



МІНІСТЕРСТВО КУЛЬТУРИ СРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XXII

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК П'ЯТИЙ

1953



*Львівський
державний університет
імені Ів. Франка*

МІНІСТЕРСТВО КУЛЬТУРИ СРСР

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XXII

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК П'ЯТИЙ

ВИДАВНИЦТВО ХАРКІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

імені О. М. ГОРЬКОГО

ЛЬВІВ

1953

ХАРКІВ

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР
ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИВ. ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XXII

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК ПЯТЫЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО
ЛЬВОВ 1953 ХАРЬКОВ

Редакційна колегія:

Професор О. С. Кованько (відповідальний редактор), чл.-кор. АН
УРСР Я. Б. Лопатинський, доцент В. С. Міліянчук, доцент
В. Є. Степанов, доцент М. П. Шереметьєв

Друкується за розпорядженням
ректора Львівського університету
члена-кореспондента АН УРСР
професора Є. К. Лазаренка.

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Целью настоящей работы является доказательство при некоторых условиях существования гармонической в трехмерной области функции u , удовлетворяющей граничному условию вида

$$\alpha \operatorname{grad} u + au = f^1 \quad (1)$$

1. Здесь будут указаны предположения относительно области и задаваемых функций, а также выведены некоторые вспомогательные формулы.

Пусть V есть выпуклая область в трехмерном Евклидовом пространстве с границей S , которая является дважды непрерывно дифференцируемым многообразием.

Единичный вектор внутренней нормали к S в точке $y \in S$ будет обозначаться $\nu(y)$.

Как легко видеть, можно указать такое положительное число σ , что при $0 \leq \varepsilon \leq \sigma$ соответствие $y \rightarrow y + \varepsilon \nu(y)$ является взаимно-однозначным, причем точка $y' = y + \varepsilon \nu(y')$ ($y \in S$) описывает поверхность, — S_ε , обладающую теми же свойствами, что и S ; V_ε будет обозначать выпуклую область с границей S_ε .

Пусть $\alpha = \alpha(y)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция, определенная на S , $a(y)$ — непрерывно дифференцируемая на S функция; будет предполагаться, что

$$\alpha \cdot \nu > 0, \quad a < 0 \quad (2)$$

Не ограничивая общности рассмотрения задачи (1), будет предполагаться

$$\alpha \cdot \nu = 1 \quad (3)$$

Как выяснится далее, граничное условие (1), определяемое α и a тесно связано с граничным условием того же вида, определяемым следующими вектором α^* и функцией a^* :

$$\begin{aligned} \alpha^*(y) &= 2\nu(y) - \alpha(y), \\ a^*(y) &= a(y) + \nu(y) \cdot \operatorname{rot}(\alpha(y) \times \nu(y)).^2 \end{aligned} \quad (4)$$

¹ В дальнейшем трехмерное Евклидово пространство предполагается отнесенным к прямоугольной системе координат; точки пространства отождествляются с соответствующими радиус-векторами; длина вектора α обозначается $|\alpha|$, скалярное и векторное произведения векторов α, β обозначаются соответственно $\alpha \cdot \beta, \alpha \times \beta$.

² Величина $\nu \cdot \operatorname{rot}(\alpha \times \nu)$ определяется очевидным образом значениями α, ν на S .

Очевидно, $\alpha^{**} = \alpha$, $a^{**} = a$, $\alpha^* \cdot \nu = 1$.

Будет предполагаться дополнительно, что

$$a^* = a + \nu \cdot \operatorname{rot}(\alpha \times \nu) < 0. \quad (5)$$

Теперь будет указано некоторое преобразование формул Грина.

Пусть $u(x)$, $u^*(x)$ суть дважды непрерывно-дифференцируемые на множестве $V \setminus V_\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq \sigma$) функции, непрерывные на $(V \setminus V_\varepsilon) \cup S$ и обладающие также следующими свойствами: для всякой точки $y \in S$ существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \alpha(y) \cdot \operatorname{grad} u(x) \Big|_{x=y+\tau\nu(y)} \right\}, \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \alpha^*(y) \cdot \operatorname{grad} u^*(x) \Big|_{x=y+\tau\nu(y)} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

и при том равномерно относительно y .

В этом случае такие пределы будут обозначаться соответственно $\alpha(y) \cdot \operatorname{grad} u(y)$, $\alpha^*(y) \cdot \operatorname{grad} u^*(y)$.

Пусть сначала $u(x)$, $u^*(x)$ непрерывно-дифференцируемы на $(V \setminus V_\varepsilon) \cup S$.

Тогда на основании (4) и $\nu = \alpha + (\alpha + \nu) \times \nu$ получаем:

$$\iint_S u^* \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \iint_S \{ u^* \alpha \cdot \operatorname{grad} u + u^* \nu \cdot [\operatorname{grad} u \times (\alpha \times \nu)] \} dS,$$

$$\iint_S u \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS = \iint_S \{ u \alpha^* \cdot \operatorname{grad} u^* - u \nu \cdot [\operatorname{grad} u^* \times (\alpha \times \nu)] \} dS$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_S \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \right) dS &= \iint_S \{ u^* \alpha \cdot \operatorname{grad} u - u \alpha^* \cdot \operatorname{grad} u^* + \\ &+ \nu \cdot [\operatorname{grad} (u u^*) \times (\alpha \times \nu)] \} dS = \end{aligned}$$

$$= \iint_S \{ u^* (\alpha \cdot \operatorname{grad} u + a u) - u (\alpha^* \cdot \operatorname{grad} u^* + a^* u^*) \} dS;$$

$$\iint_S \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \right) dS =$$

$$= \iint_S \{ u^* (\alpha \cdot \operatorname{grad} u + a u) + u (\alpha \cdot \operatorname{grad} u^* - a^* u^*) \} dS.$$

Таким образом, справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \iint_S \{ u^* (\alpha \cdot \operatorname{grad} u + a u) - u (\alpha^* \cdot \operatorname{grad} u^* + a^* u^*) \} dS - \\ - \iint_{S_\varepsilon} \left\{ u^* \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial u^*}{\partial \nu} \right\} dS + \iiint_{V \setminus V_\varepsilon} \{ u^* \Delta u - u \Delta u^* \} dV = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\iint_S \left\{ u (\alpha \cdot \text{grad } u + au) - \frac{a+a^*}{2} u^2 \right\} dS - \iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \iiint_{V/V_\varepsilon} \{ u \Delta u + |\text{grad } u|^2 \} dV = 0. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) справедливы и без предположения непрерывной дифференцируемости u , u^* на $(V/V_\varepsilon) \cup S$; достаточно предположить для этих функций существование равномерных по y пределов (6).

Действительно в этом случае по доказанному формулы (7), (8) можно применить к области V_τ/V_ε ($0 < \tau < \varepsilon$), перенеся значения $\alpha(y)$, $\alpha^*(y)$, $a(y)$, $a^*(y)$ с S на S_τ по условию: если $y_\tau = y + \tau \nu(y)$ ($y \in S$, $y_\tau \in S_\tau$), то $\alpha(y_\tau) = \alpha(y)$ и т. д., и затем перейти к пределу при $\tau \rightarrow 0$.

В дальнейшем граничная задача, характеризуемая условием (1), будет пониматься следующим образом: найти функцию u , гармоническую в области V , непрерывную в $V \cup S$, для которой существует (равномерный по y) предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \alpha(y) \cdot \text{grad } u(x) \Big|_{x=y+\tau \nu(y)} \right\}$$

(обозначаемый, по условию, через $\alpha(y) \cdot \text{grad } u(y)$), удовлетворяющую в этом смысле граничному условию (1), где $f(y)$ заданная, непрерывная на S функция.

Из формулы (8) следует, что решение задачи (1) при сделанных предположениях единственно.

Действительно, пусть гармоническая в области V функция u удовлетворяет граничному условию

$$\alpha \cdot \text{grad } u + au = 0.$$

Тогда из (8) получают:

$$-\iint_S \frac{a+a^*}{2} u^2 dS + \iiint_V |\text{grad } u|^2 dV = 0.$$

Так как $a < 0$, $a^* < 0$, то отсюда легко следует $u = 0$ в V .

2. Здесь будет доказано существование решения задачи (1). Пусть $x \in V$, $y \in S$,

$$q(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{\left(|x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x-y \right) \cdot \nu(y)}{\left| |x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x-y \right|^2} \quad (9)$$

Непосредственно проверяется, что $q(x, y)$ есть гармоническая в V функция точки x . Решение задачи (1) определяется в форме

$$u(x) = \iint_S q(x, y) \mu(y) d_y S; \quad (10)$$

здесь $\mu(y)$ предполагается непрерывной на S функцией.

Если $z \in S$, $x \in V$, то

$$\begin{aligned} & \alpha(z) \cdot \text{grad } u(x) + a(z) u(x) = \\ & = \iint_S \left\{ (\alpha(z) - \alpha(y)) \cdot \text{grad } q(x, y) + a(z) q(x, y) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y) \cdot v(y)}{|x-y|^3} \right\} \mu(y) d_y S, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует при непрерывной функции $\mu(y)$ существование равномерного относительно z предела

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \alpha(z) \cdot \text{grad } u(x) + a(z) u(x) \right\}_{x = z + \tau v(z)}.$$

Таким образом, для того, чтобы гармоническая функция $u(x)$, определенная формулой (10), удовлетворяла граничному условию (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(y)$ определялась следующим регулярным интегральным уравнением:

$$\begin{aligned} \mu(z) + \iint_S \left\{ (\alpha(z) - \alpha(y)) \cdot \text{grad}_z q(z, y) + a(z) q(z, y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \frac{(z-y) \cdot v(y)}{|z-y|^3} \right\} \mu(y) d_y S = f(z) \end{aligned} \quad (11)$$

Прежде всего будет доказана лемма.

ЛЕММА. Пусть $f(z)$ непрерывно дифференцируема на S , $\mu(z)$ удовлетворяет уравнению (11). Тогда $\mu(z)$ непрерывно дифференцируема на S .

Доказательство. Пусть z_0 произвольная точка S , S_0' — малая окрестность z_0 (на S), взаимно-однозначно проецирующаяся на круг T_0 с центром в z_0 , лежащий на касательной к S в точке z_0 плоскости. Пусть начало прямоугольной системы координат выбрано в z_0 и координатная ось направлена по $v(z_0)$. Тогда уравнение части S_0' поверхности S может быть представлено в виде $y_3 = \omega(y_1, y_2)$, где ω дважды непрерывно дифференцируемая функция в T_0' , причем

$$|\omega(y_1, y_2)| \leq A(y_1^2 + y_2^2), \quad \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \omega \right| \leq A \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad (i=1, 2),$$

где A — некоторая постоянная.

Пусть T_0 concentрический с T_0' круг меньшего радиуса, S_0 — соответствующая T_0 часть поверхности S , $z \in S_0$; тогда уравнение (11) можно представить в виде:

$$\mu(z) + \iint_{S_0} K(z, y) \mu(y) d_y S = f_1(z), \quad (12)$$

где

$$K(z, y) = (\alpha(z) - \alpha(y)) \cdot \text{grad}_z q(z, y) + a(z) q(z, y) + \frac{1}{2\pi} \frac{(z-y) \cdot v(y)}{|z-y|^3},$$

$$f_1(z) = f(z) - \iint_{S/S_0} K(z, y) \mu(y) d_y S.$$

$\mu(z)$, $K(z, y)$, $f_1(z)$ при $z, y \in S_0'$ рассматриваются как функции z_1, z_2, y_1, y_2 .

Как легко проверить,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} K(z, y) + \frac{\partial}{\partial y_i} K(z, y) = L_i(z, y) \quad (i=1, 2)$$

есть непрерывная при $z, y \in S_0'$, $z \neq y$ функция, причем

$$V(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 L_i(z, y)$$

остается ограниченным.

Очевидно, $f_1(z)$ непрерывно дифференцируема на S_0 ; оказывается $\frac{\partial}{\partial z_i} f_1(z)$ ($i=1, 2$) суммируемы на S_0 .

Действительно, это очевидно для $\frac{\partial}{\partial z_i} f(z)$ и

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_i} \iint_{S_0'/S_0'} K(z, y) \mu(y) dy S. \text{ Но} \\ & \frac{\partial}{\partial z_i} \iint_{S_0'/S_0} K(z, y) \mu(y) dy S = \iint_{S_0'/S_0} L_i(z, y) \mu(y) dy S - \\ & - \iint_{T_0'/T_0} \frac{\partial}{\partial y_i} K(z, y) \cdot \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2 = \\ & = \iint_{S_0'/S_0} L_i(z, y) \mu(y) dy S + \\ & + \iint_{T_0'/T_0} K(z, y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2} \right) dy_1 dy_2 - \\ & - \int_{C_0} \frac{y_i}{V y_1^2 + y_2^2} K(z, y) \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2} ds + \\ & + \int_{C_0} \frac{y_i}{V y_1^2 + y_2^2} K(z, y) \mu(y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_2}\right)^2} ds, \end{aligned}$$

где C_0, C_0' суть окружности, ограничивающие соответственно T_0, T_0' . Все слагаемые правой части последней формулы кроме последнего слагаемого, ограничены при $z \in S_0$. Так как $V(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 K(z, y)$ ограничено при $y, z \in S_0'$, то последнее слагаемое в рассматриваемой формуле имеет оценку вида

$$M \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{V 1 + \theta^2 - 2\theta \cos \varphi},$$

где M — постоянное, θ — отношение $V z_1^2 + z_2^2$ к радиусу круга T_0 . Отсюда непосредственно следует суммируемость $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}$ ($i=1, 2$) на S_0 . На

основании одного результата (см. [1], стр. 28, лемма 1) отсюда следует непрерывная дифференцируемость решения уравнения (12).

Лемма доказана.

Теперь докажем разрешимость задачи (1). Будет рассмотрено два случая.

1. Пусть всякая гармоническая в V функция $u(x)$, достаточно гладкая в $V \cup S$, представима в виде (10).

Пусть $\psi(y)$ непрерывное решение уравнения

$$\psi(y) + \iint_S \psi(z) K(z, y) d_z S = 0.$$

На основании доказанной леммы $\psi(y)$ — непрерывно дифференцируема на S и, очевидно, для всякой функции вида (10)

$$\iint_S \psi(y) \left(\alpha(y) \cdot \text{grad } u(y) + a(y) u(y) \right) d_y S = 0 \quad (13)$$

Строится гармоническая в V функция, $-u_0^*(x)$, — с граничными значениями $\psi(y)$. На основании леммы легко видеть, что $u_0^*(x)$ непрерывно-дифференцируема на $V \cup S$. Тогда на основании (7) и (13)

$$\iint_S u(y) \left(\alpha^*(y) \cdot \text{grad } u_0^*(y) + a^*(y) u_0^*(y) \right) d_y S = 0. \quad (14)$$

Согласно предположению $u(y)$ — есть граничное значение вообще произвольной гармонической в V функции.

Из (14) тогда следует, что

$$\mu^*(y) \cdot \text{grad } u_0^*(y) + a^*(y) u_0^*(y) = 0.$$

Но по доказанному $u^*(x) = 0$ на V и $\psi(y) = 0$ на S . Следовательно, уравнение (11) разрешимо при любой непрерывной функции $f(y)$ и на основании (10), (11) задача (1) разрешима для любой непрерывной функции $f(y)$.

2. Пусть теперь существует гармоническая в V непрерывно-дифференцируемая на $V \cup S$ функция $u_1(x)$, не представимая в форме (10).

В этом случае уравнение (11) не может быть неограниченно разрешимым. Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_p(z)$ полная система независимых решений уравнения

$$\varphi(z) + \iint_S K(z, y) \varphi(y) d_y S = 0.$$

Пусть $\varphi_1^*(z)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\iint_S \varphi_1^*(z) \varphi_i(z) d_z S = \begin{cases} 1 & (i=1), \\ 0 & (i=2, \dots, p). \end{cases} \quad (15)$$

Пусть при замене в (11) функции $q(z, y)$ через $q_1(z, y) = q(z, y) + u_1(x) \varphi_1^*(y)$, ядро $K(z, y)$ переходит в ядро $K_1(z, y)$.
Если

$$\varphi(z) + \iint_S K_1(z, y) \varphi(y) d_y S = 0, \quad (16)$$

то $u(x) = \iint_S q_1(x, y) \varphi(y) d_y S$ удовлетворяет нулевому граничному условию (1). Следовательно,

$$\iint_S q_1(x, y) \varphi(y) d_y S = 0 \quad (x \in V)$$

или

$$\iint_S q(x, y) \varphi(y) d_y S + u_1(x) \iint_S \varphi_1^*(y) \varphi(y) d_y S = 0.$$

Так как $u_1(x)$ по предположению не представимо в форме (10), то $\iint_S \varphi_1^*(y) \varphi(y) d_y S = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(y) = C_1 \varphi_1(y) + \dots + C_p \varphi_p(y);$$

из условия (15) далее следует, что $C_1 = 0$ и многообразие решений уравнения (16) определяется полной системой независимых решений $\varphi_2(y), \dots, \varphi_p(y)$.

Продолжая подобное рассуждение далее, приходят, наконец, к ядру $q_p(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^p u_i(x) \varphi_i^*(y)$, для которого соответствующее уравнение типа (11) неограниченно разрешимо. Но это доказывает разрешимость задачи (1).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Лопатинский Я. Б. Укр. Мат. Журнал, III, I, 1951.

А. С. КОВАНЬКО

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖИМОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНУЮ СУММУ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть нам дана почти-периодическая функция со своим рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_1^{\infty} A_x e^{i\lambda_k x} \quad (1)$$

Ставим следующий вопрос:

Если из членов ряда Фурье мы составим несколько отдельных рядов (не имеющих попарно общих членов), то не будет ли каждый из этих рядов рядом Фурье какой-то почти-периодической функции и таким образом $f(x)$ распадается на конечную сумму почти-периодических функций?

Качественно вопрос не изменится, если мы число слагаемых будем считать равным двум, что мы и сделаем.

В решении данного вопроса мы используем одну теорему Люстерника (Успехи матем. наук, т. I, стр. 97).

ТЕОРЕМА. Необходимое и достаточное условие компактности системы почти-периодических функций в смысле равномерной сходимости в выполнении следующих условий:

1. Функции системы ограничены в их совокупности.
2. Функции системы равномерно-равномерно непрерывны.
3. Функции системы обладают при данном $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малом) общим, относительно плотным множеством почти-периодов, принадлежащих числу ε .

Предположим, что весь спектр $\{\lambda_k\}$ функции $f(x)$ распадается на две непересекающиеся совокупности X_1 и X_2 , из которых каждая имеет свой собственный базис, и эти два базиса не пересекаются, а вместе они образуют базис $f(x)$. Элементы первого базиса обозначим через $\{\alpha_k\}$, а элементы второго базиса обозначим через β_j .

Тогда элементы совокупности X_1 будут иметь вид:

$$(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k),$$

а элементы X_2 будут иметь вид

$$(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l),$$

где числа $\mu_1 \dots \mu_k, \nu_1 \dots \nu_l$ целые.

Соответствующие коэффициенты Фурье мы обозначим через:

$$A_{\alpha_1 \mu_1 + \dots + \alpha_k \mu_k} \text{ и } A_{\beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_l \nu_l}$$

Если для данных значений $\mu_1 \dots \mu_k$ число $(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k)$ не является элементом X_1 , то мы будем считать, что $A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k} \equiv 0$.

Аналогичное значение имеет место в отношении значений $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$.

Составим теперь почти-периодический полином Бохнэра-Фейэра для $f(x)$. Это будет:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l \\ n_1 \dots n_k m_1 \dots m_l}}(x) = \\ &= \sum_{\substack{\mu_1 = +n_1 \\ \mu_1 = -n_1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k = +n_k \\ \mu_k = -n_k}} \sum_{\substack{\nu_1 = +m_1 \\ \nu_1 = -m_1}} \dots \sum_{\substack{\nu_l = +m_l \\ \nu_l = -m_l}} \left\{ \prod_{h=1}^{h=k} \left(1 - \frac{|\mu_h|}{n_h} \right) \prod_{j=1}^{j=l} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j} \right) \right\} \times \\ & \times A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k + \nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l} \cdot e^{i(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k + \nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l) x} \end{aligned} \quad (2)$$

В силу нашего предположения относительно структуры спектра функции $f(x)$ следует, что как только хотя бы одно из чисел μ_h не равно нулю, то все числа ν_j должны быть нули и, наоборот, поскольку возможны только коэффициенты вида:

$$A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k} \text{ или } A_{\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l}$$

В силу этого $(k+l)$ кратная сумма распадается очевидно на две суммы соответственно кратностей k и l , а именно:

$$\sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l \\ n_1 \dots n_k m_1 \dots m_l}}(x) = \sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \\ n_1 \dots n_k}}(x) + \sigma_{\substack{\beta_1 \dots \beta_l \\ m_1 \dots m_l}}(x) \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \\ n_1 \dots n_k}}(x) &= \sum_{\substack{\mu_1 = +n_1 \\ \mu_1 = -n_1}} \dots \sum_{\substack{\mu_k = +n_k \\ \mu_k = -n_k}} \left\{ \prod_{h=1}^{h=k} \left(1 - \frac{|\mu_h|}{n_h} \right) \right\} \times \\ & \times A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k} \cdot e^{i(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k) x} a, \\ \sigma_{\substack{\beta_1 \dots \beta_l \\ m_1 \dots m_l}}(x) &= \sum_{\substack{\nu_1 = +m_1 \\ \nu_1 = -m_1}} \dots \sum_{\substack{\nu_l = +m_l \\ \nu_l = -m_l}} \left\{ \prod_{j=1}^{j=l} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j} \right) \right\} \times \\ & \times A_{\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l} \cdot e^{i(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l) x} \end{aligned} \quad (4)$$

но

$$A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k} = M_t \left\{ f(x+t) \cdot e^{-i(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k)(x+t)} \right\}$$

$$A_{\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l} = M_t \left\{ f(x+t) \cdot e^{-i(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l)(x+t)} \right\},$$

где M_t символ среднего значения по аргументу t .

Вставляя эти значения коэффициентов в формулу (4), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n_1 \dots n_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) &= M_t \left\{ f(x+t) \cdot \prod_{h=1}^{h=k} \left[\sum_{\nu_h=-n_h}^{\nu_h=+n_h} \left(1 - \frac{|\nu_h|}{n_h} \right) \cdot e^{-i \nu_h t} \right] \right\} \\ \sigma_{m_1 \dots m_l}^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) &= M_t \left\{ f(x+t) \cdot \prod_{j=1}^{j=l} \left[\sum_{\nu_j=-m_j}^{\nu_j=+m_j} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j} \right) \cdot e^{-i \nu_j t} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Легко проверить простым вычислением, что каждое из выражений в квадратных скобках неотрицательно и что

$$\left. \begin{aligned} M_t \left\{ \prod_{h=1}^{h=k} \left[\sum_{\nu_h=-n_h}^{\nu_h=+n_h} \left(1 - \frac{|\nu_h|}{n_h} \right) \cdot e^{-i \nu_h t} \right] \right\} &= 1 \\ M_t \left\{ \prod_{j=1}^{j=l} \left[\sum_{\nu_j=-m_j}^{\nu_j=+m_j} \left(1 - \frac{|\nu_j|}{m_j} \right) \cdot e^{-i \nu_j t} \right] \right\} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Применяя к правым частям (5) формулу среднего значения и принимая во внимание (6), находим:

$$\left. \begin{aligned} \left| \sigma_{n_1 \dots n_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) \right| &\leq \sup |f(x)| \\ \left| \sigma_{m_1 \dots m_l}^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) \right| &\leq \sup |f(x)| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Совершенно аналогично заменяя в (5)

$$f(x) \text{ через } [f(x+a) - f(x)]$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \left| \sigma_{n_1 \dots n_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x+a) - \sigma_{n_1 \dots n_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) \right| &\leq \sup |f(x+a) - f(x)| \\ \left| \sigma_{m_1 \dots m_l}^{\beta_1 \dots \beta_l}(x+a) - \sigma_{m_1 \dots m_l}^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) \right| &\leq \sup |f(x+a) - f(x)| \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В силу отношений (7) и (8) следует, что системы функций

$$\left\{ \sigma_{n_1 \dots n_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x) \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \sigma_{m_1 \dots m_l}^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) \right\}$$

являются компактными в смысле равномерной сходимости, так как они удовлетворяют всем трем требованиям теоремы Люстерника. Значит, можно выбрать из функций каждой системы соответственно две равномерно сходящиеся последовательности таких функций, которые дают в пределе две почти-периодические функции.

Покажем как осуществить этот выбор. Прежде всего напомним, что, если в

$$\sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l \\ n_1 \dots n_k m_1 \dots m_l}}(x),$$

мы положим

$$n_1 = \dots = n_k = m_1 = \dots = m_l = [(2p)!]^2 \text{ и } k = l = p$$

и заменим числа базиса α_h и β_j соответственно, через

$$\frac{\alpha_h}{(2p)!} \text{ и } \frac{\beta_j}{(2p)!},$$

то получим почти-периодический полином $\sigma_p(x)$, такой что последовательность их $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x), \dots$ равномерно сходится к $f(x)$.

Соответственно такому построению мы получим из полиномов

$$\sigma_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \\ n_1 \dots n_k}}(x) \text{ и } \sigma_{\substack{\beta_1 \dots \beta_l \\ m_1 \dots m_l}}(x)$$

две последовательности полиномов $\{\sigma_p^{(1)}(x)\}$ и $\{\sigma_p^{(2)}(x)\}$ причем:

$$\sigma_p(x) = \sigma_p^{(1)}(x) + \sigma_p^{(2)}(x); \quad (9)$$

В силу компактности системы $\{\sigma_p^{(1)}(x)\}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) мы можем построить такую последовательность:

$$\sigma_{p_j}^{(1)}(x) \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

что она будет равномерно сходиться к некоторой почти-периодической функции $f_1(x)$.

В силу (9) видно, что и $\{\sigma_{p_i}^{(2)}(x)\}$ также окажется сходящейся и притом равномерно к некоторой функции

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Из самой структуры $\sigma_{p_j}^{(1)}(x)$ и $\sigma_{p_j}^{(2)}(x)$ видно, что членами ряда Фурье $f_1(x)$ будут выражения:

$$A_{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k} \cdot e^{i(\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_k \alpha_k) x}$$

а у $f_2(x)$

$$A_{\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l} \cdot e^{i(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_l \beta_l) x}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА:

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n} e^{i \lambda_n x}, \quad (a)$$

изображающий данную почти-периодическую функцию $f(x)$, разбит на две части

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda'_n} e^{i \lambda'_n x} \quad (b) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda''_n} e^{i \lambda''_n x} \quad (c)$$

так, что каждая последовательность чисел $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$ имеет самостоятельный базис и эти два базиса не пересекаются, то ряды (b) и (c) являются соответственно рядам Фурье для двух почти-периодических функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

А. С. КОВАНЬКО

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ И МЕРООПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ

Настоящая статья является продолжением и обобщением статьи аналогичного наименования, опубликованной в Ученых записках Львовского государственного университета (т. XII, серия физико-математическая, вып. 3) [3].

Функция области и множества, построенная в указанной статье, расширяется на такие пары функций, из которых каждая образуется в результате вычитания двух разрывных функций, а не непрерывных, как это было сделано ранее. Тем самым расширяется класс поверхностей, квадратуемых нашим методом.

