Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXII Серия физико-математическая, выпуск 5 1953

В. С. МИЛИЯНЧУК

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Линейная электродинамика с высшими производными дает статический потенциал, зависящий от e^{-ar}, например [1]

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{r}\left(1 - e^{-ar}\right),$$

где e_0 обозначает элементарный заряд и a постоянную. Вид добавочного потенциала в этой схеме аналогичен виду потенциала Юкава. Если пользоваться аналогиями, то было бы интересно исследовать также случай некоторой аналогии с теорией позитронов. Вероятность возникновения пары электрон-позитрон в постоянном электрическом поле $\vec{E}$ равна $e^{-\frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}_0|}}$ [2], где $\vec{E}_0$ „критическое" поле. Если эту форму зависимости вероятности возникновения пары перенести на поле Кулона заряженной частицы t [2], то для вероятности возникновения пары получим величину $e^{-a^2r^2}$, где a — постоянная, а r — расстояние от частицы. Так как для реального возникновения пары электрон-позитрон необходимо соблюдение законов сохранения энергии и импульса, то в случае, если эти законы не соблюдаются, возникают виртуальные пары, т. е. получается поляризация вакуума, что проявляется в возникновении неисчезающей в среднем плотности заряда и изменении электрического поля. В связи с этим целесообразно построение обобщенной электродинамики, в которой, аналогично результатам теории позитронов, статический потенциал зависит от $e^{-a^2r^2}$. Решение этой задачи является иредметом настоящей работы.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ЛИНЕЙНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В электродинамике Максвелла электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ ($\varphi_{1,2,3,} = A_x, A_y, A_z$; $\varphi_4 = i\varphi$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\Box\, \varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x), \tag{1}$$

где $\Box$ обозначает четырехмерный оператор Лапласа и $s_\mu(x)$

($s_{1,2,3} = i_x, i_y, i_z$; $s_4 = ic\rho$)—четырехмерную плотность тока. Электромагнитные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца:

$$\frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{2}$$

Вместо дифференциальных уравнений (1) можно рассматривать интегральные уравнения для электромагнитных потенциалов:

$$\int K(x-x)' \varphi_\mu(x') (dx') = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x), \tag{3}$$

ядро которого связано с функцией Грина дифференциальных уравнений (1) $G(x-x')$ соотношением:

$$\int K(x-x'') G(x''-x') (dx'') = \delta(x-x')$$

При этом $(dx) = dx\,dy\,dz\,dt$. В электродинамике Максвелла:

$$K(x-x') = \Box\, \delta(x-x') \tag{4}$$

В действительности, подставляя (4) в (3), путем интегрирования по частям получаем (1). Принимая

$$K(x-x') = \Box\, (1 - \frac{1}{a^2} \Box)\, \delta(x-x'),$$

получаем уравнения потенциалов электродинамики с высшими производными

$$\Box \left(1 - \frac{1}{a^2} \Box\right) \varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

Обобщения электродинамики получаются обычно через обобщения функции Лагранжа. Таким способом получена электродинамика с высшими производными и нелинейная электродинамика. Однако можно получить обобщенную электродинамику, принимая также соответствующее ядро интегральных уравнений (3). В общем случае, конечно, интегральные уравнения (2) невозможно привести к дифференциальным уравнениям. Приводимый здесь способ обобщения электродинамики будем применять в дальнейшем. Очевидно, полученная таким способом обобщенная электродинамика согласно (3) будет линейной.

