

А. Е. ГЛАУБЕРМАН

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ¹

Известные трудности современной квантовой теории поля, в частности, квантовой электродинамики находятся в связи с проблемой учета реакции поля в последовательной форме с одной стороны и с учетом так называемых вакуумных эффектов — с другой [1].

В настоящей статье рассматривается новая трактовка некоторых узловых вопросов современной теории.

§ 1. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В обычной квантовой электродинамике (если мы для удобства рассуждений будем рассматривать волномеханический формализм без вторичного квантования) гамильтониан системы, состоящей из частиц и поля, записывается в виде

$$H = H_D + H_F \quad (1)$$

где H_F представляет энергию излучения, а

$$H_D = \sum_k \left[\left(\vec{\alpha}_k \vec{p}_k + \frac{e_k}{c} \vec{A} \right) + \beta_k \mu_k - e_k \varphi^e \right], \quad (2)$$

где заряд электрона e_k , α_k и β_k матрицы Дирака для k -ой частицы, φ^e — скалярный потенциал только внешнего поля и $\vec{A}$ — векторный потенциал внешнего поля и излучения (исключая продольную часть поля). Оператор $\vec{A}$, описывающий полное поле, рассматривается при этом как эрмитовый оператор и оператор, описывающий энергию излучения H_F также эрмитов.²

Рассматривая задачи методом возмущений в обычной теории, выделяют из (2) часть, зависящую от переменных частиц и поля, и трактуют эту часть как возмущение, приводящее к переходам в двух „квазинезависимых“ подсистемах — частиц и поля [2, 3].

Таким образом, возмущение в этой теории имеет вид

$$H' = \sum_k e_k \left(\vec{\alpha}_k \vec{A} \right)$$

¹ Краткое содержание доклада, прочитанного на научной конференции ЛГУ в феврале 1952 г.

² Мы употребляем термин „эрмитовый“ на равных правах с термином „самосопряженный“. Чтобы избежать неточности в случае неограниченных операторов, отметим, что имеется в виду только свойство вещественности собственных значений (можно было бы говорить вообще о симметричных операторах).

Физический смысл члена H' очевиден, он описывает взаимодействие рассматриваемых двух „подсистем“.

Приведенная выше обычная схема в общем случае не может быть признана правильной; описание взаимодействия „подсистем“ частиц и поля только членом H' , строго говоря, не может претендовать на полноту и должно быть изменено.¹ Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно произвести следующий анализ. Дираковская форма (2) имеет смысл и по существу определена только для электронов в заданном *внешнем* поле, и описание взаимодействия путем введения в дираковский гамильтониан потенциала полного поля (включающего собственное поле излучения электрона) необосновано.

При наличии взаимодействия, включающего собственное поле электрона, каждая из „подсистем“ не может рассматриваться в принципе независимо от другой; только вся система в целом, т. е. система частиц и поля является в нашей теории замкнутой и должна описываться эрмитовским оператором Гамильтона. Если мы теперь искусственно разделим полную систему на две подсистемы частиц и поля, то, учитывая существование взаимодействия между ними, мы можем формально описать всю систему суммой двух операторов, относящихся соответственно к первой и второй „независимым“ подсистемам. Первой подсистеме (частицы) при учете реакции поля тогда будет соответствовать оператор:

$$H'_D = \sum_k \left[\left(\vec{\alpha}_k, \vec{p}_k + \frac{e_k}{c} \vec{A} \right) + \beta_k m_k - e_k \varphi^e \right] + L_D^{(1)} - iL_D^{(2)}, \quad (3)$$

где $\vec{A}$ эрмитовский оператор, описывающий *полное* поле как и в (2), а дополнительный член $L_D = L_D^{(1)} - L_D^{(2)}$ представляет собой общий вид некоторого несамосопряженного оператора при условии, что $L_D^{(1)}$ и $L_D^{(2)}$ — эрмитовы операторы.

Несамосопряженный оператор H'_D имеет физический смысл и соответствует тому, что для подсистемы частиц в отдельности при учете „реакции поля“ невозможны стационарные состояния (такая система диссипативна). Вторая подсистема — поле, взятая в отдельности, также должна описываться неэрмитовым оператором

$$H'_F = H_F + L_F^{(1)} - iL_F^{(2)}, \quad (4)$$

где $L_F^{(1)}$ и $L_F^{(2)}$ эрмитовские операторы а H_F — второй член в формуле (1).

Оператор H , описывающий полную систему, должен быть эрмитовым (полная система консервативна). Из требования эрмитовости полного оператора H вытекает единственное следствие

$$L_D^{(2)} = -L_F^{(2)}$$

и, таким образом, в общем случае полный оператор Гамильтона будет иметь форму:

$$H \equiv H_D + H_F + L, \quad (5)$$

где $L = L_D^{(1)} + L_F^{(1)}$ — некоторый эрмитовский оператор.