§ 1. ОДНОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ В ДРУГУЮ

Пусть нам дана в плоскости переменных (u, v) некоторая односвязная область Ω и на ней определена пара функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$. Пусть граница области Ω есть непрерывная квадратуемая кривая, которую мы могли бы даже считать в некоторых случаях гладкой кривой.

Известно, что всякая граничная точка Ω достижима изнутри с помощью движения по некоторой квадратуемой кривой Жордана, и если, в частности, граница области Ω спрямлена, то такое движение возможно с помощью спрямляемой кривой (В. Голубев).

Предположим, что Ω' есть другая односвязная область, целиком лежащая внутри Ω и не имеющая с ней общих граничных точек. Мы предположим, что Ω' преобразовывается помощью соответствия

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} (T),$$

(которое гомеоморфно) в некоторую область S' плоскости (x, y) , причем это соответствие прямое, т. е. когда (u, v) описывает границу Ω' в положительном направлении, то (x, y) описывает границу S' также в положительном направлении.

Для этого очевидно необходимо, чтобы функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ были бы всюду непрерывны внутри Ω и, следовательно, равномерно непрерывны внутри Ω' .

Пусть E есть какое-нибудь B множество в области Ω , а $\Omega'E$ его пересечение с областью Ω' . Очевидно, что $\Omega'E$ есть также множество типа B .

Пусть E есть образ E помощью преобразования (T) . Очевидно тогда, что $S' \cdot \varepsilon$ есть образ $\Omega' \cdot E$ и, следовательно, $S' \cdot \varepsilon$ есть множество B того же класса как и $\Omega' \cdot E$.

Предположим, теперь, что Ω' пробегает совокупность областей $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$, тогда их образы образуют также последовательность областей $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, где в частности, могло бы случиться, что S есть вся плоскость (x, y) .

Однако мы наложим следующее ограничение на наше преобразование, а именно: мы предположим, что внешняя мера S_n остается ограниченной при неограниченном возрастании n .

Мы скажем тогда, что преобразование (T) однозначное и интегрально-ограниченное. Тогда последовательность $\Omega_1 \cdot E \subset \Omega_2 \cdot E \subset \Omega_3 \cdot E \subset \dots$ преобразуется в последовательность $S_1 \cdot E \subset S_2 \cdot E \subset S_3 \cdot E \subset \dots$. Мы условились ранее (см. упомянутую нашу статью) ввести следующее обозначение

$$|S_n \cdot E| = [\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega_n}$$

Очевидно, что последовательность $\{[\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega_n}\} (n=1, 2, 3, \dots)$ есть неубывающая последовательность, и потому в силу ограниченности внешней меры S_n следует, что и величины $[\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega_n} (n=1, 2, 3, \dots)$ ограничены в их совокупности, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega_n}$ существует. Мы условимся его обозначать через $[\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega}$ или, поскольку $E \cdot \Omega = E$, просто через $[\varphi, \psi]_E$.

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi, \psi]_{E \cdot \Omega_n} = [\varphi, \psi]_E$. Это есть первое обобщение нашего символа. Отсюда следует, что все свойства символа $[\varphi, \psi]_E$, полученные в нашей предшествующей статье, переносятся на наше новое обобщение, а именно:

Если имеется два преобразования

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} (T_1) \quad \left. \begin{aligned} x &= \varphi_2(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} (T_2)$$

однозначные и интегрально ограниченные, то и преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} (T_3)$$

будет также преобразованием того же типа и

$$[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E + [\varphi_2, \psi]_E$$

Примечание. Отсюда следует более общее заключение в отношении обеих функций, а именно:

$$1) \quad \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i, \sum_{j=1}^m \psi_j \right]_E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\varphi_i, \psi_j]_E,$$

если каждая пара (φ_i, ψ_j) дает однозначное интегрально-ограниченное преобразование.

$$2) [\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2}, \text{ если } E_1 \cdot E_2 = 0.$$

$$3) [a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E, \text{ где } a > 0, b > 0 = (\text{const}).$$

$$4) [u, v]_E = |E|.$$

5) Мы теперь скажем, что пара (φ, ψ) однозначно интегрально-ограниченная, если соответствующее преобразование обладает этим свойством. Если соответствие прямое, то добавляем еще эпитет „прямая пара“. Очевидно, что тогда $(-\varphi, \psi)$ будет обратной парой, также и $(\varphi, -\psi)$ и (ψ, φ) .

Для обратной пары мы условимся определить наш символ следующим образом. Если (φ, ψ) обратная пара, то (ψ, φ) прямая; мы положим тогда $[\varphi, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$. На этом основании мы можем писать

$$[\varphi, \varphi]_E = 0.$$

2. ОГРАНИЧЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ

Пусть нам даны две прямые пары (φ_1, ψ) и (φ_2, ψ) (сохраняем все прежние обозначения). Составим новую пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$, которая уже не будет однозначной парой. Пусть первые две пары интегрально-ограниченные. Тогда мы назовем пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi)$ также интегрально-ограниченной.

Обобщим наш символ на эту пару следующим образом:

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_E = [\varphi_1, \psi]_E - [\varphi_2, \psi]_E$$

Таким образом это равенство есть предельное равенство, полученное из равенства

$$[\varphi_1 - \varphi_2, \psi]_{E \cdot \varrho_n} = [\varphi_1, \psi]_{E \cdot \varrho_n} - [\varphi_2, \psi]_{E \cdot \varrho_n},$$

введенного в цитированной нами статье. Отсюда и все свойства символа сохраняются без изменения.

Возьмем более общий символ. Пусть пары (φ_1, ψ_1) , (φ_1, ψ_2) , (φ_2, ψ_1) , (φ_2, ψ_2) однозначные и интегрально-ограниченные. Составим пару $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$. Мы положим

$$[(\varphi_1 - \varphi_2), (\psi_1 - \psi_2)]_E = [\varphi_1, \psi_1]_E + [\varphi_2, \psi_2]_E - [\varphi_1, \psi_2]_E - [\varphi_2, \psi_1]_E.$$

Прежде всего этот обобщенный символ независим от выбора отдельных функций $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ и ψ_2 , а только от разностей $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi_1 - \psi_2$.

Символ $[\varphi, \psi]_E$ для ограниченной пары обладает, таким образом, следующими свойствами:

$$1) [\varphi, \psi]_{E_1} + [\varphi, \psi]_{E_2} = [\varphi, \psi]_{E_1 + E_2} \text{ если } E_1 \cdot E_2 = 0$$

$$2) [a\varphi, b\psi]_E = ab[\varphi, \psi]_E, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — постоянные}$$

$$3) \left[\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right]_E = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k b_i [\varphi_k, \psi_i]_E$$

4) $[a, \psi]_E = [\varphi, a]_E = 0$, где a постоянное.

5) $[\varphi, \varphi]_E = 0$.

6) $[\varphi_1, \psi]_E = -[\psi, \varphi]_E$.

7) $[u, v]_E = |E|$.

Предположим теперь, в частности, что функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ равномерно-непрерывны, включая и границы области, так что каждый образ ограниченного множества будет также ограничен. Если области Ω соответствует множество S , то в этом случае S ограничено.

Отметим, что вообще пары (φ_1, ψ_1) , (φ_2, ψ_1) , (φ_1, ψ_2) , (φ_2, ψ_2) могут быть прямыми интегрально-ограниченными, причем $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ не обязательно непрерывны, но тем не менее функции $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\psi_1 - \psi_2$ будут всюду непрерывны, включая и границу области Ω . Мы скажем, что в этом частном случае пара $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$ будет называться просто ограниченной (или локально-ограниченной).

3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ СИМВОЛА $[\varphi, \psi]_E$

Пусть теперь область Ω распадается на счетное или конечное множество областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n, \dots$ такого типа, что данная пара непрерывных функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ локально-ограничена в каждой области Ω_i в том смысле, как это было указано в § 2.

Предположим, что E_i какое-либо B множество в области Ω_i и что ряд $\sum_{(i)} |[\varphi, \psi]|_{E_i}$, сходящийся при любом выборе множеств E_i . Тогда мы введем следующее обобщение нашего символа

$$[\varphi, \psi]_E = \sum_{(i)} [\varphi, \psi]_{\Omega_i E}$$

Легко проверить, что все свойства символа, перечисленные в § 2, переносятся без изменения на этот вновь обобщенный символ. Все это совершается так: сначала формулы § 2 применяются к множествам $\Omega_i E$, а затем эти формулы почленно суммируются.

Отметим, что в каждой из областей Ω_i имеем $\varphi = \varphi_1^{(i)} - \varphi_2^{(i)}$ и $\psi = \psi_1^{(i)} - \psi_2^{(i)}$, где пары $(\varphi_1^{(i)}, \psi_1^{(i)})$, $(\varphi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $(\varphi_2^{(i)}, \psi_1^{(i)})$ и $(\varphi_2^{(i)}, \psi_2^{(i)})$ — прямые однозначные интегрально-ограниченные, а потому вообще разрывные на границе Ω_i .

Особенно интересен тот частный случай, когда пара (φ, ψ) будет прямой однозначной интегрально-ограниченной в каждой из областей.

Случай локальной ограниченности здесь, очевидно, возможен только тогда, когда имеет место свойство локальной ограниченности в каждой из областей Ω_i .

Пример:

$$x + yi = (u + iv)^n \quad (i = \sqrt{-1}),$$

где n — натуральное, Ω — круг ($u^2 + v^2 = 1$), тогда S есть также круг ($x^2 + y^2 = 1$). Если мы разобьем круг Ω на равные секторы в количестве

n , то каждый из них можно назвать областями $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$. Каждая область Ω_i (не считая ее границы) отображается на область S , образованную внутренней частью круга за вычетом одного радиуса. Поэтому, если $E_1, E_2, \dots, E_n$ будут множествами, расположенными строго внутри соответствующих областей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$, то их образы $E_1, E_2, \dots, E_n$ будут вообще взаимно налагаться друг на друга; тем не менее отображение всякой области Ω'_i , лежащей целиком внутри Ω_i , совершается однозначно на область S' , лежащую целиком внутри S .

§ 4. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ, ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ВАРИАЦИИ

Пусть $E \subset \Omega$ некоторое фиксированное множество, а $\tilde{E} \subset E$ другое переменное B множество.

Рассмотрим следующие величины

$$\bar{V}[\varphi, \psi]_E = \sup_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{E}} \quad -V[\varphi, \psi] = \inf_{\tilde{E} \subset E} [\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$$

Легко проверить, что $\bar{V} \geq$ и $-V \leq 0$. Первая из них называется положительной, а вторая отрицательной вариацией функции множества $[\varphi, \psi]_E$. Это величины конечные, как это видно из того факта, что $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ является ограниченной функцией множества $\tilde{E}$ (см. § 3).

Введем еще в рассмотрение величину: $V[\varphi, \psi]_E$

$$V[\varphi, \psi]_E = \bar{V}[\varphi, \psi]_E + V[\varphi, \psi]_E.$$

Эта величина называется полной вариацией от $[\varphi, \psi]_E$.

Отметим без доказательства ряд известных свойств функций множеств с ограниченной вариацией:

- 1) $[\varphi, \psi]_E = \bar{V}[\varphi, \psi]_E - V[\varphi, \psi]_E$
- 2) $\bar{V}[\varphi, \psi]_{E_1 + E_2} = \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_1} + \bar{V}[\varphi, \psi]_{E_2}$ если $E_1 \cdot E_2 = 0$.
- 3) $\bar{V}[\varphi_1 + \varphi_2, \psi] \leq \bar{V}[\varphi_1, \psi]_E + \bar{V}[\varphi_2, \psi]_E$.

Также аналогичные свойства для $\underline{V}$ и для V .

Из свойств функций областей и множеств вытекает еще следующее.

Пусть в области Ω имеется точка (u, v) и окрестность (в виде окружности) этой точки $\delta_\rho(u, v)$, где ρ означает радиус этой окружности.

Рассмотрим какое-либо множество E ($|E| > 0$), такое, что его мера > 0 в любой окрестности $\delta_\rho(u, v)$ (т. е. при любом ρ). Больше того, предположим, что (u, v) есть точка плотности для множества E , т. е.

$$\frac{|E \cdot \delta_\rho(u, v)|}{|\delta_\rho(u, v)|} = \frac{|E \cdot \delta_\rho(u, v)|}{\pi \rho^2} \text{ стремится к } 1 \text{ при } \rho \rightarrow 0.$$

Рассмотрим величину

$$\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta\rho}}{\pi\rho^2} = \frac{[\varphi, \psi]_{E\delta\rho}}{[u, v]_{\delta\rho}}$$

Пусть при ρ , стремящемся к пределу 0, величина $\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta\rho}}{[u, v]_{\delta\rho}}$ или, что

то же, $\frac{[\varphi, \psi]_{E\delta\rho}}{[u, v]_{E\delta\rho}}$ стремится к определенному пределу, независимо от выбора (u, v) , лишь бы (u, v) была точкой плотности E . Тогда мы назовем этот предел обобщенным якобианом и обозначим его через $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$. Очевидно, что

$$\frac{D[\varphi_1, \psi]}{D[u, v]} + \frac{D[\varphi_2, \psi]}{D[u, v]} = \frac{D[\varphi_1 + \varphi_2, \psi]}{D[u, v]}$$

Отметим следующие свойства:

4) $\frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$ существует почти всюду в множестве E .

5) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{V[\varphi, \psi]_{E\delta\rho}}{\pi\rho^2} = \left| \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right|$ почти всюду в множестве E .

Определение. $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ называется абсолютно-непрерывной функцией $\tilde{E} \subset E$, если, как бы мало ни было $\epsilon > 0$, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}| < \epsilon$, если $|\tilde{E}| < \delta$. Пара (φ, ψ) называется в этом случае абсолютно-непрерывной.

6) Если $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ абсолютно-непрерывна, то $\overline{V}$, $\underline{V}$ и V также абсолютно-непрерывны.

7) Необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности $[\varphi, \psi]_{\tilde{E}}$ состоит в том, что

$$[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \int \int_{\tilde{E}} \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \cdot du dv.$$

В этом случае мы также имеем, что

$$V[\varphi, \psi]_{\tilde{E}} = \int \int_{\tilde{E}} \left| \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \right| \cdot du dv$$

§ 5. РАССМОТРЕНИЕ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

а) Пусть имеется пара $[u, f(u, v)]$. Рассмотрим преобразование внутри квадрата

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = u \\ y = f(u, v) \end{array} \right\} \cdot T,$$

где $f(u, v)$ есть возрастающая функция v при всяком u и непрерывная во всяком интервале $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ и может быть разрывная при $v = 0$ и $v = 1$, причем может быть, что $f(u, 0) = -\infty$, а $f(u, 1) = +\infty$, или же только одна из величин $f(u, 0)$ или $f(u, 1)$ конечна.

Потребуем еще, чтобы образ нашего квадрата при нашем преобразовании (T) был бы областью, имеющей ограниченную внешнюю меру. Тогда преобразование (T) будет однозначное и интегрально-ограниченное. Очевидно, что для этого необходимо (но недостаточно), чтобы множество значений u в отрезке $[0,1]$, для которых $f(u, v)$ или $f(u, 1)$ (или оба вместе) бесконечны, имело бы меру $=0$.

Обозначим через E_u это множество. Итак $|E_u| = 0$.

Предположим теперь наличие более общего условия.

б) Пусть $f(u, v) = f_1(u, v) - f_2(u, v)$, где $f_1(u, v)$ и $f_2(u, v)$ — возрастающие функции v для каждого значения u непрерывные в любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$.

Предположим теперь, что множество E_u для обеих функций одно и то же с той целью, чтобы $f(u, v)$ была бы функцией непрерывной при каждом u как функция v . Значит, для $u \notin E_u$ функция $f(u, v)$ есть разность двух непрерывных возрастающих функций v и поэтому $f(u, v)$ есть функция v ограниченной вариации; наоборот, при $u \in E_u$ этого вообще не будет.

Значит, если мы обозначим полную вариацию $f(u, v)$ как функции v через $W_v(u)$, то $W_v(u)$ будет конечной величиной вне множества E_u , т. е. почти всюду на $[0 \leq u \leq 1]$.

Обозначим также через $W_v^+(u)$ и $-W_v^-(u)$ ее положительную и отрицательную вариации. Рассмотрим два преобразования

$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = f_1(u, v) \end{array} \right\} (T_1) \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} x = u \\ y = f_2(u, v) \end{array} \right\} (T_2)$$

Пусть дано некоторое B множество $E \subset \Omega$ и пусть $E_1^{(u)}$ и $E_2^{(u)}$ образы его сечений данной прямой $u = \text{const}$, которым соответствуют через (T_1) и (T_2) конечные величины, исключая, быть может, множества меры нуль (а именно — исключая множества E_u); тогда очевидно, что

$$[u, f_1(u, v)]_E = \int_0^1 |E_1^{(u)}| du \quad \text{и} \quad [u, f_2(u, v)]_E = \int_0^1 |E_2^{(u)}| du,$$

поэтому

$$[u, f(u, v)]_E = \int_0^1 \{ |E_1^{(u)}| - |E_2^{(u)}| \} du.$$

Возьмем теперь $E = \Omega$, тогда

$$[u, f_1(u, v)]_\Omega = \int_0^1 [f_1(u, 1) - f_1(u, 0)] du$$

и

$$[u, f_2(u, v)]_\Omega = \int_0^1 [f_2(u, 1) - f_2(u, 0)] du$$

Откуда, вычитая одно равенство из другого, получим

$$[u, f(u, v)]_\Omega = \int_0^1 [f(u, 1) - f(u, 0)] du,$$

но

$$f(u, 1) - f(u, 0) = W_v^+(u) - W_v^-(u)$$

Значит

$$[u, f(u, v)]_{\Omega} = \int_0^1 W_v^+(u) du - \int_0^1 W_v^-(u) du.$$

Легко также проверить, что

$$\overline{V}[u, f(u, v)]_{\Omega} = \int_0^1 W_v^+(u) du.$$

$$\underline{V}[u, f(u, v)]_{\Omega} = \int_0^1 W_v^-(u) du.$$

Следовательно, сложив последние равенства, получим

$$V[u, f(u, v)]_{\Omega} = \int_0^1 W_v(u) du$$

Значит, мы приходим к следующему заключению. Для того, чтобы пара $[u, f(u, v)]$ была интегрально-ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^1 W_v(u) du$ существовал.

Совершенно аналогично трактуется случай пары $[f(u, v), v]$; она интегрально-ограниченная, если $\int_0^1 W_u(v) dv$ существует. Здесь $W_u(v)$ есть полная вариация $f(u, v)$ как функции u при данном значении v .

Это как раз то условие, которое дает Товнелли в вопросе квадратуемости поверхностей $z = f(x, y)$ о смысле Лебега, называя это условие свойством ограниченности полной вариации функции двух переменных [2].

Отметим еще, что

$$V[u, f(u, v)]_E = \int_0^1 W_v^{E_v}(u) du$$

$$V[f(u, v), v]_E = \int_0^1 W_u^{E_u}(v) dv,$$

где $W_v^{E_v}(u)$ означает полную вариацию $f(u, v)$ к к функции u при данном v по множеству E_v , полученному от сечения E прямой $v = wnst$. Аналогичный смысл имеет $W_u^{E_u}(v)$.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть нам дана поверхность S , заданная уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned} \right\} (S) \quad (u, v) \in \Omega$$

где φ , ψ и χ непрерывные функции в области Ω , причем пары (ψ, χ) , (χ, φ) и (φ, ψ) интегрально-ограничены Ω .

Пусть E есть какое-либо B множество. Рассмотрим следующий вектор

$$R_E = [\psi, \chi]_E \cdot \bar{i} + [\chi, \varphi]_E \cdot \bar{j} + [\varphi, \psi]_E \cdot \bar{k}.$$

Пусть E есть круг δ_ρ радиуса ρ и пусть

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[\psi, \chi]_{\delta_\rho}}{|\delta_\rho|}; \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[\chi, \varphi]_{\delta_\rho}}{|\delta_\rho|} \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[\varphi, \psi]_{\delta_\rho}}{|\delta_\rho|}$$

существует одновременно. Это имеет место почти всюду в Ω . Эти величины мы условились обозначать соответственно через

$$\frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]}, \quad \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \quad \text{и} \quad \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]}$$

Тогда вектор

$$\frac{D[\psi, \chi]}{D[u, v]} \bar{i} + \frac{D[\chi, \varphi]}{D[u, v]} \bar{j} + \frac{D[\varphi, \psi]}{D[u, v]} \bar{k}$$

носит название нормального вектора к поверхности.

Легко проверить, что этот вектор независим от выбора системы координат так же точно, как и вектор R_E . Мы этого не доказываем здесь, отсылая к доказательству, данному в указанной нами статье.

Составим затем величину длины вектора

$$|R_E| = \sqrt{[\varphi, \psi]_E^2 + [\chi, \varphi]_E^2 + [\psi, \chi]_E^2} = \{\varphi, \psi, \chi\}_E$$

Разобьем Ω на n B множеств $E_1, E_2, \dots, E_n$ и рассмотрим точную верхнюю границу выражения:

$$\sum_{k=1}^n \{\varphi, \psi, \chi\}_{E_k}$$

при всевозможных выборах множеств $E_1, \dots, E_n$ и n . Эта граница и будет мерой поверхности S (соответствующей области Ω).

Необходимое и достаточное условие квадратуемости поверхности в нашем смысле состоит в том, что пары (ψ, χ) , (χ, φ) и (φ, ψ) были бы интегрально-ограниченными. Это обстоятельство вытекает из очевидного сложного неравенства

$$\left. \begin{array}{l} V(\psi, \chi)_{\Omega} \\ V(\chi, \varphi)_{\Omega} \\ V(\varphi, \psi)_{\Omega} \end{array} \right\} \leq \sum_1^n \sqrt{\{V[\psi, \chi]_{E_k}\}^2 + \{V[\chi, \varphi]_{E_k}\}^2 + \{V[\varphi, \psi]_{E_k}\}^2} \leq V[\psi, \chi]_{\Omega} + \\ + V[\chi, \varphi]_{\Omega} + V[\varphi, \psi]_{\Omega},$$

а также из того факта, что мера поверхности определяется еще как точная верхняя граница величины:

$$\sum_1^n \sqrt{\{V[\psi, \chi]_{E_k}\}^2 + \{V[\psi, \varphi]_{E_k}\}^2 + \{V[\varphi, \psi]_{E_k}\}^2}$$

что доказывается чрезвычайно просто.

Для частного случая поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, следует, что мера поверхности может быть определена как точная верхняя граница величины:

$$\sum_1^n \sqrt{|E_k|^2 + \left\{ \int_0^1 W_u^{E_{ku}}(u) du \right\}^2 + \left\{ \int_0^1 W_v^{E_{kv}}(v) dv \right\}^2}.$$

Смысл входящих сюда обозначений был определен в конце § 5. Здесь $x = u$ и $y = v$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько. — О некоторых непрерывных преобразованиях плоскости в плоскость и мероопределении поверхности. Уч. зап. Львов. университета, т. XII, вып. 3, 1949.
2. Tonelli L. — Sulla quadratura delle superficie. Atti Accad. Naz. Lincei (6). 3 (357 — 363), (445 — 450), (638 — 658) 1926.

С. Д. БЕРМАН

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ПАССИВНОЙ ФОРМЕ

ВВЕДЕНИЕ

В различных разделах теории непрерывных групп возникает необходимость рассмотрения бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных от конечного числа неизвестных функций и независимых переменных с аналитическими в окрестности некоторой точки левыми частями вида

$$\left\{ f_{\alpha} \left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} \dots \right) = 0 \right\} \quad (1)$$

(α — индекс, пробегающий множество любой мощности).

Относительно такой системы в первую очередь встает вопрос о возможности ее сведения к хорошо изученным типам конечных систем.

В 1894 году в работе [4], посвященной теории дифференциальных инвариантов, Тресс впервые высказал теорему о том, что всякая бесконечная система дифференциальных уравнений вида (1) эквивалентна конечной. Доказательство Тресса совершенно неудовлетворительно с современной точки зрения. Для случая, когда левые части уравнений системы (1) представляют собой полиномы относительно неизвестных функций и их производных, Ритт [3] показал, что система либо несовместна, либо содержит эквивалентную себе конечную систему.

В настоящей работе рассматривается общий случай аналитических левых частей; при приведении к пассивной форме допускается сдвиг начальной точки. При этом дополнение к множеству точек, в которых (1) эквивалентна пассивной системе, оказывается нигде не плотным на дифференциальном многообразии системы (1).

1. УПОРЯДОЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Для изучения бесконечной системы дифференциальных уравнений типа (1) весьма полезным оказывается упорядочение множества Γ всевозможных частных производных от неизвестных функций по независимым переменным. Предложения, сходные с приводимыми ниже без доказательства теоремами об упорядочении производных и дифференциальных форм, рассматривались различными авторами. Такого рода теоремы можно найти, например, у Ритта [3].

Производную $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} y_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}}$ будем обозначать символом

$$D = (i, k_1, \dots, k_m)$$

Определение 1. Будем говорить, что $D_1 = (i^{(1)}, k_1^{(1)}, \dots, k_m^{(1)})$ больше $D_2 = (i^{(2)}, k_1^{(2)}, \dots, k_m^{(2)})$, если первая из необращающихся в нуль разностей $(i^{(1)} - i^{(2)}), (k_1^{(1)} - k_1^{(2)}), \dots, (k_m^{(1)} - k_m^{(2)})$ положительна.

Непосредственно видно, что упорядочение Γ , согласно определению (1), обладает следующими свойствами:

1) Для любых двух различных производных D_1 и D_2 имеет место одно и только одно из соотношений:

$$D_1 < D_2 \text{ или } D_1 > D_2.$$

2) Если $D_1 < D_2$ и $D_2 < D_3$, то $D_1 < D_3$ (транзитивность).

3) $D_\alpha < \frac{\partial D_\alpha}{\partial x_i} (i = 1, \dots, m)$, т. е. дифференцирование „увеличивает“ производную.

4) Если $D_1 < D_2$, то $\frac{\partial D_1}{\partial x_i} < \frac{\partial D_2}{\partial x_i} (i = 1, \dots, m)$ (одинаковое дифференцирование не нарушает порядка).

В дальнейшем будут использованы только эти четыре свойства нашего упорядочения. Поэтому всякое другое упорядочение, удовлетворяющее условиям 1) — 4), также подходит для наших целей.

Имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. Всякая убывающая последовательность производных $D_1 > D_2 > D_3 > \dots$ содержит только конечное число членов.

Таким образом, определение 1 превращает Γ во вполне упорядоченное множество.

Определение 2. Условимся называть производную $D_1 = (i^{(1)}, k_1^{(1)}, \dots, k_m^{(1)})$ кратной производной $D_2 = (i^{(2)}, k_1^{(2)}, \dots, k_m^{(2)})$, если

$$i^{(1)} - i^{(2)} = 0; k_j^{(1)} - k_j^{(2)} \geq 0; (j = 1, \dots, m).$$

Если D_1 кратна D_2 , то D_1 можно получить из D_2 дополнительным дифференцированием (хотя бы нулькратным).

Определение 3. Всякое множество производных $M = \{D_1, \dots, D_s, \dots\}$, такое, что для любых $D_i, D_j \in M (i \neq j)$ D_i и D_j не кратны друг другу, назовем отмеченным множеством.

ТЕОРЕМА 2. Отмеченное множество производных может содержать только конечное число элементов.