Обозначим через $f_{\mu\nu}(x)$ тензор напряжений электромагнитного поля

$$f_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial f_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu(x)}{\partial x_\nu} \tag{5}$$

В общем случае компоненты тензора напряжений будут являться решениями системы интегральных уравнений

$$\int \varepsilon(x-x') \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} (dx') = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \tag{6}$$

Для определения соотношения между ядрами уравнений (6) и (3)

$\varepsilon(x-x')$ и $K(x-x')$ предположим, что электромагнитные потенциалы $f_\mu(x)$ обобщенной электродинамики удовлетворяют условию Лоренца (2). Тогда, принимая во внимание (5), путем интегрирования по частям получаем из (6):

$$\int \Box\, \varepsilon(x-x')\, \varphi_\mu(x')\,(dx') = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \tag{7}$$

Из уравнения (7) и (2) следует, что

$$K(x-x') = \Box\, \varepsilon(x-x') \tag{8}$$

Обобщения электродинамики построены по общей схеме *Ми*, вводят для вакуума два тензора поля: тензор напряжений $f_{\mu\nu}$ и тензор смещений $F_{\mu\nu}$, подобно тому как электродинамика Максвелла вводит эти два тензора для диэлектрика. Тензор напряжений в таких обобщениях электродинамики выражается через электромагнитные потенциалы согласно (5) и удовлетворяет обобщенным уравнениям, нулевым приближениям которых являются уравнения Максвелла. Тензор смещений удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

и в общем случае не выражается через потенциалы. В электродинамике Максвелла в случае вакуума тензор напряжений и тензор смещений совпадают.

Связь между тензором смещений и тензором напряжений в обобщенной электродинамике получается из функции Лагранжа L:

$$F_{\mu\nu} = 8\pi \frac{\partial L}{\partial f_{\mu\nu}}$$

Случай линейной обобщенной электродинамики можно получить также из уравнения (6). Так как

$$\frac{\partial \varepsilon(x-x')}{\partial x'_\nu} = -\frac{\partial \varepsilon(x-x')}{\partial x_\nu}, \tag{9}$$

то, применяя интегрирование по частям уравнения (6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\int \varepsilon(x-x')\, f_{\mu\nu}(x')\,(dx') = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

Таким образом, тензор (10)

$$F_{\mu\nu} = \int \varepsilon(x-x')\, f_{\mu\nu}(x')\,(dx')$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \tag{11}$$

и является тензором смещений. Очевидно, в электродинамике Максвелла согласно (8) и (4) $\varepsilon(x-x')=\delta(x-x')$, поэтому в вакууме $F_{\mu\nu}(x)=f_{\mu\nu}(x)$.

Используя (8) и (9), уравнение (7) можно записать в виде

$$\Box\int\varepsilon(x-x')\,\varphi_\mu(x')\,(dx')=-\frac{4\pi}{c}s_\mu(x) \tag{7a}$$

Так как электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ удовлетворяют условию Лоренца (2), то четырехмерный вектор

$$\Phi_\mu(x)=\int\varepsilon(x-x')\,\varphi_\mu(x')\,(dx') \tag{12}$$

тоже удовлетворяет условию Лоренца и уравнениям потенциалов электродинамики Максвелла:

$$\Box\,\Phi_\mu(x)=-\frac{4\pi}{c}s_\mu(x)$$

Из (12) и (10) следует, что

$$\frac{\partial\Phi_\nu(x)}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\Phi_\mu(x)}{\partial x_\nu}=F_{\mu\nu}(x) \tag{13}$$

Таким образом, в линейной обобщенной электродинамике для тензора смещений получаем полную систему уравнений Максвелла (11) и (13).

Уравнение (6) можно получить из функции действия

$$f=-\frac{1}{16\pi}\int f_{\mu\nu}(x)\,\varepsilon(x-x')\,f_{\mu\nu}(x')\,(dx)\,(dx')+\frac{1}{c}\int s_\mu(x)\,\varphi_\mu^*(x)\,(dx)$$

