру и подкрепленной кольцом по внешнему. Не представляет также принципиально никакого труда получить решение задачи о напряжениях в кольцеобразной плите, подкрепленной тонкими кольцами как по внутреннему, так и по внешнему контурам.

Из решения задачи для кольцеобразной плиты можно получить решение задачи о напряжениях в бесконечной плите с подкрепленным круговым отверстием. Для этого необходимо:

1. Принять за F_k коэффициенты, соответствующие напряженному состоянию на бесконечности в плите неослабленной отверстием.

2. Перейти к пределу при $\eta = R_1/R \rightarrow \infty$.

§ 2. *Изгиб кольцевой плиты перерезывающими силами.* Кольцевая плита нагружена по внешнему краю равномерно распределенными усилиями $p_1 = \text{const}$. Внутренний край заделан упругим кольцом и свободно оперт (фиг. 3).



Фиг. 3

Из (1.16), (1.29), (1.20) и (1.21) получим:

$$F_1 = -\frac{p_1 R_1^2}{8(1-\nu)D} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu) \ln R_1 \right]$$

$$P_z = -2\pi p_1 R_1,$$

$$g_1 = \frac{1}{\delta_1} \left[2(1+\nu)\beta_1 - (1-\nu)\alpha_{-1} \right] -$$

$$-\frac{p_1 \eta R^2}{8\delta_1 D} \left[2(1+\nu-\delta_1) \ln R + (3+\nu-\delta_1) \right]$$

При $k=0$ из системы (1.31) определяем

$$\alpha_{-1} = \frac{p_1 R_1^2 \eta}{4D\Delta^*} \left[(1+\nu)(1+\nu-\delta_1) \ln \eta - \delta_1 \right]$$

$$\beta_1 = \frac{p_1 R^2 \eta}{16D\Delta^*} \left\{ \eta^2 (1-\nu+\delta_1) \left[2(1+\nu) \ln R_1 + (3+\nu) \right] - \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[2(1+\nu-\delta_1) \ln R + (3+\nu-\delta_1) \right] \right\}, \quad (2.1)$$

где Δ^* определено выражением

$$\Delta^* = (\eta^2 - 1)(1-\nu^2) + \delta_1 \left[(1+\nu)\eta^2 + (1-\nu) \right]$$

Все остальные коэффициенты α_k и β_k равны нулю.

Учитывая (1.8) запишем функции напряжений плиты в виде

$$\varphi(z) = -\frac{R_1 p_1}{8D} z \ln z + \beta_1 \frac{z}{R}, \quad (2.2)$$

$$\psi(z) = \alpha_{-1} \frac{R}{z}$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы в плите будут:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{2D}{R} \left[2(1+\nu) \beta_1 - (1-\nu) \alpha_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + \frac{R_1 p_1}{4} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu) \ln r \right], \\ M_\theta &= -\frac{2D}{R} \left[2(1+\nu) \beta_1 + (1-\nu) \alpha_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + \frac{R_1 p_1}{4} \left[(1+3\nu) + 2(1+\nu) \ln r \right], \\ N_\theta &= H_{r\theta} = 0, \quad N_r = \frac{R_1 p_1}{r} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив коэффициенты (2.1) в (2.3), получим:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{p_1 R_1}{2\Delta^*} \left\{ \delta_1 (1-\nu) \left(1 - \eta^2 \frac{R^2}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad + (1+\nu) \left[\eta^2 (1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \right] \ln \frac{r}{R} - \\ &\quad \left. - \eta^2 (1+\nu) \left[(1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \frac{R^2}{r^2} \right] \ln \eta \right\}, \\ M_\theta &= \frac{p_1 R_1}{2\Delta^*} \left\{ \nu \delta_1 (1-\nu) (1-\eta^2) + \right. \\ &\quad + (1+\nu) \left[\eta^2 (1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \right] \ln \frac{r}{R} - \\ &\quad - \eta^2 (1+\nu) \left[(1+\nu) (1-\nu+\delta_1) + (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \frac{R^2}{r^2} \right] \ln \eta - \\ &\quad \left. - (1+\nu) (1-\nu)^2 (\eta^2 - 1) - \eta^2 \delta_1 (1-\nu) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right\}, \\ N_r &= \frac{p_1 R_1}{r}, \quad N_\theta = H_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая в (2.4) $\delta_1 = 0$, получим известное решение для случая неподкрепленной плиты [3]. Если же перейдем к пределу при $\delta_1 \rightarrow \infty$, получим решение задачи о напряжениях в кольцевой плите с жестко заштыленным внутренним контуром.