Доказательство этого предложения очевидно.

Определение 4. Назовем дифференциальной формой любую комплекснозначную функцию f_α от независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, неизвестных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ и конечного числа их производных.

Упорядочение множества производных с выполнением условий 1) — 4) естественным образом приводит к полуупорядочению множества дифференциальных форм. Будем обозначать старшую производную произвольной дифференциальной формы f через $L(f)$. Если f не зависит* от неизвестных функций $y_1, \dots, y_n$, то положим $L(f) = 0$.

Определение 5. Будем говорить, что ранг формы f_1 меньше ранга формы f_2 и обозначать это записью $R(f_1) < R(f_2)$, если $L(f_1) < L(f_2)$.

* Когда мы говорим, что форма f зависит от неизвестных функций, то подразумевается, что они могут входить в f под знаком дифференцирования.

Если $L(f_1) = L(f_2)$, мы будем считать, что $R(f_1) = R(f_2)$. В частности, все дифференциальные формы, не содержащие неизвестных функций, имеют одинаковый ранг.

Согласно определению 5, всякое соотношение порядка между дифференциальными формами сводится к такому же соотношению между их старшими производными. Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Во всяком непустом множестве дифференциальных форм существует форма наименьшего ранга.

Определение 6. Форму f_2 назовем приведенной по отношению к f_1 , если f_2 не содержит производных, кратных $L(f_1)$.

Определение 7. Будем называть цепочкой последовательность $Q = \{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ дифференциальных форм, обладающую следующими свойствами: 1) Если $s = 1$, то $f_1 \neq 0$. 2) При $s > 1$ f_1 зависит от неизвестных функций; при этом для $i > j$ f_i приведена по отношению к f_j и $R(f_j) < R(f_i)$.

Нетрудно видеть, что всякая цепочка может содержать только конечное число членов. Множество всех цепочек также можно упорядочить.

Определение 8. Пусть даны две цепочки $Q_1 = \{f_1, \dots, f_r\}$ и $Q_2 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$. Мы скажем, что ранг Q_1 больше ранга Q_2 и будем обозначать это записью $R(Q_1) > R(Q_2)$, если 1) существует такое натуральное число j , что $R(f_i) = R(\varphi_i)$ при $i = 1, \dots, j-1$ и $R(f_j) > R(\varphi_j)$, либо 2) $s > r$ и $R(f_i) = R(\varphi_i)$ для $i = 1, \dots, r$.

Легко доказывается транзитивность такого упорядочения цепочек.

Из любого множества L дифференциальных форм, содержащего ненулевые формы, можно выделить последовательность форм, являющуюся цепочкой.

В качестве цепочки можно взять, например, любую форму $\varphi \neq 0$ ($\varphi \in L$).

Определение 9. Пусть дано множество L дифференциальных форм. Цепочку наименьшего ранга, которую можно составить из форм L , назовем разрешающей цепочкой в L .

Определение 10. Пусть $Q = \{f_1, \dots, f_s\}$ — цепочка и φ приведена по отношению ко всем f_i ($i = 1, \dots, s$). Условимся в этом случае говорить, что φ приведена по отношению к Q .

ТЕОРЕМА 4. Пусть L — множество дифференциальных форм, $Q = \{f_1, \dots, f_s\}$ — разрешающая цепочка в L и $L \supset \varphi \neq 0$. Тогда φ не является приведенной по отношению к Q .

Доказательство. Пусть форма φ приведена по отношению к Q . Тогда $R(\varphi) > R(f_1)$, так как в противном случае φ сама была бы цепочкой меньшего ранга, чем Q . Продолжив это рассуждение, мы придем к выводу, что $R(\varphi) > R(f_s)$, но тогда $\tilde{Q} = \{f_1, \dots, f_s, \varphi\}$ — цепочка, меньшего ранга, чем ранг разрешающей цепочки Q в L , составленная из форм L . Полученное противоречие доказывает теорему.

II. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы переходим к рассмотрению систем дифференциальных уравнений в частных производных от n неизвестных функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ m независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$\left\{ f_\alpha \left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} \dots \right) = 0 \right\} \quad (1)$$

(α пробегает множество любой мощности).

Так как множество Γ (независимых переменных, неизвестных функций и их всевозможных производных) счетно, то мы можем так расположить его элементы в бесконечную последовательность: $\Gamma = \{u_1, u_2, \dots\}$, что $u_i = x_i$ ($i = 1, \dots, m$), $u_{m+k} = y_k$ ($k = 1, \dots, n$).

В дальнейшем относительно систем вида (1) мы будем предполагать выполненными следующие условия:

а) Для всех α f_α — дифференциальные формы, аналитические по совокупности входящих в них аргументов (рассматриваемых как независимые переменные) в окрестности некоторой начальной точки $\{u_1^0, u_2^0, \dots\}$ бесконечномерного пространства.

б) $f_\alpha(u_1^0, u_2^0, \dots) = 0$.

в) Существуют такие положительные числа r_i , что ряд $f_\alpha(u_1, u_2, \dots)$ для всех α сходится при $|u_i - u_i^0| < r_i$.

Определение 11. Решением системы (1) назовем систему функций $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$), аналитических в области Ω : $|x_j - x_j^0| < k_j$, $k_j \leq r_j$, $x_j = u_j$ ($j = 1, \dots, m$) и обладающих свойствами:

1. Для всех $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega$ точка $(x_1, \dots, x_m, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots, u_s, \dots)$ такова, что $|u_m - u_m^0| < r_m$ (m пробегает натуральный ряд).

2. Для $(x_1, \dots, x_m) \in \Omega$ функции φ_i при подстановке в систему (1) вместо y_i обращают систему (1) в тождество.

Определение 12. Пусть имеются две системы уравнений

$$\text{I } \{f_\alpha(\dots)\} = 0 \text{ и II } \{\varphi_\beta(\dots)\} = 0,$$

заданные в окрестности общей начальной точки $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_s^0, \dots)$ и удовлетворяющие условиям а), б), в). Назовем эти системы эквивалентными в точке $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_s^0, \dots)$, если в некоторой области $|x_i - x_i^0| < k_i$, $x_i = u_i$ ($i = 1, \dots, m$) всякое решение системы I является решением системы II и наоборот.

Определение 13. Аналитическим нулем системы (1) будем называть всякую точку бесконечномерного пространства $(u_1, u_2, \dots, u_s, \dots)$, $|u_j - u_j^0| < r_j$ ($j = 1, \dots, n$), обращающую в нуль все уравнения системы (1). Множество A всех аналитических нулей системы (1) назовем аналитическим многообразием системы.

Определение 14. Условимся называть дифференциальным нулем системы точку $\{u_i'\}$, обладающую следующими свойствами:

1) $\{u_i'\}$ — аналитический нуль системы,

2) существуют функции $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$), обращающие уравнения (1) в некоторой области Ω : $|x_j' - x_j| < k_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$)

теоремы существования и единственности решения при заданных начальных условиях, В связи с этим представляет определенный интерес изучение возможности приведения системы (1) к эквивалентной ей пассивной системе. Отметим, что вопрос о приведении к пассивной форме любой конечной аналитической системы был детально изучен выдающимся советским математиком Н. М. Гюнтером.

ЛЕММА 1. Пусть система (1), удовлетворяющая условиям а), б), в), содержит уравнения вида

$$D_1 = f_1(\dots), D_2 = f_2(\dots), \dots, D_s = f_s(\dots), \quad (3)$$

разрешенные относительно старших производных, причем $M = \{D_1, \dots, D_s\}$ — отмеченное множество. Тогда с помощью уравнений (3) можно в (1) исключить все кратные производные D_i ($i = 1, \dots, s$). Иными словами, система (1) эквивалентна системе, уравнения которой (за исключением уравнений (3) не содержат производных, кратных D_i ($i = 1, \dots, s$).

Доказательство. Возьмем любое уравнение системы (1) $f_i = 0$, не принадлежащее системе (3), и покажем, как из него исключить все кратные производных D_i ($i = 1, \dots, s$).

Пусть f_i содержит такие производные. Обозначим старшую из них через L_1 . Пусть L_1 кратна D_r

$$D_r = (i, k_1^{(r)}, \dots, k_m^{(r)}), L_1 = (i, k_1, \dots, k_m).$$

Имеет место соотношение

$$\frac{\partial^{(k_1 - k_1^{(r)}) + \dots + (k_m - k_m^{(r)})} D_r}{\partial x_1^{(k_1 - k_1^{(r)})} \dots \partial x_m^{(k_m - k_m^{(r)})}} = L_1 = \frac{\partial^{(k_1 - k_1^{(r)}) + \dots + (k_m - k_m^{(r)})} f_r}{\partial x_1^{(k_1 - k_1^{(r)})} \dots \partial x_m^{(k_m - k_m^{(r)})}}. \quad (4)$$

Выполним в правой части соотношения (4) дифференцирование и подставим в форму f_i вместо L_1 его выражение (4).

Мы получим форму f_i' , не содержащую L_1 . Если f_i' не содержит производных, кратных D_i ($i = 1, \dots, s$), то процесс исключения произведен. В противном случае, обозначим через L_2 старшую из этих производных. Тогда $L_1 > L_2$. Действительно, новые производные в f_i' могли появиться только из (4), но все производные в правой части (4) меньше, чем L_1 . Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность производных

$$L_1 > L_2 > L_3 > \dots,$$

которая неминуемо должна оборваться. Таким образом, из любой формы $f_i \in (3)$ с помощью (3) может быть произведено исключение производных, кратных D_i ($i = 1, \dots, s$).

Для дальнейшего представляется удобным рассматривать аналитическое и дифференциальное многообразия системы (1) как подмножества топологического произведения счетного числа одномерных комплексных пространств (см. [6], стр. 392). При этом A и $\mathfrak{M}$ топологизируются естественным образом. Топологизированное дифференциальное многообразие системы (1) будем обозначать через R .

Отметим, что R метризуемо. Окрестности точек этого пространства условимся обозначать $U^r(z)$, $V^r(z)$ и т. д.

Определение 16. Пусть $z = \{u_i\} \in R$. Мы скажем, что дифференциальная форма φ содержит $\mathfrak{M}$ в окрестности z , если φ аналитична в этой точке и обращается в нуль в некоторой окрестности $U^r(z)$.

Определение 17. Пусть $z = \{u_i\}$ — дифференциальный нуль совместной системы вида (1), удовлетворяющей условиям а), б), в).

Присоединим к множеству F всех форм f_α из (1) формы, содержащие $\mathfrak{M}$ в точке z . Получившееся множество дифференциальных форм обозначим $\bar{F}_z$. Разрешающую цепочку в $\bar{F}_z$ будем называть разрешающей цепочкой в точке z для системы (1).

Отметим, что все формы разрешающих цепочек системы (1) для всех $z \in R$ обязательно будут зависеть от неизвестных функций, т. к., если аналитическая функция $f(x_1, \dots, x_m)$ обращается в нуль в некоторой окрестности (евклидовой) точки $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$, то $f(x_1, \dots, x_m) \equiv 0$ ($x_1, x_2, \dots, x_m$ — независимые переменные).

ЛЕММА 2. Пусть $z_1 = \{u'_i\} \in R$. Тогда существует такая окрестность $U^r_0(z_1)$, что все $z \in U^r_0(z_1)$ попадают в область сходимости форм разрешающей цепочки в точке z_1 . Доказательство этого простого предложения очевидно.

ЛЕММА 3. Пусть $z_1 \in R$ и $U^r(z_1)$ — окрестность, удовлетворяющая условиям леммы 2. Разрешающую цепочку в точке z будем в дальнейшем обозначать через Φ_z . Если $z \in U^r(z_1)$, то $R(\Phi_z) \leq R(\Phi_{z_1})$. Действительно, в точке z мы можем присоединять формы, не являющиеся аналитическими в точке z_1^* .

Определение 18. Пусть $z_0 = \{u_i^0\} \in R$, $U^r_0(z_0)$ — окрестность, для которой выполнены ограничения леммы 2, Φ_{z_0} — разрешающая цепочка в точке z_0 . Если существует такая окрестность $U^r_1(z_0) \subseteq U^r_0(z_0)$ что для всех $z \in U^r_1(z_0)$ Φ_{z_0} остается разрешающей цепочкой, то точку z_0 будем называть точкой экстремальности.

Любую окрестность $U^r(z_0)$, во всех точках которой Φ_{z_0} остается разрешающей цепочкой, назовем окрестностью экстремальности.

ЛЕММА 4. Множество экстремальных точек всюду плотно в R . Доказательство. Пусть $z_1 \in R$. Покажем, что в любой окрестности $U^r(z_1)$ существует экстремальная точка.

Предположим, что z_1 — не экстремальная точка. Найдем окрестность $U^r_0(z_1)$, удовлетворяющую условиям леммы 2. Пусть $V^r_1(z_1) \subseteq U^r_0(z_1) \cap U^r(z_1)$. Если $z_2 \in V^r_1(z_1)$ — не экстремальная точка, то для нее найдется окрестность $U^r_1(z_2)$, подчиненная ограничениям леммы 2.

Рассмотрим пересечение $V^r_1(z_1) \cap U^r_1(z_2) = W(z_2)$ и возьмем $z_3 \in W(z_2)$. Ввиду соотношения

$$R(\Phi_{z_1}) > R(\Phi_{z_2}) > R(\Phi_{z_3}) > \dots$$

после конечного числа шагов мы придем в экстремальную точку. Лемма доказана.

Определение 19. Пусть R топологизированное тихонозским образом дифференциальное многообразие совместной системы (1),

* Ясно, что в случае $R(\Phi_z) = R(\Phi_{z_1})$, $\Phi(z_1)$ является разрешающей цепочкой и в точке z .

подчиненной условиям а), б), в). Назовем точкой пассивности системы (1) любую точку $z \in R$, в которой (1) эквивалентна пассивной системе.

ЛЕММА 5. Если $z_0 \in R$, то в любой окрестности $U^r(z_0)$ существует точка, в которой система (1) эквивалентна пассивной системе. Если (1) совместна, то в качестве этой точки всегда можно выбрать экстремальную точку пассивности.

Доказательство. Если система (1) несовместна, то можно сказать, что она эквивалентна в точке z_0 системе $1=0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что (1) совместна. $U^r(z_0)$, в силу леммы 4, содержит экстремальную точку z_1 . Будем исследовать (1) в окрестности точки z_1 .

Через F обозначим множество всех форм f_α из (1), через $\bar{F}_z$ множество всех дифференциальных форм, содержащих $\mathfrak{M}$ в точке z .

Рассмотрим разрешающую цепочку в точке z_1 :

$$\Phi_{z_1} = \{f_1, \dots, f_s\}.$$

Пусть $L(f_i) = q_i$ ($i = 1, \dots, s$).

Если $\left. \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \right|_{z_1} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$), то (1) эквивалентна в точке z_1 системе

$$f_1 = 0, \dots, f_s = 0; f_i \in \Phi_{z_1} (i = 1, \dots, s).$$

В самом деле, мы можем разрешить все уравнения $f_i = 0$ относительно старших производных q_i и затем, в силу леммы 1, исключить все их кратные из форм системы $\bar{F}_{z_1}$.

Пусть $f_i \neq \varphi \in \bar{F}_{z_1}$ ($i = 1, \dots, s$).

После исключения всех производных, кратных q_i ($i = 1, \dots, s$) φ перейдет в форму φ' , содержащую $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1 и приведенную по отношению к Φ_{z_1} . Но тогда, в силу теоремы 4, $\varphi' \equiv 0$. Предположим, что для некоторых $j \leq s$ $\left. \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \right|_{z_1} = 0$. Обозначим те формы цепочки Φ_{z_1} , для которых $\left. \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \right|_{z_1} = 0$, через $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$ (в порядке возрастания номеров).

Пусть $U_e^r(z_1)$ такая окрестность экстремальности точки z_1 , что для всех

$$z \in U_e^r(z_1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \neq 0 \quad (i \neq i_j; j = 1, 2, \dots, k).$$

Такая окрестность всегда существует, в силу аналитичности наших форм и экстремальности точки z_1 . Возьмем произвольную окрестность $U^r(z_1)$ и покажем, что в ней существует точка пассивности системы (1). Могут представиться только два случая:

1. Существует окрестность $\tilde{U}(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ такая, что для всех $z \in \tilde{U}(z_1)$ и любого натурального p $\left. \frac{\partial^p f_{i_1}}{\partial q^{p_{i_1}}} \right|_z = 0$.

2. Найдутся такая окрестность $U_1^r(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ и такое натуральное число m , что

$$\left. \frac{\partial^j f_{i_1}}{\partial q^{j_{i_1}}} \right|_z = 0 \quad (j = 1, \dots, m-1),$$

если $z \in U_1^r(z_1)$, и во всякой окрестности $V^r(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ существуют такие точки z , в которых $\frac{\partial^m f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^m} \Big|_z \neq 0$.

Рассмотрим сначала первый случай и покажем, что он невозможен. В самом деле, $f_{i_1}(u_0, \dots, u_t)$ является аналитической функцией своих аргументов в точке z_1 . В окрестности любой точки $(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_t)$ (здесь имеется в виду обычная евклидова окрестность), такой, что $z = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{t+1}, \dots) \in U_1^r(z_1)$, $f_{i_1}(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_t)$ разлагается в степенной ряд. Пусть, $U_s = q_{i_1}$. Рассмотрим функцию одного переменного u_t

$$f_{i_1}(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{t-1}, u_t) = \varphi(u_t).$$

Разложение $\varphi(u_t)$ в окрестности точки u_t дает:

$$\begin{aligned} \varphi(u_t) &= \varphi'(\tilde{u}_t) (u_t - \tilde{u}_t) + \frac{\varphi''(\tilde{u}_t)}{2!} (u_t - \tilde{u}_t)^2 + \dots = \\ &= \frac{\partial f_{i_1}}{\partial u_t} \Big|_{(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_t)} \cdot (u_t - \tilde{u}_t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial u_t^2} \Big|_{(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_t)} \cdot (u_t - \tilde{u}_t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Так как, по предположению, $\frac{\partial^j f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^j} \Big|_{(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_t)} = 0$ при любом натуральном j ,

то $f_{i_1}(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{t-1}, u_t) = 0$ при любом u_t . Но это означает, что форма $f_{i_1}(u_0, \dots, u_{t-1}, a)$, где a — любое комплексное число, содержит дифференциальное многообразие $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1 , т. е. принадлежит к $\bar{F}_{z_1}$. Последнее заключение ведет к противоречию. Действительно, всегда можно найти такое a_1 , чтобы $f_{i_1}(u_0, \dots, u_{t-1}, a_1) \neq 0$.

Обозначим дифференциальную форму $f_{i_1}(u_0, \dots, u_{t-1}, a_1)$ через f_{i_1}' . Ранг f_{i_1}' не может быть меньше ранга f_1 , т. к. тогда f_{i_1}' сама была бы цепочкой ранга, меньшего, чем $R(\Phi_{z_1})$. Далее $R(f_{i_1}') \leq R(f_2)$, ибо в этом случае последовательность (f_1, f_{i_1}') имела бы ранг, меньший, чем $R(\Phi_{z_1})$. Продолжая это рассуждение, мы приходим к выводу, что $R(f_{i_1}') > R(f_{i_1-1})$. Но тогда $S = \{f_1, \dots, f_{i_1-1}, f_{i_1}'\}$ будет цепочкой и $R(S) < R(\Phi_1)$. Итак, первый случай неосуществим.

Разберем вторую возможность. В случае $2 \frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ содержит $\mathfrak{M}$ в окрестности z_1 и, следовательно, принадлежит к $\bar{F}_{z_1}$.

Обозначим $\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ через $\tilde{f}_{i_1}$. Тогда $\tilde{\Phi}_{z_1} = \{f_1, f_2, \dots, f_{i_1-1}, \tilde{f}_{i_1}, \dots, f_s\}$ — в $\bar{F}_{z_1}$, причем $R(\tilde{\Phi}_{z_1}) = R(\Phi_{z_1})$. По условию, в любой окрестности $V^z(z_1) \subseteq U^r(z_1) \cap U_e^r(z_1)$ существуют точки z , для которых $\frac{\partial f_{i_1}}{\partial q_{i_1}} \Big|_z \neq 0$.

Возьмем одну из таких точек — z_2 . Тогда в точке z_2 i_1 -й член цепочки Φ_{z_1} будет разрешим относительно $q_{i_1} = L(\tilde{f}_{i_1})$. При этом, т. к. мы не вышли из окрестности экстремальности точки z_1 , $\tilde{\Phi}_{z_1}$ остается разрешающей цепочкой в точке z_2 .

Заметим, что $z_2 \in U^r(z_1)$ — произвольной, заранее заданной

окрестности точки z_1 в R . Дальнейшее доказательство не представляет затруднений.

Рассуждая совершенно аналогично, мы можем в любой окрестности точки z_2 , в частности, в $U^r(z_2) \subset U^r(z_1)$, найти точку, в которой i_2 -й член разрешающей цепочки будет разрешим относительно своей старшей производной и т. д. Через конечное число шагов в произвольной окрестности $U^r(z_1)$ экстремальной точки z_1 мы найдем точку z_k , в которой система (1) будет эквивалентна системе, получаемой приравниванием нулю форм разрешающей цепочки

$$\Phi_{zk} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}.$$

Разрешив уравнения $\{\varphi_i = 0\}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) относительно старших производных, получим пассивную систему

$$q_1 = \psi_1(\dots), \dots, q_s = \psi_s(\dots),$$

эквивалентную системе (1).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для совместной системы (1), удовлетворяющей условиям а), б), в), дополнение к множеству точек пассивности нигде не плотно в R .

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из того факта, что множество экстремальных точек пассивности, всюду плотное в R , согласно лемме 5, образует в R область. В самом деле, пусть z_1 — экстремальная точка пассивности системы (1). Тогда существует такая окрестность $U^r(z_1) \subset U_e^r(z_1)$ (в качестве $U_e^r(z_1)$ можно взять любую окрестность экстремальности точки z_1), что для всех $z \in U^r(z_1)$ формы разрешающей цепочки

$$\Phi_{z_1}\{f_1, \dots, f_s\}$$

будут обладать тем свойством, что

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \right|_z \neq 0; (q_i = L(f_i); i = 1, \dots, s).$$

Разрешив уравнения

$$f_1(\dots) = 0, \dots, f_s(\dots) = 0$$

в окрестности любой точки $z \in U^r(z_1)$, мы получим пассивную систему, эквивалентную системе (1). Таким образом, экстремальные точки пассивности образуют область в R .

Алгебраическая теория кольца I_n аналитических в некоторой точке функций $f(x_1, \dots, x_n)$, разработанная Рюккертом, позволяет в некоторых частных случаях найти пассивную систему, эквивалентную системе (1), среди более узкого по сравнению с общим случаем основной теоремы класса дифференциальных форм.

ТЕОРЕМА 5. Каждый идеал в I_n обладает конечным базисом.

Определение. 20. Многообразием идеала I в кольце I_n будем называть совокупность общих нулей базисных рядов I . Отметим следующее предложение, аналогичное второй теореме Гильберта для кольца полиномов, фактически доказанное Рюккертом (см. [5]):

ТЕОРЕМА 6. Если ряд $f(x_1, \dots, x_n)$ содержит многообразие идеала I в кольце I_n , то некоторая натуральная степень $f(x_1, \dots, x_n)$ входит в I .

Определение 22. Множество Σ аналитических в окрестности точки $\{u_i^0\}$ дифференциальных форм назовем гильбертовски замкнутым, если выполнены следующие условия:

- 1) если $f \in \Sigma$, $g \in \Sigma$, то $f \pm g \in \Sigma$;
- 2) из $f \in \Sigma$ следует, что $\varphi f \in \Sigma$, (φ — любая форма, аналитическая в начальной точке);
- 3) если $f^\rho \in \Sigma$ (ρ — натуральное число), то $f \in \Sigma$;
- 4) из $f \in \Sigma$ следует, что $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} \in \Sigma$.

Любое множество F аналитических в точке $\{u_i^0\}$ дифференциальных форм можно дополнить до гильбертовски замкнутого множества, если к множеству $\tilde{F}$ всех линейных комбинаций $\sum_i \psi_i \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} f_{r_i}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}}$

($f_{r_i} \in F$, ψ_i — аналитичны в точке $\{u_i^0\}$) присоединить все формы φ , удовлетворяющие условию $\varphi^\rho \in \tilde{F}$ (ρ — натуральное число).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\bar{F}$ гильбертовское замыкание множества форм F и $S \subset F$. Если формы, входящие в S , зависят в совокупности от конечного числа производных, то S — идеал. (Конечно, допускается умножение на формы ψ , зависящие только от тех производных, которые входят в формы $\varphi \in S$).

Доказательство этого предложения не представляет затруднений.

ТЕОРЕМА. Пусть дана совместная система вида (1), подчиненная условиям а), б), в). Будем обозначать множество форм f_α через F , его гильбертовское замыкание в точке z через $\bar{F}_z$. Пусть далее A и $\mathfrak{M}$ ее аналитическое и дифференциальное многообразия, а R' и R их тихоновская топологизация. Предположим, кроме того, что система (1) обладает следующими свойствами:

I. В некоторой окрестности $U'_0(z_0)$ ($z_0 \in R'$) аналитическое многообразие A совпадает с дифференциальным $\mathfrak{M}$.

II. Для всех $z \in U'_0(z_0)$ выполняется условие: если какая-нибудь форма φ обращается в нуль в $U'(z)$, то она содержит многообразие идеала S , все формы которого зависят в совокупности только от конечного числа производных ($S \in F$).

Тогда дополнение к множеству точек пассивности нигде не плотно в $U'(z_0)$, причем для точки пассивности z_1 эквивалентная системе (1) пассивная система получается путем разрешения некоторых из уравнений $\bar{F}_{z_1}$ относительно старших производных.

Доказательство. В каждой точке $z \in U'_0(z_0)$ можно гильбертовски замкнуть F до системы $\bar{F}_z$ и взять в $\bar{F}_z$ разрешающую цепочку Φ_z . Эту цепочку условимся называть гильбертовски разрешающей. Так же, как и в лемме 4, можно ввести понятие гильбертовски экстремальной точки и доказать, что множество экстремальных

точек всюду плотно в $U^r(z_0)$. При этом I гарантирует, что экстремальные точки будут точками совместности.

Возьмем любую точку $z' \in U'_0(z_0)$ и покажем, что в любой окрестности $U^r(z')$ существует экстремальная точка пассивности. Отсюда сразу будет следовать утверждение теоремы (см. основную теорему).

Рассмотрим какую-нибудь гильбертовски экстремальную точку $z_1 \in U^r(z')$ и возьмем в ней гильбертовски разрешающую цепочку $\Phi_{z_1} = \{f_1, \dots, f_k\}$.

Пусть $L(f_i) = q_i$. Если $\left. \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \right|_{z_1} \neq 0$, ($i = 1, \dots, k$), то z_1 будет точкой пассивности и система (1) будет эквивалентна в точке z_1 пассивной системе

$$\{q_i = \psi_i(\dots)\} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Предположим, что $\left. \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \right|_{z_1} = 0$ ($j = i_1, \dots, i_s$).

Тогда рассмотрим „достаточно малую“ окрестность экстремальности $U'_e(z_1) \subseteq U^r(z')$, для которой

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_i} \neq 0 \quad (i \neq i_j; j = 1, \dots, s).$$

Следует исследовать два случая:

а') Для любого натурального n $\frac{\partial^n f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^n} = 0$ в некоторой окрестности $\tilde{U}^r(z_1)$.