При этом необходимо предположить, что $\varepsilon(x-x')=\varepsilon(x'-x)$.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ПРИ ЗАДАННОМ СТАТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Обобщения электродинамики получаются обычно путем релятивистско-инвариантного обобщения функции Лагранжа. В линейной электродинамике возможен, однако, не менее общий и не менее интересный другой подход, сводящийся к решению следующей задачи: принимая определенный статический потенциал, построить линейную обобщенную электродинамику, дающую в случае покоящегося электрона принятый потенциал. При обобщении функции Лагранжа выбор этой функции ограничен такими только самыми общими требованиями, как релятивистская инвариантность функции Лагранжа, градиентная инвариантность и требование, чтобы уравнения электродинамики Максвелла являлись нулевым приближением обобщенных уравнений; помимо этих требований, выбор функции Лагранжа является произвольным. При другом подходе необходимо требовать, чтобы статический потенциал на больших расстояниях от электрона, создающего поле, совпадал согласно эксперименту с потенциалом Кулона. Помимо этого требования, выбор статического потенциала является произвольным. В случае зависимости статического потенциала от $e^{-a^2r^2}$ представляет интерес в первую очередь вид уравнений поля, а не уравнения поля для частного случая.

Начнем с решения следующей задачи в общем виде: найти уравнения поля, дающие в случае покоящейся заряженной точечной частицы определенный потенциал. Подобная задача решалась в работе [3] путем вычисления функции Грина уравнений электромагнитных потенциалов. Однако решение соответствующего интегрального уравнения возможно только в редких случаях. Поэтому мы используем представление уравнений электромагнитных потенциалов в виде (3). Тогда задача сводится к вычислению ядра интегральных уравнений (2) $K(x-x')$ при заданном статическом потенциале. Для частных вычислений удобно представить δ-функцию, ядро интегральных уравнений (3) $K(x-x')$ и электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ в виде интегралов Фурье:

$$\delta(x-x') = \frac{c}{(2\pi)^4}\int e^{i[(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}')-ck_0(t-t')]}(dk), \tag{14а}$$

$$K(x-x') = \frac{c}{(2\pi)^4}\int A(k^2-k_0^2)\, e^{i[(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}')-ck_0(t-t')]}(dk), \tag{14б}$$

$$\varphi_\mu(x) = \frac{c}{(2\pi)^4}\int F_\mu(k^2-k_0^2)\, e^{i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]}(dk), \tag{14в}$$

где $(dk) = dk_x\, dk_y\, dk_z\, dk_0$ и $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Подставляя (14б) и (14в) в (3) и принимая во внимание (14а), получаем:

$$A(k^2-k_0^2)\; F_\mu(k^2-k_0^2) = -\frac{4\pi}{c}\int s_\mu(x)\, e^{-i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]}(dk) \tag{15}$$

Рассмотрим точечный заряд e_0, покоящийся в начале системы координат. Пусть статический потенциал точечного заряда будет $\varphi(r)$. Тогда

$$s_i(x) = 0 \quad (i=1,2,3); \qquad s_4(x) = ic\,\delta(\vec{r}) \tag{16}$$

Из (14в) получаем

$$F_4(k^2-k_0^2) = \frac{8\pi^2 i}{ck}\delta(k_0)\int_0^\infty r\varphi(r)\sin kr\,dr \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (15) и интегрируя по k_0, вычисляем

$$A(k^2) = -\frac{c_0 k}{\int_0^\infty r\varphi(r)\sin kr\,dr} \tag{18}$$

Это дает возможность вычислить амплитуды Фурье ядра интегральных уравнений (3) $K(x-x')$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЗАВИСИМОСТИ СТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ОТ $e^{-a^2r^2}$

Переходя к определению вида уравнений поля для случая, когда статический потенциал зависит от $e^{-a^2r^2}$, возьмем наиболее простой потенциал:

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{r}\left(1 - e^{-a^2r^2}\right) \tag{19}$$

Тогда

$$\int_0^\infty r\varphi(r)\sin krdr = e_0\left[\int_0^\infty \sin krdr - \int_0^\infty e^{-a^2r^2}\sin krdr\right] \tag{20}$$