¹ В обычной теории указанный вид H' по существу выступает как гипотеза.

Если теперь считать взаимодействие частиц с полем излучения слабым, и выделить из H члены, содержащие переменные частиц и поля, то оператор возмущения будет иметь вид

$$\sum_k e_k (\vec{\alpha}_k \vec{A}) + L, \quad (6)$$

отличающийся от вида оператора H' обычной теории.

Следовательно, произведенный выше анализ показывает, что обычная теория оперирует, вообще говоря, с неправильным гамильтонианом полной системы частиц и поля; этот гамильтониан определен в ней с точностью до некоторого эрмитовского оператора. С точностью до этого же оператора определяется в обычной теории и оператор возмущения H' .

Поправочный член L в выражениях (5) и (6) должен играть существенную роль в высших приближениях теории возмущений, в то время как в первом приближении его влияние должно быть незаметным.

Высказанные соображения открывают путь к устранению некоторых трудностей теории без существенного изменения ее аппарата, приводя к задаче определения поправочного эрмитового оператора L формул (5) и (6).

§ 2. О НЕЭРМИТОВСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В связи с изложенными в § 1 соображениями естественно поставить вопрос относительно обобщения существующей квантовой механики путем введения в рассмотрение более широкого класса операторов, чем самосопряженные операторы.

В такой „неэрмитовской квантовой механике“ нашло бы место описание спонтанных переходов атомных систем и получили бы полное и последовательное решение всякие задачи, в которых волновое уравнение имеет только нестационарные решения, как, например, система, способная к распаду.

В действительности, задачи, подобные последней, заставили уже давно формально вводить в теорию комплексные собственные значения и решения брались в виде:

$$\psi(r, t) = \varphi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}, \quad (7)$$

где $E = E_0 - i\Gamma$.

Задачи указанного типа не являются в принципе задачами особого рода, так как квантовая механика стационарных состояний должна вообще рассматриваться как приближенная „механическая“ теория. Известно, что в классической механике диссипативные проблемы, например, учет реакции поля электрона, невозможны, если механика построена в форме Гамильтона и, наоборот, можно формулировать задачу в рамках механической теории в форме Ньютона при введении соответствующих членов типа „радиационного трения“. Это положение находит свое отражение в квантовой механике. Гамильтоновой форме классической механики электрона может соответствовать квантовая

¹ Здесь и дальше $\hbar$ означает постоянную Планка, разделенную на 2π .

механика с самосопряженными операторами, а механике Ньютона с учетом диссипативных членов — квантовая механика, оперирующая, вообще говоря, с несамосопряженными операторами. Рассматривая уравнение

$$\psi(x, t) = S \psi(x, 0)$$

и отбрасывая предположение об унитарности оператора S , мы приходим, как обычно, к волновому уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^* \psi \quad (8)$$

где

$$i S S^{-1} = \frac{1}{\hbar} H^*, \quad (9)$$

и H^* неэрмитов.

Собственные значения оператора H^* , вообще говоря, комплексны, и мы приходим к квантовой механике „квазистационарных“ состояний, что полностью соответствует физическому смыслу проблемы. При этом решение уравнения

$$H^* \psi = E \psi \quad (10)$$

будет в общем случае отличным от выражения (7).

В такой неэрмитовой квантовой механике понятие „времени жизни“ атомной системы в том или ином состоянии будет внутренним, органически включенным в теорию. Комплексные собственные значения должны иметь вид

$$E = E_0 - i\Gamma(E_0), \quad (11)$$

где E_0 — вещественное число, характеризующее энергию рассматриваемого квазистационарного состояния, а $\Gamma(E_0)$ характеризует „ширину“ этого состояния, так как время жизни системы в том или ином состоянии, вообще говоря, различно. Если предполагать нормальность неэрмитовского гамильтониана квантовомеханической системы, то этот гамильтониан может быть представлен в виде:

$$H^* = H - iF(H), \quad (12)$$

где H обычный эрмитовский гамильтониан, приводящий к механике стационарных состояний.

Однако в некоторых задачах, связанных с граничным условием типа условия „излучения“ для волновой функции, как это имеет место, например, в теории распада сложной системы, построение эквивалентного оператора должно приводить к операторам не являющимся нормальными.¹ В связи с этим можно предполагать, что следует различать задачи, в которых неэрмитовость вводится благодаря граничным условиям указанного выше типа (как в теории α -распада), и задачи, в которых неэрмитовость содержится внутренне, как, например, в проблеме учета реакции поля электронов. В задачах первого типа (12), очевидно, не может иметь места, в то время как в задачах второго типа требование нормальности соответствующего неэрмитового оператора, вероятно, может быть выполнено.

При определении вида операторов, соответствующих физическим величинам, в этой неэрмитовской теории необходимо опираться на

¹ Этот результат был мне сообщен профессором М. С. Лифшицем.