Это предположение приводит к противоречию так же, как и при доказательстве леммы 5.

б') Найдется такое натуральное m , что $\left. \frac{\partial^n f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^n} \right|_z = 0$ ($n = 1, \dots, m-1$), если $z \in V^r(z_1)$ ($V^r(z_1)$ — некоторая окрестность точки z_1), и в любой окрестности $W^r(z_1)$ найдутся точки, в которых $\frac{\partial^m f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^m} \neq 0$.

В этом случае $\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}}$ обращается в нуль на R' в некоторой окрестности $V^r(z_1)$, и значит, в силу условия II, содержит многообразие идеала S с $\bar{F}_{z_1}$ ($\bar{F}_{z_1}$ — гильбертовское замыкание F в точке z_1).

Но тогда из теоремы 6 следует, что некоторая степень $\left(\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}} \right)^p$ содержится в S , а значит и в $\bar{F}_{z_1}$.

Вследствие гильбертовской замкнутости $\bar{F}_{z_1}$,

$$\frac{\partial^{m-1} f_{i_1}}{\partial q_{i_1}^{m-1}} \in \bar{F}_{z_1}.$$

Дальнейшее рассуждение разворачивается по пути, указанному в доказательстве леммы 5.

От цепочки $\Phi_{z_1} = \{f_1, \dots, f_{l_1} \dots f_k\}$ мы переходим к цепочке

$$\Phi_{z_2} = \{f_1, \dots, \tilde{f}_{l_1}, \dots, f_k\}, \left(\tilde{f}_i = \frac{\partial^{m-1} f_{l_1}}{\partial q_{l_1}^{m-1}} \right),$$

причем $\left. \frac{\partial \tilde{f}_{l_1}}{\partial q_{l_1}} \right|_{z_2} \neq 0$.

Далее можно перейти в точку z_3 , в которой гильбертовски разрешающая цепочка $\Phi_{z_3} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{l_1}, \dots, \varphi_k\}$ будет обладать тем свойством, что

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \right|_{z_3} \neq 0 \quad (i \neq i_j; j = 3, \dots, s) \quad (\text{при } (s \geq 3)).$$

После конечного числа шагов мы придем в точку $z_N \in U'(z')$, в которой система (1) будет эквивалентна гильбертовски разрешающей цепочке $\Phi_{z_N} \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$, т. е. системе

$$\psi_1(\dots) = 0; \dots \psi_k(\dots) = 0 \quad (i = 1, \dots, k),$$

причем $\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial q_i} \right|_{z_N} \neq 0$.

Разрешив уравнения $\{\psi_i = 0\}$ ($i = 1, \dots, k$) относительно старших производных q_i , получим пассивную систему

$$q_1 = \varphi_1 \left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} \dots \right); \dots q_k = \varphi_k(\dots),$$

эквивалентную системе (1) в точке z_N . Теорема доказана.

В различных частных случаях удастся еще более сузить класс дифференциальных форм, среди которых разыскивается пассивная система, эквивалентная системе вида (1).

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Я. Б. Лопатинскому за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

- Финников С. П. — Метод внешних форм Картана, 1948.
 Гюнтер Н. М. — О модулях алгебраических форм. Труды Тбилисского математического института, IX, 1941.
 Ritt — Differential equations from the algebraic standpoint, 1932.
 Tresse — Sur les invariants différentiels des groupes continus des transformations. Acta Mathematica, № 18, 1894.
 Rückert — Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Mathematische Annalen, 107, 1933.
 Александров П. С. — Введение в общую теорию множеств и функций, 1948.
 Ван-дер-Варден — Современная алгебра, т.т. I и II, 1947.
 Thomas — Differential systems, 1937.

В. Э. ЛЯНЦЕ

ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Как известно, операции дифференцирования функции соответствует операция умножения ее преобразования Фурье на независимое переменное. Это свойство преобразования Фурье дает возможность производить хотя бы формальное сведение задачи с начальными условиями для систем уравнений в частных производных определенного типа к задаче с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако практическая реализация указанной возможности сталкивается, как правило, с весьма существенным затруднением: интегралы, изображающие преобразования Фурье данных и искомым функций, расходятся.

Поэтому методом интеграла Фурье обычно пользуются „лишь для эвристического получения предполагаемого решения, которое вслед за этим следует подвергнуть непосредственной проверке“ (2).

Обоснование и распространение метода интеграла Фурье на широкие классы систем уравнений в частных производных было дано акад. Петровским [1]. Указанное выше затруднение акад. Петровский преодолел с помощью весьма остроумного разложения данных и искомым функций в ряды со слагаемыми, преобразования Фурье которых изображаются уже сходящимися интегралами.

В настоящей работе реализуется идея отличия от идеи разложения в бесконечный ряд.

Пусть функция $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, дифференцируемая неограниченное число раз во всем пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$, равна единице в начале координат и равна нулю вне сферы $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Тогда для любой интегрируемой в каждой конечной области функции $F(x_1, \dots, x_n)$ интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\theta_1, \dots, \theta_n; y_1, \dots, y_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) F(x_1, \dots, x_n) e^{i \sum_j (x_j - y_j) \theta_j} dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad [a]$$

сходится для любых значений θ_j, y_j , причем поведение функции F на бесконечности совершенно безразлично. Если, кроме того, функция F обладает достаточно „хорошими“ локальными свойствами, то верна формула обращения

$$F(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\theta_1, \dots, \theta_n; y_1, \dots, y_n) d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad [6]$$

что является следствием формул обращения Фурье, свойств ядра Φ и, в частности, соотношения $\Phi(0, \dots, 0) = 1$.

Формулы [а], [б] не сохраняют соответствия между операциями дифференцирования и умножения на независимое переменное, поэтому для их применения требуется видоизменить классическую схему метода интеграла Фурье.

Представляется, что преимуществом предлагаемого в данной работе метода являются более компактные формулы для решения задачи с начальными условиями, чем те, которые были получены в работе Петровского (1). Кроме того, вопрос о нахождении всех решений сводится к нахождению одного решения (сопряженной системы уравнений), зависящего от конечного числа параметров. Это решение мы называем фундаментальным, исходя из того, что самым существенным в любой концепции фундаментального решения является требование, чтобы при изменении параметров это последнее пробегало множество, расположенное „плотно“ в множестве всех решений исходной системы уравнений.

1. КОНЦЕПЦИЯ МЕТОДА

Будем рассматривать системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_k(u) = \frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{l=0}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kl}^{(k_1, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_l}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad [1]$$

($k = 1, \dots, N$)

Символ $\sum_{(k_s)}^K$ означает здесь суммирование по всем целым неотрицательным $k_1, \dots, k_n$, сумма которых не превосходит числа K . Предполагается, что коэффициенты $A_{kl}^{(k_1, \dots, k_n)}$ а также правые части f_k являются непрерывными функциями переменного t при $0 \leq t \leq T$.

Пусть t_0 — некоторое число из интервала $0 \leq t_0 < T$. Задачу с начальными условиями для системы [1] сформулируем следующим образом.

В неограниченной полосе

$$t_0 \leq t < T, |x_1| < \infty, \dots, |x_n| < \infty$$

определить решение $u_1, \dots, u_N$ системы [1], которое на начальной гиперплоскости $t = t_0$ принимает наперед заданные значения

$$u_k|_{t=t_0} = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \quad [2]$$

($k = 1, \dots, N$)

С целью решения задачи [1], [2] введем в рассмотрение сопряженную систему уравнений:

$$M_k(z) = \frac{\partial z_k}{\partial(-t)} - \sum_{l=0}^N \sum_{(k_s)}^K A_{lk}^{(k_1, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_l}{\partial(-x_1)^{k_1} \dots \partial(-x_n)^{k_n}} = 0 \quad [1^*]$$

$$(k=1, \dots, N)$$

В нашем методе существенную роль играет формула Грина. Для любых, достаточное число раз дифференцируемых функций $u_1, \dots, u_N, z_1, \dots, z_N$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\omega}^{\omega} \dots \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{k=1}^N [z_k L_k(u) - u_k M_k(z)] dt dx_1 \dots dx_n = Q_{\omega}, \quad [3]$$

где Q_{ω} есть интеграл от известных билинейных форм от функций u_k, z_k и их производных до порядка $K-1$ включительно, распространенных по границе цилиндра $R(\omega, t_0, t_1)$,

$$R(\omega, t_0, t_1): t_0 \leq t \leq t_1, |x_1| < \omega, \dots, |x_n| < \omega$$

Введем понятие фундаментального решения. Фундаментальной системой решений системы $[1^*]$ будем называть матрицу (z_{kj}) , каждый столбец которой есть решение системы $[1^*]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$z_{kj} \Big|_{t=t_1} = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$z_{jj} \Big|_{t=t_1} = \Phi(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) e^{i \sum (x_k - y_k) \theta_k} \quad [2^*]$$

$$(0 \leq t_1 \leq T)$$

и существующее в полосе

$$t_1 \geq t > 0, |x_1| < \infty, \dots, |x_n| < \infty$$

Таким образом, фундаментальная система решений зависит от $n+1$ переменных $t, x_1, \dots, x_n$ и $2n+1$ параметров $t_1, y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_n$.

Допустим, что фундаментальная система решений (z_{kj}) системы $[1^*]$ существует и пусть $u_1, \dots, u_N$ некоторое решение задачи [1], [2]. Для функций u_k и z_{kj} формула Грина [3] принимает вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\omega}^{\omega} \dots \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{k=1}^N z_{kj} f_k(t, x_1, \dots, x_n) dt dx_1, \dots, dx_n = Q_{\omega}$$

Перейдем здесь к пределу при $\omega \rightarrow \infty$. Предположим, что производные функции $z_{kj}, (u_k)$ по переменным $x_1, \dots, x_n$ до порядка $K-1$ включительно весьма быстро обращаются в нуль на бесконечности (не слишком быстро возрастают, когда $x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty$) так, что интегралы, входящие в состав выражения Q_{ω} и распространенные по

боковым граням $x_j = \pm \omega$ цилиндра $R(\omega, t_0, t_1)$, в пределе равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N z_{kj} f_k dt dx_1 \dots dx_n = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N z_{kj} u_k dx_1 \dots dx_n \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \end{aligned} \quad [3_j]$$

Принимая во внимание начальные условия [2], [2*], находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_j|_{t=t_1} \Phi(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) e^{i \sum (x_k - y_k) \Theta_k} dx_1 \dots dx_n = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N z_{kj} f_k dt dx_1 \dots dx_n + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N z_{kj}|_{t=t_0} \varphi_k dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

откуда в силу формул обращения [a], [б]

$$\begin{aligned} u_j(t_1, y_1, \dots, y_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \dots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \left[\int_{t_0}^{t_1} z_{kj} f_k dt + \right. \\ \left. + z_{kj}|_{t=t_0} \varphi_k \right] dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad [4]$$

($j = 1, \dots, N$)

В дальнейшем будет доказано, что для всех систем вида [1], удовлетворяющих необходимому условию корректности постановки задачи [1], [2], фундаментальная система решений (z_{kj}) существует и что при достаточно общих предположениях относительно поведения функций f_k и φ_k ¹ формулы [4] действительно представляют искомое решение.

II. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Системе уравнений в частных производных [1*] поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

¹ Эти предположения несколько слабее предположений, принятых в работе Петровского.

$$\frac{dw_k}{dt} + \sum_{l=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{lk}^{(k_1, \dots, k_n)}(t) (i\alpha_1)^{k_1} \dots (i\alpha_n)^{k_n} w_l = 0 \quad [5]$$

$$(k = 1, \dots, N)$$

Пусть $w_{1j}, \dots, w_{nj}, (j = 1, \dots, N)$

$$w_{kj} = w_{kj}(t, t_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

решение системы [5], удовлетворяющее начальным условиям

$$w_{kj} \Big|_{t=t_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ 1 & \text{при } k = j \end{cases} \quad [6]$$

Необходимое условие (равномерной) корректности постановки задачи [1], [2] было найдено акад. Петровским (1). Оно может быть сформулировано следующим образом:

Для всех вещественных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$|w_{kj}| < C(1 + |\alpha_m|)^p \quad [7]$$

$$(0 \leq t \leq t_1 \leq T; k, j = 1, \dots, N),$$

где $|\alpha_m| = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|)$ C — постоянная и $p \geq 0$ — целое число. Всюду в дальнейшем предполагается, что для системы [1] условие [7] выполнено.

Построим фундаментальную систему решений системы [1*]. Положим

$$\tilde{z}(\alpha, \Theta, y) = z(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \Theta_1, \dots, \Theta_n; y_1, \dots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) e^{i\sum (x_k - y_k) \Theta_k} e^{i\sum x_k \alpha_k} dx_1 \dots dx_n$$

$\tilde{z}(\alpha, \Theta, y)$ есть преобразование Фурье функции $z_{jj}|_{t=t_1}$ (ср. [2*]). После замены переменных $\xi_k = x_k - y_k$ получаем

$$\tilde{z}(\alpha, \Theta, y) = \frac{e^{i\sum \alpha_k y_k}}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{i\sum (\Theta_k + \alpha_k) \xi_k} d\xi_1 \dots d\xi_n \quad [8]$$

В силу того что ядро Φ дифференцируемо неограниченное число раз во всем пространстве и обращается в нуль вне единичной сферы с центром в начале координат, функция $\tilde{z}(\alpha, \Theta, y)$ при $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени наибольшего из чисел $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$.

Поэтому, а также в силу условия [7] интегралы

$$z_{kj} = z_{kj}(t, t_1, x, y, \Theta) = z_{kj}(t, t_1; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; \Theta_1, \dots, \Theta_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w_{kj}(t, t_1, \alpha) \tilde{z}(\alpha, \Theta, y) e^{-i\sum \alpha_k x_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad [9]$$

$$(k, j = 1, \dots, N)$$

сходятся и допускают дифференцирование по переменным $x_1, \dots, x_n$ под знаком интеграла неограниченное число раз.

Из соотношений [5], [6] и [8] следует, что для каждого $j, j=1, \dots, N$ функции $z_{1j}, \dots, z_{Nj}$ удовлетворяют системе $[1^*]$ при $t_1 \geq t \geq 0$, $|x_1| < \infty, \dots, |x_n| < \infty$ и начальным условиям $[2_j^*]$. Таким образом, [9] есть интегральное представление искомой фундаментальной системы решений (z_{kj}) .

Докажем следующее предложение.

ЛЕММА I. Пусть $(z_{kj}(t, t_1, x, y, \Theta))$ — фундаментальная система решений системы $[1^*]$. Тогда транспонированная матрица $(z_{jk}(t, t_1, x, y, \Theta))$, рассматриваемая как функция переменных $t_1, y_1, \dots, y_n$, является фундаментальной системой решений системы [1].

Доказательство этой леммы можно бы получить, исходя из формулы Грина [2]. Однако мы предпочитаем непосредственную проверку.

Прежде всего из [8] находим:

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} \tilde{z}(\alpha, \Theta, y)}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} = (i\alpha_1)^{k_1} \dots (i\alpha_n)^{k_n} \tilde{z}(\alpha, \Theta, y)$$

Поэтому, принимая во внимание [9], имеем

$$\begin{aligned} L_k(z_j) &= \frac{\partial z_{jk}}{\partial t_1} - \sum_{l=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kl}^{(k_1, \dots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{jl}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dw_k}{dt_1} - \sum_{l=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kl}^{(k_1, \dots, k_n)}(t_1) (i\alpha_1)^{k_1} \dots (i\alpha_n)^{k_n} w_{jl} \right\} \times \\ &\quad \times \tilde{z}(\alpha, \Theta, y) e^{-i\sum \alpha_k x_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

В самом деле, из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при любом $l, l=1, \dots, N$ строка $w_1, \dots, w_{lN}$, рассматриваемая как функция переменного t_1 , является решением системы уравнений, сопряженной с системой [5]. Следовательно, выражения в фигурных скобках тождественно исчезают.

Приступим теперь к изучению соотношений [4]. Положим

$$\begin{aligned} I_{k_1, \dots, k_n} &= I_{k_1, \dots, k_n}(t_1, y_1, \dots, y_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_1 \dots d\Theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_j}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} dx_1 \dots dx_n \quad [10] \\ &\quad (k_1 + \dots + k_n \leq K) \end{aligned}$$

Интеграл [10] соответствует производной одного какого-нибудь из тех слагаемых, из которых состоит сумма [4].¹

¹ Рассмотрение интегралов, входящих в сумму [4] и содержащих в качестве подинтегральных выражений функции f_k производится в точности так же, как рассмотрение интегралов [10]. Действительно, встречающееся в [4] интегрирование по времени t не вызывает дополнительных затруднений, ибо оно производится в конечных пределах.

ЛЕММА 2. Пусть φ_k является функцией непрерывно дифференцируемой $H(q)$ раз по любой комбинации переменных $x_1, \dots, x_n$, где

$$H(q) = (p + q - 1)q + (p + K)(n + 2),$$

причем для любого $h \leq H(q)$

$$\left| \frac{\partial^h \varphi_k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right| \leq \|F\| (1 + |x_m|)^q; \quad (\|F\| - \text{константа}) \quad [11]$$

Тогда в выражении [10] внутренний и внешний интеграл сходятся равномерно в каждой области пространства $y_1, \dots, y_n$ и справедлива оценка:

$$|I_{k_1 \dots k_n}| < A(q) \|F\| (1 + |x_m|)^q, \quad [12]$$

где $A(q)$ константа, не зависящая от φ_k . Здесь (как и всюду в дальнейшем), $|x_m|$ соответственно $|y_m|$ означает наибольшее из чисел $|x_1|, \dots, |x_n|$ соответственно $|y_1|, \dots, |y_n|$.

Доказательство. Достаточно показать, что в условиях леммы интеграл

$$J_{k_1 \dots k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} dx_1 \dots dx_n \quad [13]$$

сходится равномерно в каждой конечной области и что для него выполняется неравенство

$$|J_{k_1 \dots k_n}| < \frac{B(q) \|F\| (1 + |y_m|)^q}{(1 + |\Theta_m|)^{n+1}}, \quad [14]$$

где $B(q)$ константа, не зависящая от φ_k и $|\Theta_m|$.

Принимая во внимание [8] и [9], находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (i\alpha_1)^{k_1} \dots (i\alpha_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha) \tilde{z}(\alpha, \Theta, y) e^{-i \sum \alpha_k y_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \end{aligned}$$

В последнем интеграле произведем замену переменных, полагая $\alpha_k - \Theta_k$ вместо α_k , $k = 1, \dots, n$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{kj}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} = \\ & = i^k e^{i \sum \Theta_k (x_k - y_k)} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \dots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta) \\ & \quad \tilde{z}(\alpha, 0, 0) e^{-i \sum \alpha_k (x_k - y_k)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Заметим следующее: для производных функции w_{kj} по параметрам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ справедливо, легко проверяемое по индукции, неравенство

$$\left| \frac{\partial^\lambda w_{kj}}{\partial \alpha_1^{\lambda_1} \dots \partial \alpha_n^{\lambda_n}} \right| < C_\lambda (1 + |\alpha_m|)^{p + (p + K - 1)\lambda} \quad [16]$$

где C_λ константа и $|\alpha_m| = \max |\alpha_k|$ (ср. (1)).

Из этого замечания и из того, что функция $z(\alpha, 0, 0)$, а также ее производные любого порядка стремятся к нулю быстрее всякой отрицательной степени $|\alpha_m|$, когда $|\alpha_m| \rightarrow \infty$, следует, что интеграл [15] имеет смысл и при $|x_m| \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее всякой отрицательной степени $|x_m|$.

Поэтому и в силу условия [11] интеграл [13] также сходится. В интеграле [13] произведем замену переменных, полагая x_k вместо $x_k - y_k$. Принимая во внимание [15], получим

$$J_{k_1 \dots k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x + y) z_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)} e^{i \sum \Theta_k y_k} dx_1 \dots dx_n, \quad [17]$$

где

$$\begin{aligned} z_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)} = & i^k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \dots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta) \times \\ & \times \tilde{z}(\alpha, 0, 0) e^{-i \sum \alpha_k x_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned} \quad [18]$$

и

$$\varphi_k(x + y) = \varphi_k(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Продифференцируем обе части равенства [18] и в правой части выполним интегрирование по частям. Найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^h z_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)}}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} = \\ & = \frac{i^{\lambda + k}}{x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^\lambda}{\partial \alpha_1^{\lambda_1} \dots \partial \alpha_n^{\lambda_n}} \left[(\alpha_1 - \Theta_1)^{k_1} \dots \right. \\ & \quad \left. \dots (\alpha_n - \Theta_n)^{k_n} w_{kj}(t, t_1, \alpha - \Theta) \right] \times \\ & \quad \times (-i\alpha_1)^{h_1} \dots (-i\alpha_n)^{h_n} \tilde{z}(\alpha, 0, 0) e^{-i \sum \alpha_k x_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки [16] следует, что

$$\left| \frac{\partial^h z_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)}}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right| < \frac{D_\lambda}{(1 + |x_m|)^\lambda} (1 + |\Theta_m|)^{p + K + (p + K - 1)\lambda}, \quad [19]$$

где D_λ константа, а числа λ и h не зависят друг от друга.

С помощью интегрирования по частям преобразуем интеграл [17] следующим образом:

$$J_{k_1 \dots k_n} = \frac{i^h}{\theta_1^{h_1} \dots \theta_n^{h_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^h}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \left[\varphi_k(x+y) z^{(k_1 \dots k_n)} \right] e^{i \sum \theta_k x_k} dx_1 \dots dx_n$$

Принимая во внимание [11] и [19], получим

$$\left| J_{k_1 \dots k_n} \right| < \frac{D'_{\lambda} (1 + |\theta_m|)^{p+K+(p+K-1)\lambda}}{(1 + |\theta_m|)^h} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|F\| (1 + |x_m| + |y_m|)^q}{(1 + |x_m|)^{\lambda}} dx_1 \dots dx_n$$

Полагая здесь $h = H(q)$, $\lambda = q + n + 1$ и заметив, что

$$(1 + |x_m| + |y_m|)^q < 2^q (1 + |x_m|)^q (1 + |y_m|)^q,$$

находим

$$\left| J_{k_1 \dots k_n} \right| < \frac{2^q D'_{q+n+1}}{(1 + |\theta_m|)^{n+1}} \|F\| (1 + |y_m|)^q \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(1 + |x_m|)^{n+1}}.$$

Этим самым лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть для системы [1] выполняется условие [7]. Тогда фундаментальная система решений (z_{kj}) системы $[1^*]$ существует, причем производные любого порядка функций z_{kj} при $|x_m| \rightarrow \infty$ убывают быстрее любой отрицательной степени $|x_m|$. Если функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N, f_1, \dots, f_N$ непрерывно дифференцируемы по $x_1, \dots, x_n$ $H(q)$ раз, $H(q) = (p+K-1)q + (p+K)(n+2)$, (q — целое число ≥ 0), причем для любого $h \leq H(q)$

$$\left| \frac{\partial^h \varphi_k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right|, \left| \frac{\partial^h f_k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right| \leq \|F\| (1 + |x_m|)^q,$$

где $\|F\|$ константа, то существует одно и только одно такое решение $u_1, \dots, u_N$ задачи [1], [2], что производные каждой из функций $u_1, \dots, u_N$ до порядка $K-1$ включительно возрастают не быстрее некоторой конечной степени $|x_m|$.

Функции $u_1, \dots, u_N$ можно вычислить по формулам [4] и для них справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right| \leq A_q \|F\| (1 + |x_m|)^q; \quad [20]$$

¹ Заметим, что из неравенства [20] следует достаточность условия Петровского [7] для равномерной корректности постановки задачи [1], [2], если эту корректность измерять посредством метрики с весом $(1 + |x_m|)^q$. Результат Петровского соответствует случаю $q = 0$.

при этом A_q означает константу, не зависящую от φ_k , f_k и начального момента t_0 .

Доказательство. Из леммы 2 следует, что интегралы [4] сходятся равномерно в каждой конечной области, что для них операция L_k выполнима под знаком внутреннего интеграла и что для функций u_k , определяемых соотношениями [4], справедливо неравенство [20].

Покажем, что $L_k(u) = f_k$ при $k = 1, \dots, N$. Имеем

$$\begin{aligned} L_k(u) &= \frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_j}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \dots d\theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^N \left\{ \left[\frac{\partial z_{lk}}{\partial t_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{j=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{lj}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} \right] \right|_{t=t_1} \varphi_l + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial z_{lk}}{\partial t_1} - \sum_{j=1}^N \sum_{(k_s)}^K A_{kj}^{(k_1, \dots, k_n)}(t_1) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} z_{lj}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}} \right] f_l + \\ &\quad \left. + z_{lk} \right|_{t=t_1} \left. f_l \right|_{t=t_1} \Big\} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

В силу леммы 1 выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю. Поэтому, принимая во внимание начальные условия $[2_j^*]$ и формулы обращения [а], [б], находим

$$\begin{aligned} L_k(u) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 \dots d\theta_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f_k(t_1, x) dx_1 \dots dx_n = \\ &= f_k(t_1, x). \end{aligned}$$

Из соотношений $[2_j^*]$, [а], [б] следует также, что функции u^k удовлетворяют условиям [2].

Тот факт, что функции z_{kj} и их производные любого порядка по $x_1, \dots, x_n$ убывают быстрее любой наперед заданной отрицательной степени $|x_m|$ усматривается непосредственно из интегрального представления фундаментальной системы решений [9] оценки [16] и элементарных теорем о порядке убывания трансформации Фурье. Из этого факта и оценки [20] следует законность рассуждений, которые привели нас к соотношениям [4], что доказывает единственность решения задачи [1], [2] в вышеуказанном смысле.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. — Бюллетень МГУ, Серия А, вып. 7. 1938.
2. Курант-Гильберт. — Методы математической физики, т. 2.

Б. Н. ГАРТШТЕЙН

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КРАЙНЕГО РАНГА

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ результаты n независимых наблюдений над случайной величиной ξ . Обозначим через $F(x)$ функцию распределения величины ξ .

Расположив результаты наблюдений в порядке возрастания их величин, мы получим последовательность

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n},$$

где каждый индекс i_j принимает одно из значений $1, 2, \dots, n$.

Введем новое обозначение, положив $\xi_k^{(n)} = x_{i_k}$. Рангом порядка (r, k) результатов наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ мы назовем случайную величину $\rho_{rk}^{(n)} = \xi_k^{(n)} - \xi_r^{(n)}$ ($r < k$).

За последние годы в печати появился ряд работ, посвященных изучению предельного распределения ранга порядка $(1, n)$, т. е. разности между максимальным и минимальным членами вариационного ряда, при $n \rightarrow \infty$. В большинстве этих работ изучалось предельное распределение ранга при частных предположениях о начальной функции $F(x)$. Так, Гумбель [см., например, 5] в ряде работ предполагает, что $F(x)$ нормальный закон распределения. Эльфвинг [6] считает $F(x)$ функцией экспоненциального типа с плотностью $f(x) = C \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{p} |x|^p \right\}$, где $1 < p \leq 2$ и т. д.

Настоящая работа ставит своей целью изучение классов возможных предельных распределений для крайнего ранга, т. е. для ранга порядка (r, k) , если при $n \rightarrow \infty$ числа r и $n - k$ сохраняют постоянные значения (в дальнейшем это предположение мы оговаривать уже не станем). Для частного случая $(r=1, k=n)$ задача была решена нами ранее, и полученные результаты были опубликованы без доказательства [4].