Определенные интегралы в (20) вычисляем следующим способом:

$$\int_0^\infty \sin krdr = \lim_{\beta\to 0}\int_0^\infty e^{-\beta r}\sin krdr = \frac{1}{k},$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2r^2}\sin kr\,dr = \frac{1}{k}\left[1 - F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right)\right],$$

где $F(1, \frac{1}{2}, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Таким образом находим согласно (18):

$$A(k^2) = -\frac{k^2}{F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right)} \tag{21}$$

Представим ядро уравнений поля (6) $\varepsilon(x - x')$ в виде интеграла Фурье:

$$\varepsilon(x - x') = \frac{c}{(2\pi)^4}\int A_0(k^2 - k_0^2)\, e^{i\left[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - ck_0(t - t')\right]}(dk) \tag{22}$$

Согласно (8)

$$A_0(k^2 - k_0^2) = -\frac{A(k^2 - k_0^2)}{k^2 - k_0^2} \tag{22a}$$

Из (21) следует, что в рассматриваемом нами случае:

$$A_0(k^2 - k_0^2) = \frac{1}{F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{k_0^2 - k^2}{4a^2}\right)} \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в (6), получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{c}{(2\pi)^4}\int\frac{(dk)}{F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{k_0^2 - k^2}{4a^2}\right)}\int\frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu}\, e^{i\left[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - ck_0(t - t')\right]}(dx') = \frac{4\pi}{c}s_\mu(x) \tag{24}$$

Приведение уравнений (24) в дифференциальные путем интегрирования подобно тому, как это можно сделать в электродинамике Максвелла или электродинамике с высшими производными, невозможно. Однако можно получить систему дифференциальных уравнений, если вычислить из (24) $\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}$. С этой целью умножаем (24) на $e^{-i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]}$ и интегрируем по x, y, z, t. Переменяя порядок интегрирования и принимая во внимание (14a) находим:

$$\int \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} e^{-i[(\vec{k},\vec{r}')-ck_0t']}(dx') =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\int s_\mu(x')\cdot F\left(1, \tfrac{1}{2}, \frac{k_0^2-k^2}{4a^2}\right) e^{-i[(\vec{k},\vec{r}')-ck_0t']}(dx)$$

Но так как

$$(k_0^2-k^2)^n e^{i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]} = \Box^n e^{-i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]},$$

где $\Box^n$ обозначает n-кратное применение оператора $\Box$, то

$$\int \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} e^{-i[(\vec{k},\vec{r}')-ck_0t']}(dx') =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\int s_\mu(x')F\left(1, \tfrac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right) e^{-i[(\vec{k},\vec{r}')-ck_0t']}(dx'). \tag{25}$$

Умножая (25) на $\frac{c}{(2\pi)^4}e^{i[(\vec{k},\vec{r})-ck_0t]}$ и интегрируя по k_x, k_y, k_z, k_o, получаем

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}\int s_\mu(x')F\left(1, \tfrac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right)\delta(x-x')(dx')$$

или, применяя интегрирование по частям:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}F\left(1, \tfrac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right)s_\mu(x) \tag{26}$$

Так как электромагнитные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца то для потенциалов находим уравнения:

$$\Box\varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c}F\left(1, \tfrac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right)s_\mu(x) \tag{27}$$

Рассмотрим второй, более сложный, но вместе с тем охватывающий различные формы зависимости от $e^{-a^2r^2}$, статический потенциал:

$$\varphi^{(r)} = \frac{2e_0}{r\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{ar} e^{-t^2}dt - are^{-a^2r^2} + 2a^2r^2\int_{ar}^{\infty} e^{-t^2}dt\right] \tag{28}$$

Подставляя (28) в (29), принимая во внимание (22a), вычисляем:

$$\frac{1}{A_0(k^2)} = 2e^{-\frac{k^2}{4a^2}} - F\left(1, 2, -\frac{k^2}{4a^2}\right).$$