Для определения оптимального значения относительной жесткости кольца на изгиб δ_1 , которому соответствует минимальное значение расчетного изгибающего момента в плите, заметим, что в рассматриваемой задаче выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \text{при } \delta_1 = 0 \quad M_r &\leq 0 \\ \text{при } \delta_1 \rightarrow \infty \quad M_\theta &< 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial \delta_1} &> 0, \quad \frac{\partial M_r}{\partial \delta_1} < 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial r} &> 0 \quad \text{при } \delta_1 \leq 1 + \nu \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &> 0 \quad \text{при } \delta_1 \geq 1 + \nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

при любых значениях $\eta > 1$ и при $R \leq r \leq R_1$.

Кроме того, легко показать, что для $\delta_1 = 1 + \nu$ при $r = R$ имеет место равенство:

$$M_r = M_\theta = -\frac{p_1 R_1}{4 \eta^2} \left[2(1 + \nu) \eta^2 \ln \eta + (1 - \nu) (\eta^2 - 1) \right] \quad (2.6)$$

На основании (2.5) и (2.6) заключаем, что оптимальным значением δ_1 будет ¹⁾

$$\delta_1^{(opt)} = 1 + \nu \quad (2.7)$$

Расчетным изгибающим моментом в плите при $\delta_1 = 1 + \nu$ будет

$$M_{max} = (M_r)_{r=R} = (M_\theta)_{r=R},$$

определяемый формулой (2.6). Если же $\delta_1 \neq 1 + \nu$, то в силу неравенств (2.5) заключаем, что при $\delta_1 < 1 + \nu$ расчетным моментом будет $M_{max} = (M_\theta)_{r=R}$, а при $\delta_1 > 1 + \nu$ $M_{max} = (M_r)_{r=R}$.

В таблице 1 приведены значения величины $\sigma_{max} / \frac{2\pi p_1 R_1}{h^2}$ для некоторых значений $\eta = R_1 / R$ при $\nu = 0,3$ и при $0 \leq \delta_1 \leq \infty$.

Отношение чисел первой и третьей строк таблицы 1 выражается формулой:

$$k = \frac{(\sigma_{max})_{\delta_1=0}}{(\sigma_{max})_{\delta_1=1+\nu}} = \frac{2 \eta^2}{\eta^2 - 1} \quad (2.8)$$

¹ Способ подбора оптимального кольца с жесткостью (2.7) указан в работе [5].

Таблица 1

$\delta_1 \backslash \eta$	1,25	1,5	2	3	4	5
0	1,100	1,24	1,48	1,87	2,17	2,41
1	0,231	0,395	0,623	0,919	1,12	1,27
1,3	0,194	0,345	0,556	0,830	1,02	1,16
2	0,208	0,370	0,612	0,932	1,15	1,31
5	0,219	0,402	0,689	1,08	1,34	1,54
10	0,223	0,415	0,720	1,14	1,42	1,64
∞	0,227	0,428	0,753	1,20	1,51	1,75

Формула (2.8) показывает, что путем подкрепления края плиты оптимальным кольцом расчетные напряжения уменьшаются тем больше, чем больше размер отверстия в плите. При неограниченном увеличении размера внешнего диаметра плиты отношение (2.8) стремится к двум.

В заключение автор выражает благодарность профессору Г. Н. Савину за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, гл. 6 — 7, 1951.
2. Савин Г. Н. и Флейшман Н. П. Приближенное решение задачи изгиба кольцевой круглой плиты с подкрепленным краем. Инженерный сборник Института механики АН СССР, том VIII, 1950.
3. Фридман М. М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит. Прикладная математика и механика, том V, в. I, 1941.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. ГИТТЛ, § 20, 1951.
5. Флейшман Н. П. Приближенное решение одной контактной в смысле Г. Н. Савина задачи теории упругости. ДАН УССР, № 2, 1949.