За постановку задачи и указания, данные мне при ее решении, выражаю глубокую благодарность моему руководителю профессору Б. В. Гнеденко.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим $\Phi_{rk}^{(n)}(z) = P \{ \rho_{rk}^{(n)} < z \}$ и найдем выражение для этой функции распределения, предполагая функцию распределения $F(x)$

данной. Если обозначить через $F(M)$ вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi_k^{(n)}, \xi_r^{(n)})$ на множество M , то, как известно,

$$\Phi_{rk}^{(n)}(z) = \int \int_{x-y < z} F(dM)$$

В частности, за элемент площади dM может быть принят прямоугольник с центром в точке x, y и сторонами длины dx и dy . Тогда $F(dM) = P\{|x - \xi_k^{(n)}| < dx, |y - \xi_r^{(n)}| < dy\}$. Так как dx и dy — бесконечно малые величины, то $F(dM)$ совпадает с вероятностью события, состоящего в том, что из n испытаний $r-1$ испытание попадает левее точки y , а $k-r-1$ попадает между точками y и x , в то время как r -ое испытание попадает в произвольно малую окрестность точки y и k -ое — в произвольно малую окрестность точки x .

Таким образом,

$$F(dM) = \frac{n!}{(r-1)!(k-r-1)!(n-k)!} F^{r-1}(y) [F(x) - F(y)]^{k-r-1} [1 - F(x)]^{n-k} dF(x) dF(y)$$

для $x > y$ и $F(dM) = 0$ для $x \leq y$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{rk}^{(n)}(z) &= \iint_{0 < x-y < z} \frac{n!}{(r-1)!(k-r-1)!(n-k)!} F^{r-1}(y) [F(x) - F(y)]^{k-r-1} [1 - F(x)]^{n-k} dF(x) dF(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=k}^n \frac{n!}{(r-1)!(l-r)!(n-l)!} F^{r-1}(y) [F(y+z) - F(y)]^{l-r} [1 - F(y+z)]^{n-l} dF(y) \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь мы можем дать точную формулировку стоящей перед нами задачи.

Пусть при некотором подборе действительных чисел $a_n > 0$ и b_n функции $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к некоторой собственной¹ функции распределения $\Phi(z)$. Требуется найти класс возможных предельных функций $\Phi(z)$. Функции, входящие в класс возможных предельных распределений, естественно будут определены с точностью до типа², так как, если при $n \rightarrow \infty$ $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi(z)$, то $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi(az + b)$, где $a = \lim \frac{\alpha_n}{a_n}$, $b = \lim \frac{\beta_n - b_n}{a_n}$, и, следовательно, вместе с функцией $\Phi(z)$ в класс предельных распределений ранга войдут все функции вида $\Phi(az + b)$.

¹ Несобственной называется функция распределения $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ 1 & (x > a) \end{cases}$, где a — произвольная постоянная. Функция распределения, не являющаяся несобственной, называется собственной.

² Функция $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат к одному типу, если найдутся такие действительные $\alpha > 0$ и β , что $F_1(\alpha z + \beta) = F_2(z)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Наряду с функцией $\Phi_k^{(n)}(z) = P\{\xi_k^{(n)} < z\}$ рассмотрим функцию $\bar{\Phi}_r^{(n)}(z) = P\{-\xi_r^{(n)} < z\}$. Заметим, что $-\xi_r^{(n)}$ является $(n-r+1)$ -ым членом вариационного ряда случайной величины $\bar{\xi}$ с функцией распределения $1-F(-x)$.

В работе Н. В. Смирнова [2] найдено выражение для функции $\Phi_k^{(n)}(z)$: при любом k ($1 \leq k \leq n$)

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(n)}(z) &= \sum_{m=k}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} F^m(z) [1-F(z)]^{n-m} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(z)} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx \end{aligned} \quad (2)$$

В силу только что сделанного замечания

$$\bar{\Phi}_r^{(n)}(z) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{1-F(-z)} x^{n-r} (1-x)^{r-1} dx = 1 - \Phi_r^{(n)}(-z) \quad (3)$$

В работе Б. В. Гнеденко [1] был определен класс возможных предельных распределений максимального члена вариационного ряда т. е., согласно нашим обозначениям, был найден класс функций, которые могут оказаться предельными для функций распределения $\Phi_n^n(a_n z + b_n)$ при надлежащим образом подобранных постоянных $a_n > 0$ и b_n .

Оказалось, что предельными в таком смысле могут быть лишь функции следующих типов:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Phi_\alpha(z) &= \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ e^{-z^{-\alpha}} & z > 0 \end{cases} \\ 2) \quad \Psi_\alpha(z) &= \begin{cases} e^{-(-z)^\alpha} & z \leq 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \\ 3) \quad \lambda(z) &= e^{-e^{-z}} - \infty < z < \infty \end{aligned}$$

где α — положительная постоянная.

Н. В. Смирнов [2] обобщил эти результаты, получив класс возможных предельных (в том же смысле) распределений для k -ого члена вариационного ряда, если число $n-k$ сохраняет постоянное значение при $n \rightarrow \infty$.

Оказалось, что этот класс состоит из функций следующих типов:

$$1) \quad \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{1}{(n-k)!} \int_{z^{-\alpha}}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx & z > 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{(n-k)!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx & z \leq 0 \\ (-z)^{\alpha} & 1 & z > 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \lambda^{(n-k+1)}(z) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{e^{-z}}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \quad -\infty < z < \infty$$

Эти законы Смирнов назвал обобщенными законами Гнеденко.

Очевидно, что класс предельных распределений $(-r)$ -ого члена вариационного ряда совпадает с классом предельных распределений $(n-r+1)$ -ого члена вариационного ряда и, в частности, класс предельных распределений минус-минимального члена состоит из законов Гнеденко.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функция распределения $F(x)$ такова, что предельные распределения k -ого и $(-r)$ -ого членов вариационного ряда существуют, то класс предельных распределений для ранга порядка (r, k) состоит из функций распределения следующих типов:

$$1) \quad \Phi_{\alpha}^{(r)}(z); \quad 2) \quad \Psi_{\alpha}^{(r)}(z); \quad 3) \quad \lambda^{(r)}(z);$$

$$4) \quad \Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z); \quad 5) \quad \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z); \quad 6) \quad \lambda^{(n-k+1)}(z);$$

$$7) \quad \Phi_{\alpha}^{(r)}(z) * \Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(az); \quad 8) \quad \Psi_{\alpha}^{(r)}(z) * \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(az); \quad 9) \quad \lambda^{(r)}(z) * \lambda^{(n-k+1)}(az).$$

Здесь α и a — положительные постоянные; функции

$$\Phi_{\alpha}^{(l)}(z), \quad \Psi_{\alpha}^{(l)}(z), \quad \lambda^{(l)}(z),$$

где $l=r$ или $l=n-k+1$ определены, как у Смирнова; знак $*$ указывает на операцию компонирования:

$$F_1(z) * F_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-x) dF_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(z-x) dF_1(x).$$

Для доказательства теоремы мы используем тот факт, что в случае существования предельных распределений k -ого и $(-r)$ -ого членов вариационного ряда функции распределения ранга порядка (r, k) сходятся при некоторой нормировке $a_n > 0$ и b_n к собственной функции распределения тогда и только тогда, когда при той же нормировке композиции функции распределения k -ого и $(-r)$ -ого членов сходятся к той же функции распределения.

Лемма 1 следующего параграфа обобщает это предложение, так как в случае существования предельного распределения минус-минимального (а одновременно и $(-r)$ -ого) члена вариационного ряда условия леммы выполняются.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Положим

$$\Psi_{rk}^{(n)}(z) = \Phi_k^{(n)}(z) * \bar{\Phi}_r^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k^{(n)}(z-x) d\bar{\Phi}_r^{(n)}(x) \quad (4)$$

Имеет место следующая лемма:

ЛЕММА 1. Если для данных $a_n > 0$ и b_n' существует $z_0 < \infty$ ¹ такое, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(-a_n z - b_n')]^n = 0 \quad (z \leq z_0)$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf [1 - F(-a_n z - b_n')]^n > 0 \quad (z > z_0),$$

то при любом подборе величин b_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) - \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n)| = 0$$

Доказательство. В силу формулы (1)

$$\begin{aligned} & \Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=k}^n \frac{n!}{(r-1)!(l-r)!(n-l)!} F^{r-1}[a_n(z+x) + b_n''] [F(a_n(z+x) + b_n'') - \\ & \quad - F(a_n x - b_n')]^{l-r} [1 - F(a_n x - b_n')]^{n-l} dF(a_n x - b_n') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^n \frac{(n-r)!}{(l-r)!(n-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{l-r} \right. \\ & \quad \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l} \right\} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} F^{r-1}(a_n x - b_n') [1 - F(a_n x - b_n')]^{n-r} dF(a_n x - b_n') \end{aligned} \quad (5)$$

(Здесь $b_n'' = b_n - b_n'$).

Из формул (2), (3) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^l(a_n(z-x) + b_n'') \right. \\ & \left. [1 - F(a_n(z-x) + b_n'')]^{n-l} \right. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(-a_n x - b_n') [1 - F(-a_n x - b_n')]^{n-r} dF(-a_n x - b_n') =$$

¹ Мы не исключаем тот случай, когда $z_0 = -\infty$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^l(a_n(z+x) + b_n'') [1 - F(a_n(z+x) + b_n'')]^{n-l} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(a_n x - b_n') [1 - F(a_n x - b_n')]^{n-r} dF(a_n x - b_n') \right\}.$$

Интеграл, стоящий в формуле (5), представим в виде суммы интегралов:

$$I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{-z_0} + \int_{-z_0}^{\infty}$$

Точно так же на сумму двух интегралов разобьем последний интеграл формулы (6):

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \int_{-\infty}^{-z_0} + \int_{-z_0}^{\infty}$$

(z_0 здесь определено условием леммы).

Так как

$$|\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) - \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n)| = |I_1 + I_2 - \bar{I}_1 - \bar{I}_2| \leq |I_1 - \bar{I}_1| + |I_2 - \bar{I}_2|,$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$$|I_1 - \bar{I}_1| \rightarrow 0 \text{ и } |I_2 - \bar{I}_2| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В силу условия а) леммы при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{I}_2 = \int_{-z_0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^l(a_n(z+x) + b_n'') [1 - F(a_n(z+x) + b_n'')]^{n-l} \right\} \cdot \\ \cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(a_n x - b_n') [1 - F(a_n x - b_n')]^{n-r} dF(a_n x - b_n') \leq \\ \leq \sum_{l=n-r+1}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} [1 - F(-a_n z_0 - b_n')]^l \cdot \\ \cdot F^{n-l}(-a_n z_0 - b_n') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Для оценки I_2 заметим, что при любом x функция

$$\Phi_{rk}^{(n)}(x, z) = \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!(n-r-l)!} \left[\frac{F(x+z) - F(x)}{1 - F(x)} \right]^l \left[\frac{1 - F(x+z)}{1 - F(x)} \right]^{n-l-r}$$

представляет собой вероятность того, что из $n-r$ испытаний не менее $k-r$ испытаний попадет левее точки $z+x$ и не более $n-k$ правее

точки $z+x$ при условии, что все испытания попадут правее точки x . Поэтому при любых x и при $z > 0$

$$0 \leq \Phi_{rk}^{(n)}(x, z) \leq 1$$

В силу условия а) леммы

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-z_0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k}^n \frac{(n-r)!}{(l-r)!(n-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - (Fa_nx - b_n')}{1 - F(a_nx - b_n')} \right]^{l-r} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_nx - b_n')} \right]^{n-l} \right\} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(a_nx - b_n') \\ &\quad [1 - F(a_nx - b_n')]^{n-r} dF(a_nx - b_n') = \\ &= \int_{-z_0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!(n-r-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_nx - b_n')}{1 - F(a_nx - b_n')} \right]^l \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_nx - b_n')} \right]^{n-l-r} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F^{r-1}(a_nx - b_n') [1 - F(a_nx - b_n')]^{n-r} dF(a_nx - b_n') \leq \\ &\leq \sum_{l=n-r+1}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^{n-l}(-a_nz_0 - b_n') \cdot [1 - F(-a_nz_0 - b_n')]^l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ $I_2 \rightarrow 0$ и $\bar{I}_2 \rightarrow 0$, поэтому и $|I_2 - \bar{I}_2| \rightarrow 0$.

Перейдем к оценке $|I_1 - \bar{I}_1|$. Так как интегралы берутся в смысле Лебега-Стилтьеса и в интегралах I_1 и $\bar{I}_1$ интегрирующая функция одна и та же, то чтобы доказать, что $|I_1 - \bar{I}_1| \rightarrow 0$, достаточно показать, что разность интегрируемых функций стремится к нулю для всех x , $-\infty < x < -z_0$.

Для доказательства этого предложения воспользуемся леммой 1 второй части работы Смирнова [2]. Эта лемма утверждает, что для функции распределения $\Phi_k^{(n)}(z)$ при любом z и постоянном k имеют место неравенства:

$$\frac{1 - \sigma_n}{(k-1)!} \int_0^{nF(z)} e^{-x} x^{k-1} dx \leq \Phi_k^{(n)}(z) \leq \frac{1 + \rho_n}{(k-1)!} \int_0^{nF(z)} e^{-x} x^{k-1} dx,$$

где ρ_n и σ_n положительны, не зависят от z и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Очевидно, что для случая, когда число $n - k$ сохраняет постоянное значение, имеют место аналогичные неравенства:

$$\frac{1 - \sigma_n}{(n-k)!} \int_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \leq \Phi_k^{(n)}(z) \leq \frac{1 - \rho_n}{(n-k)!} \int_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx,$$

т. е.

$$\left| \Phi_k^{(n)}(z) - \frac{1}{(n-k)!} \int_{n[1-F(z)]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Таким образом

$$\left| \Phi_k^{(n)}(a_n(z+x) + b_n'') - \frac{1}{(n-k)!} \int_{n[1-F(a_n(z+x) + b_n'')]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

Точно так же

$$\left| \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!(n-r-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^l \right. \\ \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l-r} - \frac{1}{(n-k)!} \int_{(n-r) \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (8)$$

Оценим далее разность

$$\frac{1}{(n-k)!} \int_{(n-r) \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx - \frac{1}{(n-k)!} \int_{n[1-F(a_n(z+x) + b_n'')]}^{\infty} e^{-x} x^{n-k} dx \quad (x < z_0) \quad (9)$$

В силу условия б) леммы для значений $x < -z_0$ должно быть $\liminf_{n \rightarrow \infty} [1 - F(a_n x - b_n')]^n > 0$, откуда следует, что

$$F(a_n x - b_n') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому, если подпоследовательность $n_i[1 - F(a_{n_i}(z+x) + b_{n_i}'')] \rightarrow$ сходит к некоторому (конечному, бесконечному или нулевому) пре-

делу, то и подпоследовательность $(n_i - r) \left[\frac{1 - F(a_{n_i}(z+x) + b_{n_i}'')}{1 - F(a_{n_i} x - b_{n_i}')} \right]$

сходится к тому же пределу и, следовательно, разности (9) по такой подпоследовательности стремятся к нулю. Так как из любой подпоследовательности $n_k [1 - F(a_{n_k}(z+x) + b_{n_k}'')]]$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то ни по одной подпоследовательности индексов n_k разности (9) не могут сходиться ни в одной точке $z+x$ к числу, отличному от нуля. Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$ разности (9) сходятся к нулю.

Ввиду того, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{l=k}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^l(a_n(z+x) + b_n'') [1 - F(a_n(z+x) + b_n'')]^{n-l} - \right. \\
 & \quad - \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!(n-r-l)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^l \\
 & \quad \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l-r} \right| \leq \\
 & \leq \left| \sum_{l=k}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} F^l(a_n(z+x) + b_n'') [1 - F(a_n(z+x) + b_n')]^{n-l} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(n-k)!} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-k} dx \right| + \\
 & \quad + \left| \sum_{l=k-r}^{n-r} \frac{(n-r)!}{l!(n-l-r)!} \left[\frac{F(a_n(z+x) + b_n'') - F(a_n x - b_n')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^l \right. \\
 & \quad \left. \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]^{n-l-r} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(n-k)!} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-k} dx \right| + \left| \frac{1}{(n-k)!} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-k} dx - \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{(n-r)! \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]} \frac{1}{(n-r)! \left[\frac{1 - F(a_n(z+x) + b_n'')}{1 - F(a_n x - b_n')} \right]} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(n-k)!} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-k} dx \right|,
 \end{aligned}$$

из формул (7), (8) и (9) следует, что разности интегрируемых функций в интегралах I_1 и $\bar{I}_1$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, что и завершает доказательство леммы 1.

Для доказательства теоремы нам потребуется еще оценка порядка роста нормирующих коэффициентов a_n . Этой цели служат леммы 2, 3, 4.

ЛЕММА 2. Если при $n \rightarrow \infty$ число $n - k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_a^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon} \rightarrow \infty \text{ и } a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} - \varepsilon} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Для того, чтобы $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \rightarrow \infty$ и надлежащим образом подобранных постоянных $a_n > 0$ и b_n сходились к $\Phi_a^{(n-k+1)}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^a \text{ для всех } k > 0 \quad (10)$$

Это условие было найдено Б. В. Гнеденко [1] для случая $k = n$. Н. В. Смирнов [2] показал, что и для того случая, когда $k \neq n$ но при $n \rightarrow \infty$, $n - k$ остается постоянным, условие (10) также является необходимым и достаточным.

Далее, в цитированной уже работе Гнеденко показано, что если a_n выбраны как наименьшие x , удовлетворяющие неравенствам

$$1 - F(x(1+0)) \leq \frac{1}{n} \leq 1 - F(x(1-0)), \quad (11)$$

то

$$n(1 - F(a_n z)) \rightarrow z^{-a} \text{ для всех } z > 0, \quad (12)$$

причем сходимость эта равномерна на интервале $(0, \infty)$.

Допустим, что утверждение нашей леммы неверно, т. е. что $a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon}$ не стремится к ∞ или $a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} - \varepsilon}$ не стремится к 0. Мы покажем, что первое из этих предположений приводит нас к противоречию. Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

Если $a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon}$ не стремится к ∞ , то либо

а) $\limsup a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon} = A < \infty$, либо

б) $\limsup a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon} = \infty$, но $\liminf a_n \cdot n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon} < \infty$.

Если $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторой собственной функции распределения, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (это следует из леммы 3 цитированной ранее работы Гнеденко) и, следовательно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{(n+1)^{-\frac{1}{a} + \varepsilon}}{n^{-\frac{1}{a} + \varepsilon}} \rightarrow 1$$

Отсюда следует, что множество предельных точек последователь-

ности $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ всюду плотно на некотором интервале, если только последовательность $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ не сходится.

Таким образом, в случае б) существует конечная и отличная от нуля предельная точка A последовательности $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$.

Выберем подпоследовательности $\bar{n}_i$ и $\bar{\bar{n}}_i$ таким образом, чтобы отношение $\frac{\bar{n}_i}{n_i}$ осталось ограниченным для всех i и чтобы

$$\begin{aligned} a_{n_i} \cdot \bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} &\rightarrow A \\ a_{n_i} \cdot \bar{\bar{n}}_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда, с одной стороны, в силу (12) и (13)

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i [1 - F(\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x)] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(a_{\bar{n}_i} \cdot \frac{\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{n_i}} x\right) \right] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{n_i}} \right)^{-\alpha} = \infty \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i [1 - F(\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x)] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(a_{\bar{n}_i} \cdot \frac{\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{n_i}} x\right) \right] = \left(\frac{A}{x}\right)^\alpha, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\bar{n}}_i [1 - F(\bar{\bar{n}}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x)] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\bar{n}}_i \left(\frac{\bar{\bar{n}}_i}{\bar{n}_i} \right) \left[1 - F\left(\bar{n}_i^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \left(\frac{\bar{\bar{n}}_i}{\bar{n}_i} \right)^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x\right) \right] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{\bar{n}}_i}{\bar{n}_i} \right) \left[\frac{x}{A} \left(\frac{\bar{\bar{n}}_i}{\bar{n}_i} \right)^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \right]^{-\alpha} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{A} \right)^{-\alpha} \left(\frac{\bar{\bar{n}}_i}{\bar{n}_i} \right)^{\alpha \varepsilon} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, случай б) не может иметь места. Если имеет место случай а), то мы всегда можем выбрать последовательность индексов n_i таким образом, чтобы для всех целых $k > 1$ и для достаточно больших n_i имело место неравенство

$$a_{n_i k} \leq \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}, \quad (14)$$

где β — некоторая положительная постоянная, не зависящая от k .

В самом деле, если $A = 0$, то мы можем выбрать подпоследовательность $a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ так, чтобы для всех $n > n_i$ было $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} < a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$. Полагая $n = n_i k$ и $\beta = 1$, получим неравенство (14).

Если же $A > 0$, то в качестве подпоследовательности $a_{n_i} n_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ возьмем любую подпоследовательность, сходящуюся к A .

Тогда для произвольно малого положительного δ и достаточно больших n_i будут выполняться неравенства $a_{n_i} \cdot n_i^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} > A - \delta$ и при любом целом $k > 1$ $a_{n_{ik}} \cdot (n_{ik})^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} < A + \delta$.

Отсюда мы получим неравенство (14) $\left(\beta = \frac{A + \delta}{A - \delta}\right)$.

Из соотношения (10) и неравенства (14) мы имеем:

$$\frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F(a_{n_{ik}})} < \frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F(a_{n_{ik}} \cdot \beta \cdot k^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon})} \rightarrow \beta^\alpha \cdot k^{1 - \alpha\varepsilon} \quad (15)$$

С другой стороны, из неравенства (11) следует, что

$$\frac{1 - F(a_{n_i})}{1 - F(a_{n_{ik}})} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} k \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) противоречат друг другу для больших k (например, для $k > \beta^{\frac{1}{\varepsilon}}$). Таким образом, осуществление случая а) также оказывается невозможным, что и доказывает, что в предположениях нашей леммы $a_n \cdot n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3. Если при $n \rightarrow \infty$ число $n - k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \rightarrow \infty \text{ и } a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Чтобы при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходилась к $\Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$ при некоторых, надлежащим образом подобранных, постоянных $a_n \rightarrow 0$ и b_n , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Существует такое x_0 , что $F(x_0 - \varepsilon) < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ и $F(x_0) = 1$.

2) Для всякого $k > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - F(x_0 + kx)}{1 - F(x_0 + x)} = k^\alpha \quad (\text{см. в литер 1 и 2}).$$

При этом, как показано в цитированной уже работе Б. В. Гнеденко, a_n могут быть выбраны как наименьшие x , удовлетворяющие неравенству:

$$1 - F(-x(1-0) + x_0) \leq \frac{1}{n} \leq 1 - F(-x(1+0) + x_0). \quad (18)$$

Для таким образом выбранных a_n

$$n [1 - F(a_n x + x_0)] \rightarrow (-x)^\alpha \quad (19)$$

равномерно относительно x на интервале $(-\infty, 0)$.

Допустим, что утверждение первой части нашей леммы неверно, т. е. что при $n \rightarrow \infty$ $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$ не стремится к бесконечности.

В этом случае, либо а) $\limsup a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} = \infty$, но $\liminf a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} < \infty$, либо б) $\limsup a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} = A < \infty$. Проводя в точности те же рассуждения, какие были сделаны при доказательстве леммы 2, мы заключаем, что в случае а) должна существовать некоторая конечная и отличная от нуля предельная точка A последовательности $a_n \cdot n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon}$. Выберем подпоследовательности индексов $\bar{n}_i$ и $\bar{\bar{n}}_i$ таким образом, чтобы отношение $\frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i}$ оставалось ограниченным для всех i и чтобы

$$\begin{aligned} \frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i}^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \cdot a_{\bar{n}_i} &\rightarrow \infty \\ \frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i}^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \cdot a_{\bar{\bar{n}}_i} &\rightarrow A \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда, с одной стороны, в силу (19) и (20)

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x\right) \right] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(a_{\bar{n}_i} \cdot \frac{\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{\bar{\bar{n}}_i}} x\right) \right] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(-\frac{\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{\bar{\bar{n}}_i}} x \right)^\alpha = 0 \end{aligned}$$

для всех x интервала $(-\infty, 0)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x\right) \right] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(a_{\bar{n}_i} \cdot \frac{\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}}{a_{\bar{\bar{n}}_i}} x\right) \right] = \left(-\frac{x}{A} \right)^\alpha \\ \text{и } \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left[1 - F\left(\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x\right) \right] &= \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{n}_i \left(\frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i} \right) \left[1 - F\left(\bar{n}_i^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \left(\frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i} \right)^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} x\right) \right] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i} \left[-\left(\frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i} \right)^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \cdot \frac{x}{A} \right]^\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{n}_i}{\bar{\bar{n}}_i} \right)^{-\alpha\varepsilon} \left(-\frac{x}{A} \right)^\alpha > 0 \end{aligned}$$

для $x < 0$ в силу выбора подпоследовательностей $\bar{n}_i$ и $\bar{\bar{n}}_i$. Полученное противоречие доказывает невозможность осуществления случая а).

Если имеет место случай б), то, как и при доказательстве леммы 2, мы выбираем подпоследовательность индексов n_i таким образом,

чтобы для всех целых $k > 1$ и достаточно больших n_i имели место неравенства.

$$a_{n_i k} \leq \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon}, \quad (21)$$

где β — некоторая положительная, независимая от k постоянная. Из соотношения (17,2) и неравенства (21) мы получаем:

$$\frac{1 - F(x_0 - a_{n_i k})}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \leq \frac{1 - F(x_0 - \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon})}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \rightarrow \beta^\alpha k^{-1 - \alpha\varepsilon} \quad (22)$$

С другой стороны, из неравенства (18) следует, что

$$\frac{1 - F(x_0 - a_{n_i k})}{1 - F(x_0 - a_{n_i})} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} k^{-1} \quad (23)$$

Однако соотношения (22) и (23) противоречат друг другу для достаточно больших k (например, для $k > \beta^{\frac{1}{\varepsilon}}$). Таким образом, осуществление случая б) также оказывается невозможным, что и завершает доказательство первой части леммы. Вторая часть леммы доказывается совершенно аналогично.

ЛЕММА 4. Если при $n \rightarrow \infty$ число $n - k$ сохраняет постоянное значение и $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)}(z)$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$a_n \cdot n^\varepsilon \rightarrow \infty \text{ и } a_n \cdot n^{-\varepsilon} \rightarrow 0$$

Доказательство. Для того, чтобы при $n \rightarrow \infty$ последовательность функций распределения $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходилась к $\lambda^{(n-k+1)} z$ при некоторых постоянных $a_n > 0$ и b_n , необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная функция $A(z)$ такая, что $A(z) \rightarrow 0$ для $z \rightarrow z_0 = 0$ и что для всех значений x

$$\lim_{z \rightarrow z_0 = 0} \frac{1 - F(z(1 + A(z)x))}{1 - F(z)} = e^{-x},$$

[см. в литер. 1],

где число $z_0 \leq \infty$ определяется соотношениями $F(z_0) = 1$ и $F(z) < 1$ для $z < z_0$. При этом b_n могут быть выбраны как наименьшие x , удовлетворяющие неравенствам

$$F(x - 0) \leq 1 - \frac{1}{n} \leq F(x + 0) \quad (24)$$

и для $z = b_n A(z) = \frac{a_n}{b_n}$, т. е.

$$\lim_{b_n \rightarrow z_0 = 0} \frac{1 - F(b_n + a_n x)}{1 - F(b_n)} \rightarrow e^{-x} \quad (25)$$

Допустим, что утверждение первой части нашей леммы неверно, т. е., что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $a_n \cdot n^\varepsilon$ не стремится к бесконечности.