Подобным способом, как в случае потенциала $\varphi(r)=\frac{e_0}{r}\left(1-e^{-a^2r^2}\right)$, находим дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi}{c}\left[2\,e^{\frac{\Box}{4a^2}}-F\left(1,\ 2,\ \frac{\Box}{4\,a^2}\right)\right]s_\mu(x) \tag{29}$$

Таким образом, в случае, если статический потенциал зависит от $e^{-a^2r^2}$, компоненты тензора напряжений удовлятворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}=\frac{4\,\pi}{c}\,s'_\mu(x)\,, \tag{30}$$

где плотность „свободного" тока имеет вид

$$s_\mu'(x)=\left[1+\frac{a_1}{1!}\cdot\frac{\Box}{4\,a^2}+\frac{a_2}{2!}\left(\frac{\Box}{4\,a^2}\right)^2+\dots\right]s_\mu(x) \tag{31}$$

Уравнения (30) получаются из уравнений Максвелла, если „истинный ток $s_\mu(x)$ заменить „свободным" током $s_\mu'(x)$. Если в (31) $a\to\infty$, то $s_\mu'(x)\to s_\mu(x)$, и уравнения (30) переходят в уравнения Максвелла.

Предположим, что источником поля является точечный заряд e_0, тогда можно записать:

$$s_\mu(x)=e_0\int\dot{\xi}_\mu\delta(x-\xi)\,ds,$$

где s — собственное время, $\xi_\mu=\xi_\mu(s)$ — четырёхмерные координаты движущегося заряда, а $\dot{\xi}_\mu$ обозначает дифференцирование координаты ξ_μ по собственному времени s. Тогда согласно (31):

$$s_\mu'(x)=e_0\int\dot{\xi}_\mu\left[1+\frac{a_1}{1!}\cdot\frac{\Box}{4a^2}+\frac{a_2}{2!}\left(\frac{\Box}{4a^2}\right)^2+\dots\right]\delta(x-\xi)\,ds\,.$$

Следовательно, источник поля для компонент тензора напряжений будет распределен в некоторой области пространства и времени.

Выражение (31) подобно выражению, которое получается для поляризации вакуума. В частности, можно подобрать статический потенциал так, чтобы второй и третий член в (31) совпадали с двумя известными членами для поляризации вакуума.

Вычислим распределение плотности „свободного" заряда для случая статического потенциала (19) в системе координат, в которой точечный заряд покоится в начале системы координат. Согласно (27).

$$\rho'(\vec{r})=F\left(1,\ \tfrac{1}{2},\ \frac{\Box}{4a^2}\right)\delta(\vec{r})=\frac{1}{8\pi^3}\int F\left(1,\ \tfrac{1}{2},\ -\frac{k^2}{4\,a^2}\right)e^{i(\vec{k},\,\vec{r})}(d\vec{k})$$

Но вырожденную гипергеометрическую функцию можно представить в виде:

$$F\left(1,\ \tfrac{1}{2},\ -\frac{k^2}{4a^2}\right)=1-k\int\limits_0^\infty e^{-a^2t^2}\sin\,kt\,dt.$$

Выполняя интегрирование, вычисляем:

$$\rho'(\vec{r}) = e_0 \vec{\delta}(r) - \frac{e_0 a^2}{2 r \pi}\left(1 - 2 a^2 r^2\right) e^{-a^2 r^2}$$

Дополнительная плотность на расстояниях $r < \frac{1}{a\sqrt{2}}$ имеет знак, противоположный знаку точечного заряда e_0, а на расстоянии $r > \frac{1}{a\sqrt{2}}$ имеет тот же самый знак, что заряд e_0. Это распределение дополнительной плотности аналогично поляризации диэлектрика с переменной диэлектрической постоянной. Подобное распределение плотности получается во втором частном примере (28).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко Д. и Соколов А. — Классическая теория поля. М—Л., 1949.
2. Sauter F. — ZS. f. Phys., 69, 742, 1931.
3. Bopp F. — Ann. d. Phys., 42, 573, 1942.