принцип соответствия с классической механикой, включая механику диссипативных систем, с одной стороны, и с обычной квантовой механикой — с другой; можно сформулировать ряд физических требований, например, требования вещественности наименьшего собственного значения (по вещественной части E_0) оператора H^* , что соответствует стационарности основного состояния системы, условие $\Gamma(E_0) > 0$, что в большинстве случаев должно иметь место, и т. д., которые в совокупности с требуемыми соответствиями позволяют определить область расширения класса операторов, вводимых в теорию.

§ 3. ОБ УЧЕТЕ ВАКУУМНЫХ ЭФФЕКТОВ

Переходя к обсуждению вопроса о вакуумных эффектах отметим следующее. Уравнение Дирака, как и все релятивистские квантовые уравнения, вводит в рассмотрение „античастицы“;¹ можно высказать утверждение, что это уравнение в определенной степени учитывает взаимодействие „фона“, т. е. в данном случае электронно-позитронного вакуума с рассматриваемым электроном. В этом смысле проблема электрона в релятивистской квантовой теории является проблемой многих тел. Действительно, при рассмотрении свободного электрона по Дираку и применении соотношения, определяющего оператор производной в связи с самосопряженностью оператора Гамильтона H , мы получим, как известно, для оператора скорости

$$\frac{dx_i}{dt} = c\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Полученный оператор скорости может быть разложен на две части (так называемые „четная“ и „нечетная“ части). Первая часть, не обращающаяся в нуль при усреднении по времени, описывает трансляционное движение электрона; вторая же часть, обращающаяся в нуль при усреднении по времени, описывает дополнительное колебательное движение (Шредингеровское — „дрожание“) с большой частотой ν .

$$\nu = \frac{2H}{h} = \frac{2mc^2}{\sqrt{h^2(1-\beta^2)}}. \quad (14)$$

Это осциллирующее движение обычно связывается с существованием состояний отрицательной энергии. Усредняя по времени, мы отбрасываем движение, соответствующее переходам на отрицательные уровни и совершаем так называемую „индивидуальную“ ошибку. Говоря на модельном языке, можно предложить, согласно Френкелю [4], интерпретацию этого „дрожания“ в связи с отрицательными уровнями энергии, как результат того, что электрон может ассимилировать² с позитронами виртуальных пар из области вакуума, непосредственно окружающей электрон. Не углубляясь сейчас в рассмотрение этой модели, отметим как вывод, что при таком подходе мы должны считать, что требование релятивистской инвариантности кван-

¹ Попытки исключить отрицательные уровни энергии связаны с утратой релятивистской инвариантности теории.

² Употребление этого термина, принадлежащего Я. И. Френкелю, представляется нам более удачным, чем термин „аннигиляция“.

товой теории имеет более глубокое физическое содержание, чем это обычно считают. В частности, оно приводит к учету, в определенной степени, взаимодействия электрона с электронно-позитронным вакуумом, в связи с чем уравнение Дирака для свободного электрона является в прямом смысле уравнением „многоэлектронной задачи“.

Отсюда вытекает обоснование физически ясной „вычитательной“ операции. Так как картина флуктуаций различна при отсутствии и при наличии „реальных“ электронов, то учет обратного воздействия поляризованного вакуума на рассматриваемый „реальный“ электрон нужно производить „внешним“ образом, т. е. путем введения соответствующих дополнительных членов, не *полностью*, а *за вычетом взаимодействия* с флуктуациями, соответствующими отсутствию „реальных“ электронов. Это взаимодействие учитывается „внутренним“ образом, т. е. в самом уравнении Дирака, как это обсуждалось выше.

Последние соображения нужно связать еще с тем обстоятельством, что независимое рассмотрение нулевых флуктуаций электромагнитного поля и электронно-позитронного поля с последующим учетом „интерференционных эффектов“ является по существу неправильным. Несмотря на кажущуюся независимость перестановочных соотношений, из которых следуют флуктуации одного и другого типа, между ними должна существовать глубокая связь.¹

Изложенные в настоящей работе общие соображения составляют качественную схему, согласно которой может быть предпринята попытка построения количественной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвиг уровней атомных электронов, сборник статей под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, 1950.
2. Гайтлер В. — Квантовая теория излучения, ГТТИ, М.-Л., 1940.
3. Вентцель Г. — Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ, М.-Л., 1947.
4. Френкель Я. И. УФХ, т. 47, стр. 69, 1952.

¹ Простая модель нулевых флуктуаций электромагнитного поля, в которой рассматривается излучение электроном фотона с последующим поглощением последнего, непригодна ни в какой мере, так как флуктуации электромагнитного поля следуют из перестановочных соотношений, сформулированных для поля без частиц. Скорее может быть полезной модель, исходящая из рассмотрения виртуальных пар их образования и ассимиляции, в которой ясно выступает неразрывная связь флуктуаций первого и второго полей, или, вернее, то, что оба сорта флуктуаций — это две стороны одного явления.