Тогда либо а) $\limsup a_n \cdot n^\varepsilon = \infty$, но $\liminf a_n \cdot n^\varepsilon < \infty$, либо б) $\limsup a_n \cdot n^\varepsilon < \infty$.

В случае а) мы можем, как и при доказательстве лемм 2 и 3, утверждать, что множество предельных точек последовательности $a_n \cdot n^\varepsilon$ всюду плотно на интервале между значениями $\limsup a_n \cdot n^\varepsilon$ и $\liminf a_n \cdot n^\varepsilon$.

Следовательно, мы можем выбрать две конечные и отличные от нуля предельные точки A_1 и A_2 последовательности $a_n \cdot n^\varepsilon$. Пусть $A_1 < A_2$. Выберем две подпоследовательности индексов $\bar{n}_i$ и $\underline{n}_i$ таким образом, чтобы при $i \rightarrow \infty$ выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{\bar{n}_i} \cdot \bar{n}_i^\varepsilon \rightarrow A_1 \\ a_{\underline{n}_i} \cdot \underline{n}_i^\varepsilon \rightarrow A_2 \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \rightarrow 0 \quad (27)$$

Из (26) следует, что при $i \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{\bar{n}_i}}{a_{\underline{n}_i}} = \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right)^\varepsilon + o \left(\left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right)^\varepsilon \right) \quad (28)$$

Далее из соотношений (24) и (25) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i} - a_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i} + a_{\bar{n}_i})} &= \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i} - a_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i})} \cdot \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i} + a_{\bar{n}_i})} \cdot \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i})} = \\ &= e^2 \cdot \frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} + o \left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

С другой стороны, из формулы (28) получаем, учитывая, что $\bar{n}_i > \underline{n}_i$ и, следовательно, $b_{\bar{n}_i} > b_{\underline{n}_i}$

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i} - a_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i} + a_{\bar{n}_i})} &> \frac{1 - F(b_{\bar{n}_i} - a_{\bar{n}_i})}{1 - F(b_{\bar{n}_i} + a_{\bar{n}_i})} = \\ &= \frac{1 - F \left[b_{\bar{n}_i} - a_{\bar{n}_i} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right)^\varepsilon + o \left(\left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right)^\varepsilon \right) \right\} \right]}{1 - F(b_{\bar{n}_i})} = \\ &= e^{\frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\bar{n}_i}{\underline{n}_i} \right)^\varepsilon} + o(1) \end{aligned} \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) следует, что для достаточно больших i должно иметь место неравенство:

$$\exp \left\{ \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\bar{n}_i}{n_i} \right)^\varepsilon \right\} < e^2 \cdot \left(\frac{\bar{n}_i}{n_i} \right)$$

Однако при $i \rightarrow \infty$ левая часть этого неравенства стремится к бесконечности быстрее, чем правая. Полученное противоречие доказывает невозможность осуществления случая а).

Если имеет место случай б), то, как и при доказательстве лемм 2 и 3, мы выбираем подпоследовательности индексов n_i таким образом, чтобы для всех целых $k > 1$ и достаточно больших n_i имели место неравенства

$$a_{n_i k} \leq \beta \cdot a_{n_i} \cdot k^{-\varepsilon}, \quad (31)$$

где β — некоторая положительная, не зависящая от k постоянная.

Из неравенства (24) и формулы (25) мы получим:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - F(b_{n_i} - a_{n_i})}{1 - F(b_{n_i k} + a_{n_i k})} = e^2 \cdot k \quad (32)$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (31), получим:

$$\frac{1 - F(b_{n_i} - a_{n_i})}{1 - F(b_{n_i k} + a_{n_i k})} > \frac{1 - F(b_{n_i k} - a_{n_i k} \cdot \frac{k^\varepsilon}{\beta})}{1 - F(b_{n_i k})} \rightarrow e^{\frac{k^\varepsilon}{\beta}} \quad (33)$$

Из соотношений (32) и (33) можно заключить, что для любого целого $k > 1$ выполняется неравенство:

$$e^{\frac{k^\varepsilon}{\beta}} < e^2 \cdot k$$

Однако неравенство это для достаточно больших k оказывается несправедливым. Полученное противоречие показывает, что случай б) не может иметь места, что и завершает доказательство первой части леммы. Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Доказательство теоремы. Прежде всего очевидно, что если последовательность $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к собственной функции распределения и если $\frac{a_n}{a_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) = \Phi_k^{(n)}\left(a_n \cdot \frac{a_n}{a_n} z + b_n\right) \rightarrow \varepsilon(z) = \begin{cases} 0 & (z \leq 0) \\ 1 & (z > 0) \end{cases}$$

Поэтому, если при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z), \quad \bar{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — собственная функция распределения, отличная от любой функции распределения $\Phi_\beta^{(r)}(z)$ при $\beta \leq \alpha$, то

$$\bar{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + \beta_n) \rightarrow \varepsilon(z)$$

Это следует непосредственно из лемм 2, 3 и 4.

Так как предел композиций равен композиции пределов двух функций распределения и так как композиция собственной функции распределения $\Phi(z)$ и несобственной функции $\varepsilon(z)$ равна функции $\Phi(z)$, то в этом случае

$$\begin{aligned} \lim \Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n) &= \lim \Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n) = \\ &= \Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z) * \varepsilon(z) = \Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z) \end{aligned}$$

Точно также, если

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi_{\alpha}^{(r)}(z), \quad \Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi(z) \neq \Phi_{\beta}^{(n-k+1)}(z)$$

ни при каком $\beta \leq \alpha$, то

$$\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \rightarrow \varepsilon(z) \text{ и } \Psi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n) \rightarrow \Phi_{\alpha}^{(r)}(z)$$

Из леммы 1 следует, что если $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi(z)$ при $n \rightarrow \infty$, то и $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi(z)$.

Таким образом, если при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z), \quad \Phi_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n)$$

сходится либо к $\Phi_{\beta}^{(r)}(z)$ при $\beta > \alpha$, либо к $\Psi_{\beta}^{(r)}(z)$ при любом $\beta > 0$, либо к $\lambda^{(r)}(z)$, то последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $\Phi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$. Если же $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi_{\alpha}^{(r)}(z)$, а $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n)$ сходится либо к $\Phi_{\beta}^{(n-k+1)}(z)$ ($\beta > \alpha$), либо к $\Psi_{\beta}^{(n-k+1)}(z)$ при любом $\beta > 0$, либо к $\lambda^{(n-k+1)}(z)$, то последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к $\Phi_{\alpha}^{(r)}(z)$.

Точно так же из лемм 3 и 4 можно заключить, что если

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n-k+1)}(z), \quad \text{а } \overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_{\alpha}^{(n)}(z)$$

при любом $\alpha > 0$, то последовательность функций $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$, а, следовательно, в силу леммы 1, и последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к функции распределения $\lambda^{(n-k+1)}(z)$. Если же $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \lambda^{(r)}(z)$, а $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$ при любом $\alpha > 0$, то последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к функции распределения $\lambda^{(r)}(z)$.

Если при $n \rightarrow \infty$ $\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$, а $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_{\beta}^{(r)}(z)$ при $\beta < \alpha$, то из леммы 4 следует, что последовательность функций распределения $\Psi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$, а, в силу леммы 1, и последовательность функций распределения $\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n + \beta_n)$ сходится к $\Psi_{\alpha}^{(n-k+1)}(z)$.

Если же

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Psi_{\alpha}^{(r)}(z), \quad \Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_{\beta}^{(n-k+1)}(z) \quad (\beta < \alpha),$$

то последовательность функций $\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n + b_n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$.

Таким образом, если k -ый и $(-r)$ -ый члены вариационного ряда имеют существенно различные предельные распределения (несущественно различными мы называем предельные распределения, отличающиеся лишь верхними индексами, т. е. $\Phi_\alpha^{(r)}(z)$ и $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$; $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$ и $\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, $\lambda^{(r)}(z)$ и $\lambda^{(n-k+1)}(z)$), то можно найти нормировку, при которой последовательность функций распределения ранга порядка (r, k) сходится к функции одного из следующих типов:

$$\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad \Phi_\alpha^{(r)}(z); \quad \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z); \quad \Psi_\alpha^{(r)}(z); \\ \lambda^{(n-k+1)}(z); \quad \lambda^{(r)}(z).$$

В силу известной теоремы Хинчина [3] о сходимости последовательности типов, мы можем утверждать, что в этом случае последовательность функций распределения ранга порядка (r, k) ни при какой нормировке не может сходиться к собственной функции распределения, не однотипной с функцией, найденной таким путем.

Рассмотрим далее тот случай, когда предельные распределения k -го и $(-r)$ -го членов вариационного ряда несущественно различны, т. е. когда

- а) либо $\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(r)}(z)$,
- б) либо $\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z)$,
- в) либо $\Phi_k^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)}(z)$ и $\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \lambda^{(r)}(z)$.

Если $\frac{a_n}{\alpha_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ или $\frac{a_n}{\alpha_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то мы получим те же возможные предельные распределения для ранга порядка (r, k) , что и в случае существенно различных предельных распределений k -го и $(-r)$ -го членов вариационного ряда.

Если же при $n \rightarrow \infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n} \rightarrow a$, где $0 < a < \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n \cdot az + \beta_n).$$

Поэтому, если при $n \rightarrow \infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n} \rightarrow a$, то в случаях:

- а) $\lim \Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n) = \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) * \Phi_\alpha^{(r)}(az)$;
- б) $\lim \Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n) = \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) * \Psi_\alpha^{(r)}(az)$;
- в) $\lim \Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n + \beta_n) = \lambda^{(n-k+1)}(z) * \lambda^{(r)}(az)$.

Наконец, если при $n \rightarrow \infty$ $\frac{a_n}{\alpha_n}$ не сходится ни к какому пределу, то выберем из этой последовательности подпоследовательность $\frac{a_{n_i}}{\alpha_{n_i}}$,

сходящуюся к конечному, нулевому или бесконечному пределу. Применяя к подпоследовательности $\Psi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z + b_{n_i} + \beta_{n_i})$ те же рассуждения, какие мы применяли раньше ко всей последовательности, мы получим, что либо $\Psi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z + b_{n_i} + \beta_{n_i})$, либо $\Psi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z + b_{n_i} + \beta_{n_i})$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к собственной функции распределения $\Phi(z)$, принадлежащей к одному из указанных в условиях теоремы типов. В силу леммы 1, к той же функции сходится последовательность $\Phi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z + b_{n_i} + \beta_{n_i})$ или $\Phi_{rk}^{(n_i)}(a_{n_i}z + b_{n_i} + \beta_{n_i})$. В силу теоремы Хинчина последовательность $\Phi_{rk}^{(n_i)}(z)$ ни при какой нормировке не может сходиться к собственной функции распределения, не однотипной с функцией $\Phi(z)$. Поэтому либо вся последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(z)$ при некоторой нормировке сходится к функции распределения $\Phi(z)$, либо последовательность $\Phi_{rk}^{(n)}(z)$ вообще ни при какой нормировке не сходится к собственной функции распределения.

Наша теорема тем самым доказана.

ПРИМЕРЫ. Приведем примеры, показывающие, что все указанные в теореме предельные распределения действительно существуют.

$$1) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(-x)^\beta} & \text{для } x \leq -1 \\ 1 - \frac{1}{2}(-x)^\alpha & \text{для } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{n}}, b_n = 0,$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + \beta_n) \rightarrow \Phi_\beta^{(r)}(z) \text{ при } a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2}}, \beta_n = 0,$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z) \rightarrow \Phi_\beta^{(r)}(z) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$2) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^\alpha & \text{для } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^\beta} & \text{для } x > 1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_\beta^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2}}, b_n = 0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z) \text{ при } a_n = \sqrt[n]{\frac{2}{n}}, \beta_n = 0$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z) \rightarrow \Phi_\beta^{(n-k+1)}(z) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$3) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0 \\ x^\alpha & \text{для } 0 < x \leq 1 \quad \alpha > 1 \\ 1 & \text{для } x > 1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_1^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } a_n = \frac{1}{n\alpha}, \quad b_n = 1,$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z) \quad \text{при } \alpha_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta_n = 0,$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

$$4) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq -1 \\ 1 - (-x)^\alpha & \text{для } -1 < x \leq 0 \quad \alpha > 1 \\ 1 & \text{для } x > 1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad b_n = 0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_1^{(r)}(z) \quad \text{при } \alpha_n = \frac{1}{n\alpha}, \quad \beta_n = 1$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

$$5) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^\alpha} & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } a_n = \frac{1}{\alpha} (\lg n)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}; \quad b_n = (\lg n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z) \quad \text{при } \alpha_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta_n = 0$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

$$6) \quad F(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{для } x \leq 0 \\ 1 & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \quad \text{при } a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad b_n = 0$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \lambda^{(r)}(z) \quad \text{при } \alpha_n = \frac{1}{\alpha} (\lg n)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad \beta_n = (\lg n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(\alpha_n z + \beta_n) \rightarrow \lambda^{(r)}(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

$$7) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq -1 \\ (1+x)^\alpha & \text{для } -1 < x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^\alpha} & \text{для } -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \quad (\alpha > 1) \\ 1 - (1-x)^\alpha & \text{для } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & \text{для } x > 1 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}, b_n = 1$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n, b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + 2b_n) \rightarrow \Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z) * \Psi_\alpha^{(r)}(z) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$8) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^\alpha} & \text{для } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2(1+x)^\alpha} & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) \text{ при } a_n = \sqrt[n]{\frac{n}{2}}, b_n = -1$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n \text{ и } b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + 2b_n) \rightarrow \Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z) * \Phi_\alpha^{(r)}(z) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$9) \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi_k^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)} \text{ при } a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \lg n}}; b_n = -\sqrt{2 \lg n} + \frac{\lg \lg n + \lg 4\pi}{2\sqrt{2 \lg n}}$$

$$\overline{\Phi}_r^{(n)}(a_n z + b_n) \rightarrow \lambda^{(r)}(z) \text{ при тех же } a_n \text{ и } b_n$$

$$\Phi_{rk}^{(n)}(a_n z + 2b_n) \rightarrow \lambda^{(n-k+1)}(z) * \lambda^{(r)}(z) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Приведенные примеры дают наглядное представление о некоторых свойствах предельных распределений ранга, которые легко могут быть получены аналитическим путем. Так, например, примеры 1—6 показывают, что если для начальной функции распределения $F(x)$ предельным распределением для ранга порядка (r, k) окажется одно из распределений $\Phi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(n-k+1)}(z)$ или $\lambda^{(n-k+1)}(z)$, то для начальной функции распределения $1 - F(-x)$ предельным распределением для ранга окажется соответственно распределение $\Phi_\alpha^{(r)}(z)$, $\Psi_\alpha^{(r)}(z)$ или $\lambda^{(r)}(z)$ и наоборот. Примеры 7—9 показывают, что если

начальное распределение симметрично, т. е. $F(x)=1-F(-x)$, то для ранга порядка (r, k) предельным окажется одно из распределений $\Phi_a^{(n-k+1)}(z) * \Phi_a^{(r)}(z)$, $\Psi_a^{(n-k+1)}(z) * \Psi_a^{(r)}(z)$ или $\lambda^{(n-k+1)}(z) * \lambda^{(r)}(z)$.

Общие необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять начальная функция распределения $F(x)$, чтобы предельное распределение ранга было того или иного типа, легко могут быть получены из условий сходимости функций распределения максимального члена вариационного ряда к возможным предельным законам, найденных в работе Б. В. Гнеденко.

ЛИТЕРАТУРА

Гнеденко Б. В. — Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics* Vol. 44, № 3, 1943.

Смирнов Н. В. — Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. Труды математического института им. Стеклова, т. 25, 1949.

3. Хинчин А. Я. — Предельные законы для сумм независимых случайных величин. ОНТИ, 1938.

4. Гартштейн Б. Н. — О некоторых предельных закономерностях для ранга. ДАН СССР, т. 60, № 7, 1948.

5. Gumbel E. J. — The distribution of range. *Annals of Mathematical Statistics*, v. XVII, № 3, 1947.

6. Elfving G. — The asymptotical distribution of range in samples from a normal population. *Biometrika*, v. XXXIV, pp. 112—113, 1947.

В. Ф. РОГАЧЕНКО

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ 2-й СТЕПЕНИ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИ ПОМОЩИ ЦИРКУЛЯ И ГИПЕРЦИРКУЛЯ

§ 1. А. С. Смогоржевским (1, 2, 3) было доказано, что любая задача на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского может быть решена без помощи линейки, если в качестве инструментов используются все три циркуля: обычный циркуль, орициркуль и гиперциркуль.¹ Другими словами, А. С. Смогоржевский показал возможность выполнения построений, аналогичных построениям Маскерони в евклидовой плоскости.

Н. М. Несторович (4, стр. 76—77) поставил вопрос о возможности ограничений числа циркулей при использовании их для решения задач 2-й степени: нельзя ли при решении конструктивных задач 2-й степени без помощи линейки ограничиться использованием только одного или хотя бы каких-либо двух циркулей из трех?

В настоящей статье делается первый шаг в решении этой задачи — показывается, что при любых построениях 2-й степени в плоскости Лобачевского без помощи линейки достаточно использовать только два циркуля: обычный циркуль (чертящий окружности) и гиперциркуль (чертящий эквидистанты). В дальнейшем, для сокращения, комплекс: циркуль-гиперциркуль будем обозначать через [ц-г].

При использовании в построениях линейки и всех трех циркулей решение всякой конструктивной задачи сводится к вычерчиванию прямых, окружностей, орициклов и эквидистант, а также к определению точек пересечения любых двух из этих четырех видов линий.

Имея в своем распоряжении только [ц-г], мы можем вычерчивать лишь окружности и эквидистанты, а также находить точки пересечения двух окружностей, двух эквидистант или окружности с эквидистантой.

В дальнейшем мы предполагаем, что прямая задается двумя различными точками A и B , а орицикл задается осью AA' и точкой A , лежащей на этой оси.²

Желая показать достаточность [ц-г] для решения любой конструктивной задачи 2-й степени, мы должны показать, как с помощью [ц-г] можно решить следующие задачи:

¹ О конструкции орициркуля и гиперциркуля и способах их использования в построениях см. работу Н. М. Несторовича (4, стр. 91—92, 105—107).

² Позднее будет показано, что другие способы задания орицикла могут быть сведены с помощью [ц-г] к указанному способу.

1. Найти точки пересечения прямой и окружности, центр которой известен.
2. Найти точки пересечения прямой и эквидистанты.
3. Найти точку пересечения двух прямых.
4. Найти точку пересечения прямой и орицикла.
5. Найти точки пересечения окружности и орицикла.
6. Найти точки пересечения эквидистанты и орицикла.
7. Найти точки пересечения двух орициклов.

Что касается вычерчивания прямой и орицикла, то без специальных инструментов — линейки и орициркуля — непрерывную прямую и непрерывный орицикл, конечно, вычертить нельзя. Однако мы покажем, что с помощью [ц-г] можно легко решить следующие две задачи:

8. Найти любое число точек на данной прямой.
9. Найти любое число точек на данном орицикле.

Перечисленные девять задач будем называть *главными задачами*. При решении этих задач нам придется решать некоторые *элементарные задачи*, разрешимость которых с помощью [ц-г] мы предварительно покажем. Кроме того, мы покажем, как с помощью [ц-г] можно решать *основные задачи*, связанные с особенностями теории параллельных в плоскости Лобачевского.

В дальнейшем элементарные, основные и главные задачи мы будем называть задачами соответственно первой, второй или третьей группы. Мы будем пользоваться следующими обозначениями для задаваемых или проводимых линий:

- пр. AB — прямая, проходящая через данные точки A и B ;
 $k(O, r)$ или $k(O, AB)$ — окружность с центром в точке O и радиусом r или AB ;
 $h(AA', B)$ — орицикл с направленной осью AA' , проходящий через точку B ;
 $e(AB, d)$ или $e(AB, CD)$ — эквидистанта с базисом AB и дистанцией d или CD ;
 $e(AB, C)$ — эквидистанта с базисом AB , проходящая через точку C .
 Прямые и орициклы, являющиеся элементами построения, на чертежах будут обозначаться пунктиром.

§ 2. Покажем, как с помощью [ц-г] решаются элементарные задачи.

ЗАДАЧА I, 1. Удвоить данный отрезок AB (вообще умножить его на n — целое).¹

Строим (фиг. 1) $k(B, AB)$ и $e(AB, d)$, где $d < AB$. Пусть C и D — точки их пересечения. Строим $k_1(D, AC)$. Пусть точка E — одна из точек пересечения k и k_1 . Тогда $AE = 2AB$, так как точка E будет вторым концом диаметра окружности радиуса AB . Повторив указанное построение достаточное число раз, получим $AF = nAB$.

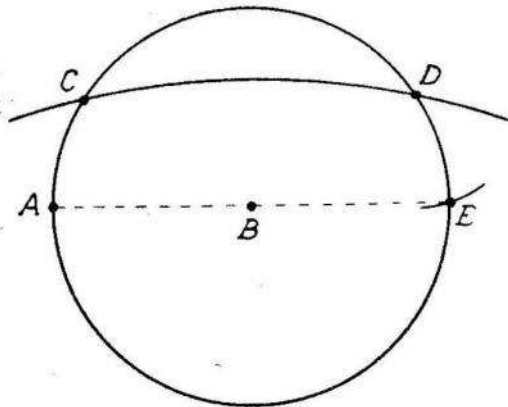
ЗАДАЧА I, 2. Восстановить перпендикуляр к данной прямой AB в данной на ней точке C .

Удвоив отрезок AC (I, 1), найдем точку D . С помощью циркуля находим точку E , равноудаленную от A и D и отличную от C . Тогда $EC \perp AB$.

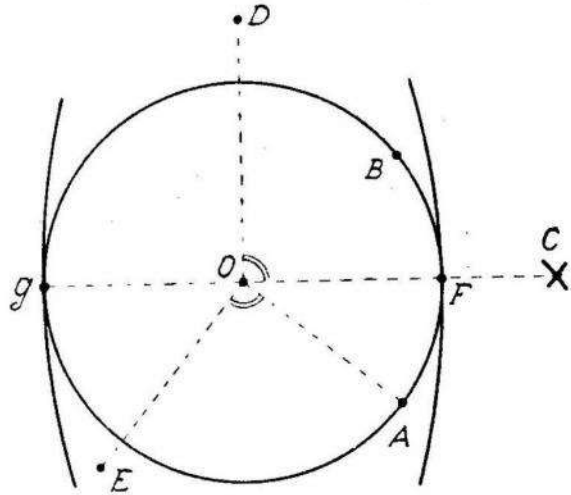
¹ Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 134).

ЗАДАЧА I, 3. Разделить пополам дугу $\widehat{AB}$ окружности с данным центром O .

Находим точку C (фиг. 2), равноудаленную от концов дуги A и B и не совпадающую с центром O окружности. Строим прямую $OD \perp OC$ (1, 2). Берем в гиперциркуль отрезок $OA = r$ и строим $e(OD, r)$.¹ Точки F и G касания эквидистанты с данной окружностью

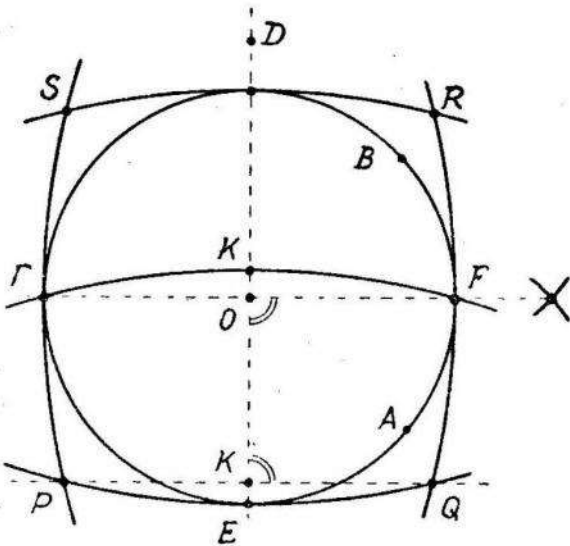


Фиг. 1



Фиг. 2

делят пополам дуги окружности, определяемые точками A и B , так как общая касательная окружности и эквидистанты будет перпендикулярна к прямой OC в середине дуги $\widehat{AB}$ окружности. Можно увеличить



Фиг. 3.

точность построения, определяя середину дуги окружности не как точку касания окружности и эквидистанты, а как точку их пересечения. Для этого (фиг. 3), кроме $e(OD, r)$, строим $e(OC, r)$. Эти эквидистанты пересекутся в точках P, Q, R, S . Пусть P и Q лежат по одну сторону пр. OC . Строим $e(PQ, r)$. Она пересечет окружность в искомым точках F и G . Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из конгруэнтности смешаноллинейных четырехугольников $OEQF$ и $HQFK$ и из того, что серединой дуги $\widehat{AB}$ окружности служит середина дуги $\widehat{QR}$ эквидистанты.

ЗАДАЧА I, 4. Удвоить данный угол $\angle ABC$ (вообще умножить его на n — целое).

¹ Для того, чтобы можно было взять в гиперциркуль отрезок $OA = r$, строим еще пр. $OE \perp OA$, по которой направим базис гиперциркуля.

Строим $k(B, BA)$ и $k_1(C, CA)$. Пусть D — вторая точка пересечения этих окружностей. Тогда $\angle ABD = 2\angle ABC$ в силу конгруэнтности треугольников ABC и DBC . Повторяя построение достаточное число раз, получим $\angle ABE = n\angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 5. Разделить данный угол $\angle ABC$ пополам (вообще на 2^n частей).

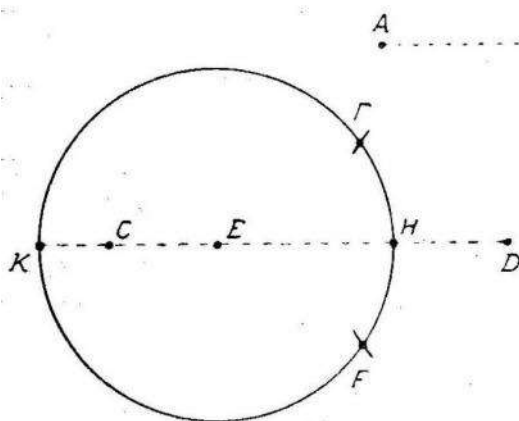
Строим $\angle ABD = 2\angle ABC$ (I, 4). Так как $AB = AD$, то точки A и D суть концы дуги окружности с центром в точке B . Делим дугу $\widehat{AD}$ пополам (I, 3). Пусть E — середина дуги $\widehat{AD}$. Разделив теперь дугу $\widehat{AE}$ пополам, получим точку F , так что $\angle ABF = \frac{1}{2}\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$. Повторяя операцию n раз, можем получить $\angle ABG = \frac{1}{2^n}\angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 6. Перенести отрезок AB на данную прямую CD , отложив его от данной точки E .

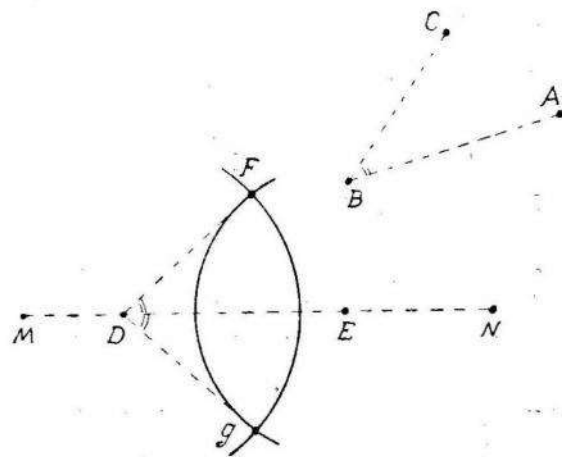
Строим $k(E, AB)$ (фиг. 4). Находим на ней точки F и G , симметричные относительно пр. CD . Находим середины H и K каждой из дуг $\widehat{FG}$ (I, 3). Тогда $EH = EK = AB$.

ЗАДАЧА I, 7. Построить угол, равный заданному углу $\angle ABC$ при данной прямой MN в данной на ней точке D .

Отложим отрезок AB (фиг. 5) на прямой MN от точки D (I, 6).



Фиг. 4



Фиг. 5

Пусть точка E — конец этого отрезка. Строим $k(D, BC)$ и $k_1(E, AC)$. Пусть F и G — точки пересечения k и k_1 . Тогда $\angle EDF = \angle EDG = \angle ABC$.

ЗАДАЧА I, 8. Из данной точки C опустить перпендикуляр на данную прямую AB .¹

¹ Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 136).

ный четырехугольник. Одна из пар противоположных вершин этого четырехугольника представляет собой пару искомых точек пересечения данных прямой и эквидистанты.

Случай 2°. Если прямые AB и CD сверхпараллельны и длина h их общего перпендикуляра меньше дистанции d , то эквидистанты имеют только две общих точки, которые и будут искомыми точками пересечения. Если $h = d$, то эквидистанты касаются и точка их касания будет точкой касания данных прямой и эквидистанты. Если h больше d , то прямая и эквидистанта общих точек не имеют.

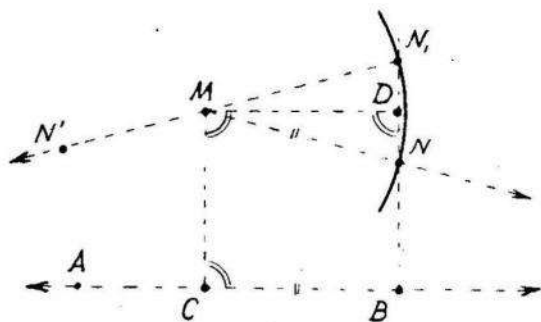
Случай 3°. Если AB параллельна CD , то эквидистанты в конечной части плоскости пересекаются только в одной точке, которая и будет искомой точкой пересечения.

Рассматриваемая задача дает возможность, не решая задачи о пересечении двух прямых AB и CD (III, 3), легко узнать, будут ли они пересекающимися, сверхпараллельными или параллельными. Для этого строим, например, $e(CD, A)$ и ищем вторую точку F пересечения этой эквидистанты с пр. AB . Если точка F существует и лежит на второй ветви эквидистанты, то прямые AB и CD пересекаются. Если точка F лежит на той же ветви, что и точка A , или совпадает с точкой A , то пр. AB сверхпараллельна пр. CD . Если, наконец, вторая точка F пересечения прямой и эквидистанты в конечной части плоскости не существует, то $AB \parallel CD$.

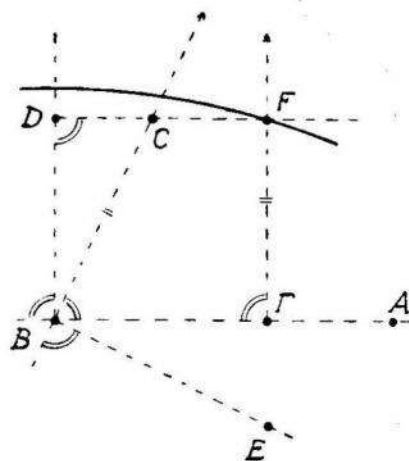
Перейдем теперь к решению основных задач.

ЗАДАЧА II, 1. Из данной точки M , лежащей вне данной пр. AB , провести пр. MN , параллельную AB .¹

Построение основано на свойствах трипрямоугольника. Из M на пр. AB опускаем (фиг. 7) перпендикуляр MC (I, 8). Проводим пр.



Фиг. 7



Фиг. 8

$MD \perp MC$ (I, 2). Затем из B на пр. MD опускаем перпендикуляр BD . Строим $k(M, BC)$ и находим точки N и N_1 пересечения этой окружности с пр. BD (III, 1). Продолжая пр. MN_1 по другую сторону

¹ См. работу Н. М. Несторовича (4, задача 158, 1-е решение). Мы даем измененный вариант, чтобы избежать определения точки пересечения двух прямых.

точки M , получим пр. MN' . Прямые MN и MN' параллельны прямой AB в соответствующие стороны, так как $\angle CMN = \angle CMN' = \Pi(CM)$.

ЗАДАЧА II, 2. Построить угол параллельности $\alpha = \Pi(a)$, отвечающий отрезку $a = AB$.

Перпендикулярно к отрезку AB строим пр. AC (I, 2). Строим пр. $BD \parallel AC$ (II, 1). Тогда $\angle ABD = \Pi(AB)$.

ЗАДАЧА II, 3. Для данного угла $\alpha = \angle ABC \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ построить отрезок $a = \Delta(\alpha)$, отвечающий углу α как углу параллельности.

Строим (фиг. 8) $BD \perp AB$ и $BE \perp BC$ (I, 2). Из точки C опускаем прямую $CD \perp BD$ (I, 8). Приняв BE за базис эквидистанты, проходящей через точку C , возьмем отрезок BC в гиперциркуль, а затем, построив $e(AB, BC)$, находим точки пересечения ее с прямой CD (III, 2).¹ Пусть F — та из двух точек пересечения, для которой точка C лежит между D и F . Из точки F опускаем $FG \perp AB$ (I, 8). Тогда в трипрямоугольнике $BDFG$ $\angle GBC = \Pi(BG)$, т. е. отрезок BG — искомый отрезок, отвечающий углу $\angle ABC$ как углу параллельности.

ЗАДАЧА II, 4. Построить общий перпендикуляр двух сверхпараллельных прямых AB и CD .

Строим $e(AB, C)$ и находим вторую точку C_1 пересечения эквидистанты с пр. CD . Если точки C и C_1 совпадают, т. е. пр. CD касается эквидистанты в точке C , то опускаем $CF \perp AB$. Пр. CF будет общим перпендикуляром прямых AB и CD . Если же точки C и C_1 не совпадают, то делим отрезок CC_1 пополам (I, 9) и из середины E этого отрезка опускаем $EF \perp AB$. Пр. EF есть общий перпендикуляр прямых AB и CD .

§ 4. Перейдем теперь к вопросу о разрешимости остальных главных задач с помощью [ц-г]. Построения будем проводить, пользуясь свойствами инверсии в плоскости Лобачевского.²

Предварительно решим несколько вспомогательных задач.

ЗАДАЧА 1. Построить образ κ абсолюта плоскости Лобачевского при инверсии относительно окружности k с центром O .

Искомым образом будет окружность κ , концентрическая с окружностью k и находящаяся внутри k . Действительно, если провести (фиг. 9) любой орицикл, пересекающий ортогонально окружность k в точках A и B , то при инверсии он перейдет в себя, а его бесконечно удаленная точка (то есть общая бесконечно удаленная точка его осей) перейдет в середину дуги $\widehat{AB}$ орицикла. Геометрическое место середин дуг всех орициклов, ортогонально пересекающих окружность k , есть окружность κ , концентрическая с окружностью инверсии k . Отсюда вытекает способ построения окружности κ . Взяв на окружности инверсии k произвольную точку A , строим $AA' \perp OA$ (I, 2) и пр. $OC' \parallel AA'$ (II, 1). Орицикл $h(OC', A)$ ортогонален окружности k . Найдём точку C этого орицикла, лежащую на его оси OC' .

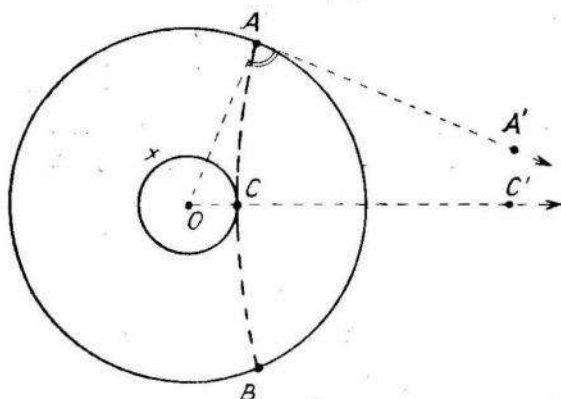
¹ Точек пересечения будет две, так как прямые AB и CD сверхпараллельны и дистанция BC эквидистанты больше длины их общего перпендикуляра BD как гипотенуза треугольника BCD .

² Об этом см. у А. С. Смогоржевского (3, стр. 51—55).

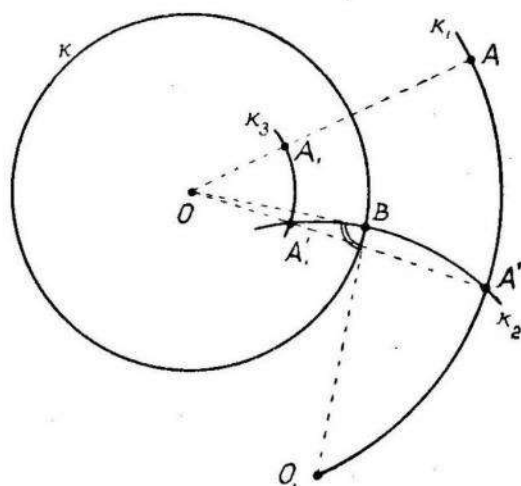
(построение такой точки будет указано ниже). Отрезок OC есть радиус искомой окружности κ .

ЗАДАЧА 2. Найти точку A_1 , являющуюся образом точки A при инверсии относительно окружности k .

Строим (фиг. 10) $k_1(O, OA)$. На окружности инверсии k берем произвольную точку B . Проводим $BO_1 \perp OB$ (I, 2) и строим $k_2(O_1, O_1B)$,



Фиг. 9



Фиг. 10

которая будет ортогональна окружности k . Пусть A' — одна из точек пересечения k_1 и k_2 .¹ Находим вторую точку пересечения A_1' окружности k_2 и луча OA' (III, 1). Точка A_1' есть образ точки A' . Строим, наконец, окружность $k_3(O, OA_1')$ и находим точку пересечения A_1 этой окружности и луча OA . Точка A_1 есть искомый образ точки A .²

ЗАДАЧА 3. Найти линию, являющуюся образом прямой AB , проходящей через центр окружности инверсии k .

Так как прямая AB ортогональна окружности k , то при инверсии она переходит в себя. При этом отрезок прямой внутри окружности κ будет образом идеальной части прямой и наоборот; отрезки прямой, заключенные между окружностями k и κ , будут образами лучей прямой, лежащих вне окружности k и наоборот.

ЗАДАЧА 4. Найти линию, являющуюся образом прямой AB , если прямая AB , не проходя через центр инверсии, пересекает образ κ абсолюта в двух различных точках.³

Пусть прямая AB (фиг. 11) пересекает окружность k в точках C и D , а окружность κ в точках E и F . Находим середину G меньшей из дуг EF окружности κ (I, 3). На луче OG находим отрезок параллельности OH , отвечающий углу $\angle EOG$ как углу параллельности (II, 3). Проводим $HK \perp OH$ (I, 2) и строим эквидистанту $e(HK, C)$.

¹ Чтобы k_1 и k_2 пересекались достаточно взять O_1 на k_1 или вне ее.

² При решении последних двух задач мы воспользовались построениями А. С. Смогоржевского (3, стр. 137–138), несколько изменив их, чтобы избежать использования орициркуля.

³ Решение принадлежит А. С. Смогоржевскому (3, стр. 140).

лав окружностью радиуса d с центром в точке Γ засечку на пр. AB , получим точку O (III, 1). Затем строим $\kappa(O, d)$, которая будет пересекать пр. CD в точках G и H , лежащих по одну сторону от прямой AB . Остается построить $k(O, r)$, являющуюся окружностью инверсии, с помощью которой будем находить точку пересечения прямых AB и CD .¹

Итак, пусть построена окружность $k(O, r)$ такая, что окружность $\kappa(O, d)$ перекает пр. CD в точках E и F , лежащих по одну сторону от пр. AB . При инверсии относительно k пр. AB перейдет в себя (задача 3), а пр. CD перейдет в эквидистанту e , ортогональную окружности κ (задача 4). При этом пр. AB будет сверхпараллельна базису эквидистанты e , так как она лежит вне угла $\angle EOF$, образованного прямыми OE и OF , параллельными базису эквидистанты. Следовательно, пр. AB будет пересекать одну ветвь эквидистанты e в двух различных точках M_1 и N_1 , из которых одна точка, например M_1 , лежит вне окружности κ . Найдя образ M точки M_1 при инверсии относительно окружности k (задача 2), получим искомую точку пересечения прямых AB и CD .

ЗАДАЧА III, 4. Найти точки пересечения прямой и орицикла.

ЗАДАЧА III, 5. Найти точки пересечения окружности и орицикла.

ЗАДАЧА III, 6. Найти точки пересечения эквидистанты и орицикла.

ЗАДАЧА III, 7. Найти точки пересечения двух орициклов.

Н. М. Несторович (4, стр. 135—144) показал, что эти четыре задачи могут быть решены с помощью циркуля и линейки, т. е. путем определения точек пересечения двух прямых или двух окружностей или прямой и окружности. Выше мы показали, что с помощью [ц-г] можно находить точки пересечения любого из этих трех видов. Следовательно, с помощью [ц-г] может быть решена каждая из задач III, 4—7.

ЗАДАЧА III, 8. Найти любое число точек на данной прямой AB .

Задача решается многократным комбинированием операций удвоения и деления пополам отрезка AB (I, 1, 9).

ЗАДАЧА III, 9. Найти любое число точек на данном орицикле.

Проведем под произвольным углом $\alpha < \frac{\pi}{2}$ к оси AA' пр. AB и найдем $AC = \Delta(\alpha)$ (II, 3). Удвоив отрезок AC в сторону точки C (I, 1), получим точку D , принадлежащую данному орициклу. Проводя прямые AB под различными углами $\alpha < \frac{\pi}{2}$ к оси AA' , получим любое число точек орицикла. Задачу можно решить иначе: через произвольную точку C провести $CC' \parallel AA'$, затем найти точку D орицикла, лежащую на его оси CC' (см. ниже § 5, б).

§ 5. Нам остается рассмотреть различные способы задания орицикла и показать, что с помощью [ц-г] они могут быть сведены к одному.

¹ Если угол между прямыми CD и AB будет меньше угла между прямыми CD и EO' , то уже окружность κ' будет пересекать пр. CD в точках E и F , лежащих по одну сторону пр. AB . Тогда дополнительное построение окружности κ производить нет необходимости.

Известно (4, стр. 133—135), что орицикл может быть задан одним из следующих четырех способов:

- а) направленной осью AA' и точкой A на ней;
- б) направленной осью AA' и точкой B вне ее;
- в) тремя точками A, B, C (при этом должно быть: $\angle ABC = \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) + \Pi\left(\frac{BC}{2}\right)$);
- г) отрезком дуги орицикла.

В качестве основного способа задания орицикла мы принимаем способ а), как наиболее естественный и соответствующий заданию окружности центром и радиусом.

Покажем, что при наличии комплекса инструментов [ц-г] способы б-г) задания орицикла могут быть приведены к способу а).

Способ г) легко сводится к способу в), если на начерченном отрезке дуги орицикла взять три различные точки.

Способ в) можно свести к способу б). Действительно, пусть даны точки A, B, C орицикла (фиг. 13). Найдем середину D отрезка AB и середину E отрезка BC (I, 9). Строим $DD' \perp AB$ и $EE' \perp BC$ (I, 2).

Тогда $DD' \parallel EE'$. Опускаем $ED_1 \perp DD'$ (I, 8) и, построив $e(DD', ED_1)$, определяем, в какую сторону сходятся параллельные прямые DD' и EE' . Этим определяется направление оси орицикла. Взяв, например, ось DD' и точку A орицикла, приходим к способу б).

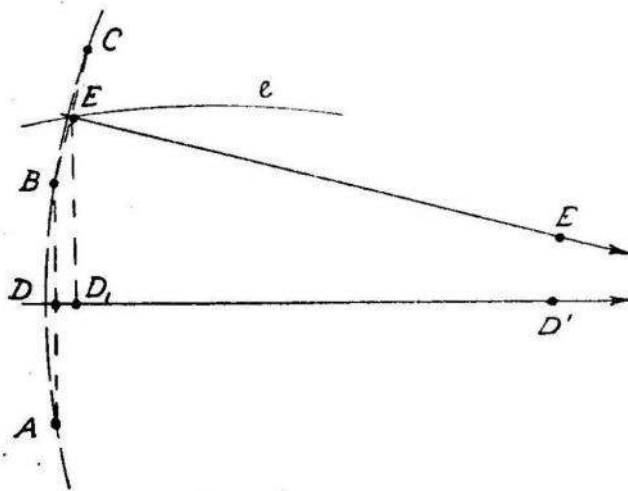
Покажем теперь как с помощью [ц-г] можно способ б) свести к способу а). Построение сводится к нахождению середины дуги орицикла и основано на соображениях, высказанных А. С. Смогоржевским (3, стр. 137).

Пусть (фиг. 14) дана дуга $\widehat{BC}$ орицикла и точка M на ней, такая, что $\widehat{BM} = \widehat{MC}$. Пусть, далее, точка E — середина хорды BC дуги $\widehat{BC}$ орицикла и CM — хорда дуги $\widehat{CM}$. Тогда $\angle CME = \Pi\left(\frac{CM}{2}\right)$. Из прямоугольного треугольника CME получаем:

$$\text{sh} CE = \text{sh} CM \cdot \sin \Pi\left(\frac{CM}{2}\right) = \frac{\text{sh} CM}{\text{ch} \frac{CM}{2}} = 2 \text{sh} \frac{CM}{2}$$

Сравнив крайние члены, получим: $\text{sh} \frac{CM}{2} = \text{sh} CE \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.

Итак, пусть даны ось AA' орицикла и точка B орицикла вне оси. Проведем ось $BB' \parallel AA'$ (II, 1). Находим точку C орицикла, симметричную с B относительно оси AA' и точку D орицикла, симметрич-



Фиг. 13

[illegible]

Фиг. 14

дач на построение второй степени в плоскости Лобачевского, то этим самым доказано, что решение любой задачи на построение второй степени в плоскости Лобачевского может быть выполнено с помощью только двух инструментов — циркуля и гиперциркуля. Следовательно, участие орициркуля в построениях Маскерони на плоскости Лобачевского не обязательно.

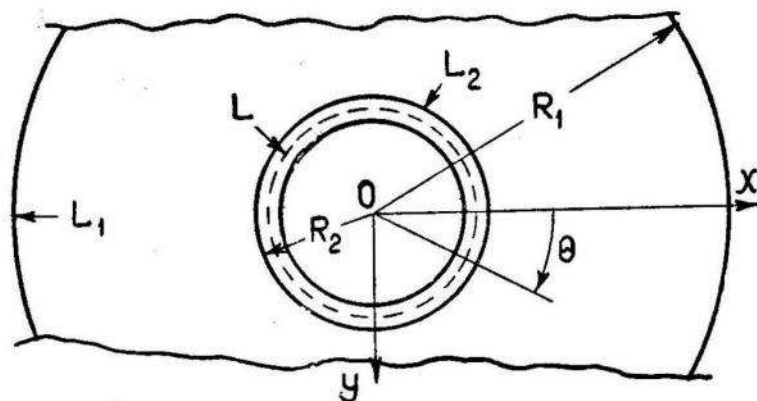
ЛИТЕРАТУРА

1. Смогоржевський О. С. — Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в просторі Лобачевського з допомогою циркуля, гороциркуля і гіперциркуля. Матем. збірник Київського держ. університету, 2, 1948.
2. Смогоржевський О. С. — Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського, Київ, 1949.
3. Смогоржевский А. С. — Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.-Л., 1951.
4. Несторович Н. М. — Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.-Л., 1951.

Н. П. ФЛЕЙШМАН

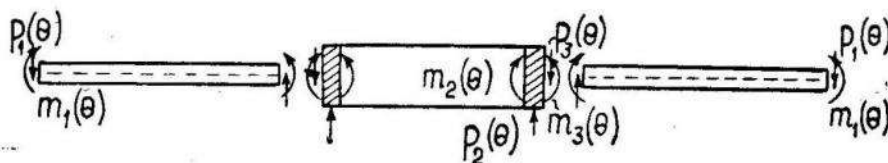
ИЗГИБ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

§ 1. *Постановка задачи. Метод решения.* Рассмотрим кольцеобразную тонкую изотропную плиту (фиг. 1), область которой ограничена концентрическими окружностями L_1 и L_2 с радиусами R_1 и R_2 .



Фиг. 1

На контуре L_1 действуют усилия $p_1(\theta) = N_n^{(1)} + \frac{\partial H_{nt}^{(1)}}{\partial s}$ и моменты $m_1(\theta) = M_n^{(1)}$, а контур L_2 подкреплён впаиванным упругим кольцом постоянного поперечного сечения из другого материала. Осевую линию кольца обозначим через L , а её радиус через R . Вдоль своей осевой линии кольцо нагружено внешними изгибающими моментами $m_2(\theta)$ и нормальными к плоскости кольца усилиями $p_2(\theta)$ (фиг. 2).¹



Фиг. 2

Оси координат $хоу$ и (r, θ) в срединной плоскости плиты направим так, как указано на фиг. 1. Ось $оз$ направим вниз.

Считая, что в срединной плоскости размер сечения подкрепляющего кольца мал по сравнению с радиусом R_2 плиты, рассмотрим условия спая между плитой и кольцом не по контуру L_2 , а по осевой линии кольца L . Кроме того, примем кольцо за тонкий упругий стержень, деформации которого описываются уравнениями малых деформаций тонких криволинейных стержней.

¹ Случай симметричного нагружения плиты поперечной нагрузкой рассмотрен в работах [1] и [2].

Для рассматриваемого случая условия на границе плиты записываются так:

1. На контуре [3] L_1 , т. е. при $r = R_1$,

$$n\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + iC_1z + C_2, \quad (1.1)$$

где $n = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$, C_1 — действительная, а C_2 — комплексная постоянные,

$$f_1 + if_2 = \frac{R_1}{2D(1-\nu)} \int_0^\theta [im_1(\theta) - R_1 \int_0^\theta p_1(\theta) d\theta] e^{i\theta} d\theta \quad (1.2)$$

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость плиты, h — толщина плиты, E и ν — упругие постоянные её материала.

2. На контуре L , т. е. при $r = R$, имеем¹):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= -\gamma_1(\theta), \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \gamma_2(\theta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\gamma_1(\theta)$ — угол закручивания кольца, т. е. угол поворота радиально-го сечения кольца вокруг касательной к контуру L ; $\gamma_2(\theta)$ — угол изгиба, т. е. угол поворота касательной к осевой линии кольца вокруг нормали к контуру L в данной точке; s — дуга контура L , w — прогиб срединной плоскости плиты.

Очевидно, что условие (1.3) выражает равенство углов поворота радиальных и касательных сечений кольца и плиты в точках контура L .

Учитывая, что

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (1.4)$$

и что на контуре L

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial x}{\partial s} = \sin \theta, \quad (1.5)$$

составим следующую комплексную комбинацию:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + i \frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2 \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] e^{-i\theta}.$$

Таким образом, граничные условия (1.3) примут вид

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = g_1^* + i g_2^*, \quad (1.6)$$

где

$$g_1^* + i g_2^* = -\frac{1}{2} \left[\gamma_1(\theta) - i \gamma_2(\theta) \right] e^{i\theta} \quad (1.7)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в нашем случае имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{iP_z}{8D} \cdot z + \frac{M_x^* + i M_y^*}{8D} \right] \ln z + \varphi_1(z) \\ \psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - i M_y^*}{8D} \ln z + \psi_1(z), \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹ За положительное направление отсчета углов $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ принято направление против часовой стрелки.

где P_z — главный вектор, а M_x^* и M_y^* — составляющие по осям ox и oy главного момента усилий, действующих со стороны кольца на плиту вдоль контура L . Эти величины известны, поскольку они равны соответственно главному вектору и составляющим главного момента заданных внешних усилий $m_2(\theta)$ и $p_2(\theta)$. $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — однозначные регулярные функции, которые могут быть представлены в области плиты в виде рядов Лорана

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k \cdot \frac{z^k}{R^k}, \quad \psi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cdot \frac{z^k}{R^k}. \quad (1.9)$$

В силу известного произвола в определении функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем считать, что $\alpha_0 = 0$, а β_1 — действительное число. Из условия однозначности прогибов плиты следует, что α_{-1} также вещественный коэффициент.

Учитывая (1.8), перепишем граничные условия (1.1) и (1.6) в виде

$$n\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1^0 + if_2^0 + iC_1z + C_2 \text{ на } L_1 \quad (1.10)$$

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = g_1^0 + ig_2^0 \text{ на } L, \quad (1.11)$$

где, полагая $\sigma = e^{i\theta}$, имеем:

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 = & f_1 + if_2 + \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{iR_1P_z}{2(1-\nu)D} \sigma + \frac{M_x^* + iM_y^*}{2(1-\nu)D} \right] \ln \sigma + \\ & + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln R_1 + \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} \sigma^2 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R_1P_z}{8D} \left[\frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln R_1 - 1 \right] \sigma; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} g_1^0 + ig_2^0 = & g_1^* + ig_2^* - \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \ln R - \\ & - \frac{RP_z}{16\pi D} (2 \ln R + 1) \sigma + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - iM_y^*}{8D} \sigma^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Представим теперь периодические в интервале $(0, 2\pi)$ функции¹ (1.12) и (1.13) в виде комплексных рядов Фурье

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \sigma^k \\ g_1^0 + ig_2^0 = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k \sigma^k \end{aligned} \quad (1.14)$$

¹ Доказательство периодичности функции (1.12) имеется в работе [3], периодичность функции (1.13) очевидна.

Коэффициенты $F_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1^0 + i f_2^0) e^{-ik\theta} d\theta$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) известны, а коэффициенты g_k определяются дальше из решения задачи о малых деформациях тонкого подкрепляющего кольца.

Предполагая, что ряды функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1.9) сходятся не только между, но и на контурах L и L_1 и подставляя их в граничные условия (1.10) и (1.11) с учетом разложения (1.14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} [n\eta^k \beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} \eta^{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k} \eta^{-k}] \sigma^k = \\ = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_k \sigma^k + i C_1 R_1 \sigma + C_2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [\beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k}] \sigma^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_k \sigma^k, \quad \left(\eta = \frac{R_1}{R} \right).$$

Сравнивая коэффициенты при σ в первом уравнении (1.15) и учитывая, что β_1 и α_{-1} вещественные коэффициенты, получим что $C_1=0$, так как

$$F_1 = - \frac{R_1}{4(1-\nu)\pi D} \left[\left(\frac{3+\nu}{4} + \frac{1+\nu}{2} \ln R_1 \right) R_1 \int_0^{2\pi} p_1(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} m_1(\theta) d\theta \right] \quad (1.16)$$

также вещественное число.

Сравнивая дальше коэффициенты при σ^k ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) в уравнениях (1.15), получим

$$\begin{aligned} n\eta^k \beta_k - (k-2) \eta^{-(k-2)} \bar{\beta}_{-(k-2)} + \eta^{-k} \bar{\alpha}_{-k} = F_k, \\ \beta_k - (k-2) \bar{\beta}_{-(k-2)} + \bar{\alpha}_{-k} = g_k. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Коэффициент β_0 определится при сравнении членов не зависящих от σ во втором уравнении (1.15).

Для решения системы (1.17) нам еще нужно определить g_k — коэффициенты разложения функции $g_1^0 + i g_2^0$ (1.14). Для этого, учитывая (1.13) и (1.7), необходимо выразить деформации $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ кольца, находящегося под совместным действием внешней нагрузки $m_2(\theta)$ и $p_2(\theta)$ и внутренних усилий, действующих со стороны плиты. Со стороны плиты на кольцо действуют изгибающие моменты $m_3(\theta)$ и перерезывающие силы $p_3(\theta)$ (фиг. 2), которые выражаются по формулам [1]:

$$\begin{aligned} m_3(\theta) = (M_r)_{r=R} = -2D \operatorname{Re} \{ 2(1+\nu) \varphi'(z) + \\ + (1-\nu) e^{2i\theta} [\psi'(z) + \bar{z} \varphi''(z)] \}_{r=R} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} p_3(\theta) = \left(N_r + \frac{\partial H r \theta}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{R} \right)_{r=R} = \frac{2D}{R} \operatorname{Re} \left\{ (1-\nu) z^2 \varphi'''(z) - \right. \\ \left. - (\nu+3) z \varphi''(z) + e^{2i\theta} (1-\nu) [2\psi'(z) + z \psi''(z)] \right\}_{r=R}. \end{aligned}$$

После подстановки в (1.18) соответствующих производных от функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (1.8) с учётом (1.9) получим

$$m_3(\theta) = \frac{D}{R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k' \sigma^k, \quad (1.19)$$

$$p_3(\theta) = \frac{D}{R^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k' \sigma^k,$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_0' &= -2 \left[2(1+\nu)\beta_1 - (1-\nu)\alpha_{-1} \right] - \frac{RP_z}{8\pi D} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu)\ln R \right], \\ m_1' &= -2 \left[(3+\nu)\beta_2 - (1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} \right] - \frac{1+\nu}{8\pi D} (M_y^* + iM_x^*), \\ m_k' &= -(k+1)[2(1+\nu) + k(1-\nu)]\beta_{k+1} - (1-\nu)(k-1)\alpha_{k-1} + \\ &+ (k-1)[2(1+\nu) - k(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(k-1)} + (k+1)(1-\nu)\bar{\alpha}_{-(k+1)}, \\ &\text{при } (k=2, 3, \dots) \\ m_{-k}' &= \bar{m}_k' \text{ при } (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0' &= -\frac{RP_z}{2\pi D}, \\ p_1' &= \frac{3-\nu}{8\pi D} (M_y^* + iM_x^*) + 2[(1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} - (3+\nu)\beta_2], \\ p_k' &= k(k+1)[(k-1)(1-\nu) - (3+\nu)]\beta_{k+1} + k(k-1)(1-\nu)\alpha_{k-1} - \\ &- k(k-1)[(3+\nu) + (k+1)(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(k-1)} + (k+1)(1-\nu)k\bar{\alpha}_{-(k+1)}, \\ &\text{при } (k=2, 3, 4, \dots) \\ p_{-k}' &= \bar{p}_k' \text{ при } (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Предполагая теперь возможность разложения внешних усилий $p_2(\theta)$ и $m_2(\theta)$ в комплексные ряды Фурье, представим их в виде¹⁾

$$\left. \begin{aligned} m_2(\theta) &= \frac{D}{R} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k \sigma^k \\ p_2(\theta) &= \frac{D}{R^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k \sigma^k \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

¹⁾ При этом силы $p_2(\theta)$ уже приведены к средней линии кольца.

где M_k и P_k — известные коэффициенты, а именно:

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{R}{2\pi D} \int_0^{2\pi} m_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \\ P_k &= \frac{R^2}{2\pi D} \int_0^{2\pi} p_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким образом, полная нагрузка, действующая на кольцо по его осевой линии, имеет вид

$$\begin{aligned} m(\theta) &= m_3(\theta) - m_2(\theta) = \frac{D}{R} \sum_{-\infty}^{+\infty} m_k \sigma^k, \\ p(\theta) &= p_3(\theta) - p_2(\theta) = \frac{D}{R_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k \sigma^k, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$m_k = m'_k - M_k, \quad p_k = p'_k - P_k \quad (1.25)$$

Для равновесия кольца необходимо выполнение следующих условий:

$$p_0 = 0, \quad m_1 = p_1, \quad m_{-1} = p_{-1} \quad (1.26)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что они действительно автоматически выполняются.

Зная полную нагрузку (1.24) кольца, можно выразить его деформации $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta) &= DR \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \sigma^k, \\ \gamma_2(\theta) &= DR \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \sigma^k, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{m_0}{A}; \quad a_1 = \frac{m_1}{A+C}; \quad a_{-1} = \frac{m_{-1}}{A+C}; \\ b_0 &= b_1 = b_{-1} = 0; \quad a_{-k} = \bar{a}_k; \quad b_{-k} = \bar{b}_k; \\ a_k &= -\frac{1}{(k^2-1)^2} \left[p_k \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \right) - m_k \left(\frac{1}{A} + \frac{k^2}{C} \right) \right], \\ b_k &= \frac{i}{k(k^2-1)^2} \left[p_k \left(\frac{k^2}{A} + \frac{1}{C} \right) - k^2 m_k \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} \right) \right], \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$A = E_1 J_1$ — жесткость кольца на изгиб; $C = G_1 J_k$ — жесткость кольца на кручение; E_1 и G_1 соответственно модуль Юнга и модуль сдвига материала кольца; J_1 — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно главной оси, лежащей в плоскости кольца; J_k — величина, имеющая специальное выражение для каждого вида поперечного сечения, известное из теории кручения.

Формулы (1.27) и (1.28) представляют собой решение задачи о малых деформациях тонкого кругового кольца под действием нагрузок (1.24). Это решение нетрудно получить методом операционного исчисления [4].

Учитывая выражения для $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$ (1.27), подставим (1.7) в (1.13) и получим коэффициенты разложения функции (1.14), т. е. правые части второго уравнения (1.17), в виде:

$$\begin{aligned} g_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* + i M_y^*}{4D} \ln R - \frac{m_{-1}}{2(\delta_1 + \delta_2)}, \\ g_1 &= -\frac{m_0}{2\delta_1} - \frac{R P_z}{16\pi D} (1 + 2 \ln R), \\ g_2 &= -\frac{m_1}{2(\delta_1 + \delta_2)} + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{M_x^* - i M_y^*}{8D}, \\ g_{k+1} &= \frac{1}{2k(k+1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} - (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ \bar{g}_{-(k-1)} &= -\frac{1}{2k(k-1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} + (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.29)$$

где:

$$\delta_1 = \frac{A}{RD}, \quad \delta_2 = \frac{C}{RD} \quad (1.30)$$

— относительные жесткости кольца на изгиб и кручение.

Входящие в (1.29) числа m_k и p_k определены выражениями (1.25), (1.23), (1.21), (1.20).

Если теперь в системе (1.17) k принимает значения $k+1$ и $-k+1$, ($k=0, 1, 2, 3, \dots$), получаем [после перехода к сопряженным значениям в последних двух уравнениях, соответствующих значению $(-k+1)$] следующие четыре уравнения, из которых определяются неизвестные коэффициенты β_{k+1} , $\bar{\beta}_{-(k-1)}$, $\alpha_{-(k+1)}$, α_{k-1} :

$$\begin{aligned} n\eta^{k+1} \beta_{k+1} - (k-1) \eta^{-(k-1)} \bar{\beta}_{-(k-1)} + \eta^{-(k+1)} \bar{\alpha}_{-(k+1)} &= F_{k+1}, \\ \beta_{k+1} - (k-1) \bar{\beta}_{-(k-1)} + \bar{\alpha}_{-(k+1)} &= g_{k+1}, \\ (k+1) \eta^{k+1} \beta_{k+1} + n\eta^{-(k-1)} \bar{\beta}_{-(k-1)} + \eta^{k-1} \alpha_{k-1} &= \bar{F}_{-(k-1)}, \\ (k+1) \beta_{k+1} + \bar{\beta}_{-(k-1)} + \alpha_{k-1} &= \bar{g}_{-(k-1)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отметим, что при $k=0$ последние два уравнения системы (1.31) совпадают с первыми, а их определитель

$$\Delta_0 = -\frac{2}{\delta_1(1-\nu)\eta} \left\{ (\eta^2-1)(1-\nu^2) + \delta_1[(1+\nu)\eta^2 + (1-\nu)] \right\} \quad (1.32)$$

отличен от нуля и, следовательно, из них однозначно определяются коэффициенты β_1 и α_{-1} .

При $k=1$ из первых двух уравнений (1.31) определитель которых имеет вид

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\eta^2(1-\nu)(\delta_1+\delta_2)} \left\{ (3+\nu)(1-\nu)(\eta^4+1) + \right. \\ \left. + [(1-\nu) + (3+\nu)\eta^4](\delta_1+\delta_2) \right\} \quad (1.33)$$

и также отличен от нуля, определяются коэффициенты β_2 и α_{-2} . Зная β_2 и α_{-2} , находим β_0 из четвертого уравнения (как мы уже указали выше). Третье уравнение (1.31) при $k=1$ удовлетворяется автоматически в силу того, что к его правой части нужно добавить произвольную постоянную C_2 (см. первое уравнение (1.15)).

Остается показать, что полученная система (1.31) всегда разрешима и при $k \geq 2$. Для этого заметим, что при конкретном решении этой системы можно выразить $\alpha_{-(k+1)}$ и α_{k-1} из первого и третьего уравнений и подставить их в оставшиеся уравнения. Таким образом получим систему двух уравнений с двумя неизвестными β_{k+1} и $\beta_{-(k-1)}$, определитель которой будет

$$\Delta_k = \frac{1}{2(k^2-1)} \left[A^{(k)} + B^{(k)} \frac{1}{\delta_1} + C^{(k)} \frac{1}{\delta_2} + D^{(k)} \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{1}{\delta_2} \right], \quad (1.34)$$

где

$$A^{(k)} = 2(k^2-1) \left\{ (k^2-1)(\eta^2-1)^2 + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \eta^{2(k+1)} \right] \left[1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \eta^{-2(k-1)} \right] \right\} > 0$$

$$B^{(k)} = \frac{2(3+\nu)}{1-\nu} \left[(2k+1+\nu)\eta^{2(k+1)} - (2k-1-\nu)\eta^{-2(k-1)} - \right.$$

$$\left. - (3+\nu)\eta^4 \right] + 2k^2(3+\nu) - 2\eta^2(k^2-1) \left[\eta^2(1-\nu) + 2(1+\nu) \right] > 0$$

$$C^{(k)} = \frac{2(3+\nu)}{1-\nu} \left[(2k+1+\nu)\eta^{2(k+1)} - (2k-1-\nu)\eta^{-2(k-1)} - (3+\nu)\eta^4 \right] -$$

$$- 2\eta^4(k^2-1)(1-\nu) + 4(k^2-1)(3-\nu)\eta^2 - 2(5-\nu)k^2 + 16 > 0,$$

$$D^{(k)} = 2(3+\nu)^2(\eta^{2(k+1)}-1)(1-\eta^{-2(k-1)}) -$$

$$- 2(k^2-1)(1-\nu)^2(\eta^2-1)^2 > 0$$

Следовательно, доказано, что система (1.31) однозначно определяет коэффициенты α_k и β_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1.9) и поставленная задача полностью решена.

Ряды (1.9) сходятся в кольце (включая контуры) абсолютно и равномерно, если $p_1(\theta)$ и $p_2(\theta)$ удовлетворяют условию Дирихле, а $m_1(\theta)$

и $m_2(\theta)$ непрерывны и имеют первую производную, удовлетворяющую условию Дирихле.

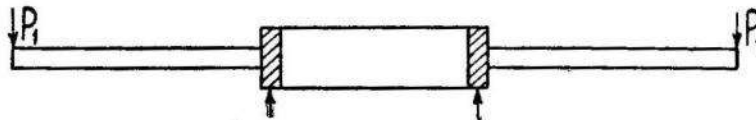
Если в полученном решении заменим везде R_1 на R и наоборот, получим автоматически решение аналогичной задачи о напряжениях в кольцеобразной плите, нагруженной усилиями $p_1(\theta)$ и моментами $m_1(\theta)$ по внутреннему контуру и подкрепленной кольцом по внешнему. Не представляет также принципиально никакого труда получить решение задачи о напряжениях в кольцеобразной плите, подкрепленной тонкими кольцами как по внутреннему, так и по внешнему контурам.

Из решения задачи для кольцеобразной плиты можно получить решение задачи о напряжениях в бесконечной плите с подкрепленным круговым отверстием. Для этого необходимо:

1. Принять за F_k коэффициенты, соответствующие напряженному состоянию на бесконечности в плите неослабленной отверстием.

2. Перейти к пределу при $\eta = R_1/R \rightarrow \infty$.

§ 2. *Изгиб кольцевой плиты перерезывающими силами.* Кольцевая плита нагружена по внешнему краю равномерно распределенными усилиями $p_1 = \text{const}$. Внутренний край заделан упругим кольцом и свободно оперт (фиг. 3).



Фиг. 3

Из (1.16), (1.29), (1.20) и (1.21) получим:

$$F_1 = -\frac{p_1 R_1^2}{8(1-\nu)D} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu) \ln R_1 \right]$$

$$P_z = -2\pi p_1 R_1,$$

$$g_1 = \frac{1}{\delta_1} \left[2(1+\nu)\beta_1 - (1-\nu)\alpha_{-1} \right] -$$

$$-\frac{p_1 \eta R^2}{8\delta_1 D} \left[2(1+\nu-\delta_1) \ln R + (3+\nu-\delta_1) \right]$$

При $k=0$ из системы (1.31) определяем

$$\alpha_{-1} = \frac{p_1 R_1^2 \eta}{4D\Delta^*} \left[(1+\nu)(1+\nu-\delta_1) \ln \eta - \delta_1 \right]$$

$$\beta_1 = \frac{p_1 R^2 \eta}{16D\Delta^*} \left\{ \eta^2 (1-\nu+\delta_1) \left[2(1+\nu) \ln R_1 + (3+\nu) \right] - \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[2(1+\nu-\delta_1) \ln R + (3+\nu-\delta_1) \right] \right\}, \quad (2.1)$$

где Δ^* определено выражением

$$\Delta^* = (\eta^2 - 1)(1-\nu^2) + \delta_1 \left[(1+\nu)\eta^2 + (1-\nu) \right]$$

Все остальные коэффициенты α_k и β_k равны нулю.

Учитывая (1.8) запишем функции напряжений плиты в виде

$$\varphi(z) = -\frac{R_1 p_1}{8D} z \ln z + \beta_1 \frac{z}{R}, \quad (2.2)$$

$$\psi(z) = \alpha_{-1} \frac{R}{z}$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы в плите будут:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{2D}{R} \left[2(1+\nu) \beta_1 - (1-\nu) \alpha_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + \frac{R_1 p_1}{4} \left[(3+\nu) + 2(1+\nu) \ln r \right], \\ M_\theta &= -\frac{2D}{R} \left[2(1+\nu) \beta_1 + (1-\nu) \alpha_{-1} \frac{R^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + \frac{R_1 p_1}{4} \left[(1+3\nu) + 2(1+\nu) \ln r \right], \\ N_\theta &= H_{r\theta} = 0, \quad N_r = \frac{R_1 p_1}{r} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив коэффициенты (2.1) в (2.3), получим:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{p_1 R_1}{2\Delta^*} \left\{ \delta_1 (1-\nu) \left(1 - \eta^2 \frac{R^2}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad + (1+\nu) \left[\eta^2 (1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \right] \ln \frac{r}{R} - \\ &\quad \left. - \eta^2 (1+\nu) \left[(1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \frac{R^2}{r^2} \right] \ln \eta \right\}, \\ M_\theta &= \frac{p_1 R_1}{2\Delta^*} \left\{ \nu \delta_1 (1-\nu) (1-\eta^2) + \right. \\ &\quad + (1+\nu) \left[\eta^2 (1+\nu) (1-\nu+\delta_1) - (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \right] \ln \frac{r}{R} - \\ &\quad - \eta^2 (1+\nu) \left[(1+\nu) (1-\nu+\delta_1) + (1-\nu) (1+\nu-\delta_1) \frac{R^2}{r^2} \right] \ln \eta - \\ &\quad \left. - (1+\nu) (1-\nu)^2 (\eta^2 - 1) - \eta^2 \delta_1 (1-\nu) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right\}, \\ N_r &= \frac{p_1 R_1}{r}, \quad N_\theta = H_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая в (2.4) $\delta_1 = 0$, получим известное решение для случая неподкрепленной плиты [3]. Если же перейдем к пределу при $\delta_1 \rightarrow \infty$, получим решение задачи о напряжениях в кольцевой плите с жестко защемленным внутренним контуром.

Для определения оптимального значения относительной жесткости кольца на изгиб δ_1 , которому соответствует минимальное значение расчетного изгибающего момента в плите, заметим, что в рассматриваемой задаче выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \text{при } \delta_1 = 0 \quad M_r &\leq 0 \\ \text{при } \delta_1 \rightarrow \infty \quad M_\theta &< 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial \delta_1} &> 0, \quad \frac{\partial M_r}{\partial \delta_1} < 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial r} &> 0 \quad \text{при } \delta_1 \leq 1 + \nu \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &> 0 \quad \text{при } \delta_1 \geq 1 + \nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

при любых значениях $\eta > 1$ и при $R \leq r \leq R_1$.

Кроме того, легко показать, что для $\delta_1 = 1 + \nu$ при $r = R$ имеет место равенство:

$$M_r = M_\theta = -\frac{p_1 R_1}{4 \eta^2} \left[2(1 + \nu) \eta^2 \ln \eta + (1 - \nu) (\eta^2 - 1) \right] \quad (2.6)$$

На основании (2.5) и (2.6) заключаем, что оптимальным значением δ_1 будет ¹⁾

$$\delta_1^{(opt)} = 1 + \nu \quad (2.7)$$

Расчетным изгибающим моментом в плите при $\delta_1 = 1 + \nu$ будет

$$M_{max} = (M_r)_{r=R} = (M_\theta)_{r=R},$$

определяемый формулой (2.6). Если же $\delta_1 \neq 1 + \nu$, то в силу неравенств (2.5) заключаем, что при $\delta_1 < 1 + \nu$ расчетным моментом будет $M_{max} = (M_\theta)_{r=R}$, а при $\delta_1 > 1 + \nu$ $M_{max} = (M_r)_{r=R}$.

В таблице 1 приведены значения величины $\sigma_{max} / \frac{2\pi p_1 R_1}{h^2}$ для некоторых значений $\eta = R_1 / R$ при $\nu = 0,3$ и при $0 \leq \delta_1 \leq \infty$.

Отношение чисел первой и третьей строк таблицы 1 выражается формулой:

$$k = \frac{(\sigma_{max})_{\delta_1=0}}{(\sigma_{max})_{\delta_1=1+\nu}} = \frac{2 \eta^2}{\eta^2 - 1} \quad (2.8)$$

¹ Способ подбора оптимального кольца с жесткостью (2.7) указан в работе [5].

Таблица 1

$\delta_1 \backslash \eta$	1,25	1,5	2	3	4	5
0	1,100	1,24	1,48	1,87	2,17	2,41
1	0,231	0,395	0,623	0,919	1,12	1,27
1,3	0,194	0,345	0,556	0,830	1,02	1,16
2	0,208	0,370	0,612	0,932	1,15	1,31
5	0,219	0,402	0,689	1,08	1,34	1,54
10	0,223	0,415	0,720	1,14	1,42	1,64
∞	0,227	0,428	0,753	1,20	1,51	1,75

Формула (2.8) показывает, что путем подкрепления края плиты оптимальным кольцом расчетные напряжения уменьшаются тем больше, чем больше размер отверстия в плите. При неограниченном увеличении размера внешнего диаметра плиты отношение (2.8) стремится к двум.

В заключение автор выражает благодарность профессору Г. Н. Савину за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, гл. 6 — 7, 1951.
2. Савин Г. Н. и Флейшман Н. П. Приближенное решение задачи изгиба кольцевой круглой плиты с подкрепленным краем. Инженерный сборник Института механики АН СССР, том VIII, 1950.
3. Фридман М. М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит. Прикладная математика и механика, том V, в. I, 1941.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. ГИТТЛ, § 20, 1951.
5. Флейшман Н. П. Приближенное решение одной контактной в смысле Г. Н. Савина задачи теории упругости. ДАН УССР, № 2, 1949.

В. С. МИЛИЯНЧУК

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Линейная электродинамика с высшими производными дает статический потенциал, зависящий от e^{-ar} , например [1]

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{r} (1 - e^{-ar}),$$

где e_0 обозначает элементарный заряд и a постоянную. Вид добавочного потенциала в этой схеме аналогичен виду потенциала Юкавы. Если пользоваться аналогиями, то было бы интересно исследовать также случай некоторой аналогии с теорией позитронов. Вероятность возникновения пары электрон-позитрон в постоянном электрическом

поле $\vec{E}$ равна $e^{-\frac{|\vec{E}|}{E_0}}$ [2], где E_0 „критическое“ поле. Если эту форму зависимости вероятности возникновения пары перенести на поле Кулона заряженной частицы t [2], то для вероятности возникновения пары получим величину $e^{-a^2 r^2}$, где a — постоянная, а r — расстояние от частицы. Так как для реального возникновения пары электрон-позитрон необходимо соблюдение законов сохранения энергии и импульса, то в случае, если эти законы не соблюдаются, возникают виртуальные пары, т. е. получается поляризация вакуума, что проявляется в возникновении исчезающей в среднем плотности заряда и изменении электрического поля. В связи с этим целесообразно построение обобщенной электродинамики, в которой, аналогично результатам теории позитронов, статический потенциал зависит от $e^{-a^2 r^2}$. Решение этой задачи является предметом настоящей работы.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ЛИНЕЙНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В электродинамике Максвелла электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ ($\varphi_{1,2,3} = A_x, A_y, A_z$; $\varphi_4 = i\varphi$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\square \varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x), \quad (1)$$

где $\square$ обозначает четырехмерный оператор Лапласа и $s_\mu(x)$

$(s_1, s_2, s_3 = i_x, i_y, i_z; s_4 = ic\rho)$ — четырехмерную плотность тока. Электромагнитные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца:

$$\frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_\nu} = 0 \quad (2)$$

Вместо дифференциальных уравнений (1) можно рассматривать интегральные уравнения для электромагнитных потенциалов:

$$\int K(x-x') \varphi_\mu(x') (dx') = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x), \quad (3)$$

ядро которого связано с функцией Грина дифференциальных уравнений (1) $G(x-x')$ соотношением:

$$\int K(x-x'') G(x''-x') (dx'') = \delta(x-x')$$

При этом $(dx) = dx dy dz dt$. В электродинамике Максвелла:

$$K(x-x') = \square \delta(x-x') \quad (4)$$

В действительности, подставляя (4) в (3), путем интегрирования по частям получаем (1). Принимая

$$K(x-x') = \square \left(1 - \frac{1}{a^2} \square\right) \delta(x-x'),$$

получаем уравнения потенциалов электродинамики с высшими производными

$$\square \left(1 - \frac{1}{a^2} \square\right) \varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

Обобщения электродинамики получаются обычно через обобщения функции Лагранжа. Таким способом получена электродинамика с высшими производными и нелинейная электродинамика. Однако можно получить обобщенную электродинамику, принимая также соответствующее ядро интегральных уравнений (3). В общем случае, конечно, интегральные уравнения (2) невозможно привести к дифференциальным уравнениям. Приводимый здесь способ обобщения электродинамики будем применять в дальнейшем. Очевидно, полученная таким способом обобщенная электродинамика согласно (3) будет линейной.

Обозначим через $f_{\mu\nu}(x)$ тензор напряжений электромагнитного поля

$$f_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial f_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu(x)}{\partial x_\nu} \quad (5)$$

В общем случае компоненты тензора напряжений будут являться решениями системы интегральных уравнений

$$\int \varepsilon(x-x') \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} (dx') = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \quad (6)$$

Для определения соотношения между ядрами уравнений (6) и (3)

$\varepsilon(x - x')$ и $K(x - x')$ предположим, что электромагнитные потенциалы $f_\mu(x)$ обобщенной электродинамики удовлетворяют условию Лоренца (2). Тогда, принимая во внимание (5), путем интегрирования по частям получаем из (6):

$$\int \square \varepsilon(x - x') \varphi_\mu(x') (dx') = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \quad (7)$$

Из уравнения (7) и (2) следует, что

$$K(x - x') = \square \varepsilon(x - x') \quad (8)$$

Обобщения электродинамики построены по общей схеме *Ми*, вводят для вакуума два тензора поля: тензор напряжений $f_{\mu\nu}$ и тензор смещений $F_{\mu\nu}$, подобно тому как электродинамика Максвелла вводит эти два тензора для диэлектрика. Тензор напряжений в таких обобщениях электродинамики выражается через электромагнитные потенциалы согласно (5) и удовлетворяет обобщенным уравнениям, нулевым приближениям которых являются уравнения Максвелла. Тензор смещений удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

и в общем случае не выражается через потенциалы. В электродинамике Максвелла в случае вакуума тензор напряжений и тензор смещений совпадают.

Связь между тензором смещений и тензором напряжений в обобщенной электродинамике получается из функции Лагранжа L :

$$F_{\mu\nu} = 8\pi \frac{\partial L}{\partial f_{\mu\nu}}$$

Случай линейной обобщенной электродинамики можно получить также из уравнения (6). Так как

$$\frac{\partial \varepsilon(x - x')}{\partial x'_\nu} = -\frac{\partial \varepsilon(x - x')}{\partial x_\nu}, \quad (9)$$

то, применяя интегрирование по частям уравнения (6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \int \varepsilon(x - x') f_{\mu\nu}(x') (dx') = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

Таким образом, тензор (10)

$$F_{\mu\nu} = \int \varepsilon(x - x') f_{\mu\nu}(x') (dx')$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \quad (11)$$

и является тензором смещений. Очевидно, в электродинамике Максвелла согласно (8) и (4) $\varepsilon(x - x') = \delta(x - x')$, поэтому в вакууме $F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}(x)$.

Используя (8) и (9), уравнение (7) можно записать в виде

$$\square \int \varepsilon(x - x') \varphi_\mu(x') (dx') = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \quad (7a)$$

Так как электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ удовлетворяют условию Лоренца (2), то четырехмерный вектор

$$\Phi_\mu(x) = \int \varepsilon(x - x') \varphi_\mu(x') (dx') \quad (12)$$

тоже удовлетворяет условию Лоренца и уравнениям потенциалов электродинамики Максвелла:

$$\square \Phi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu(x)$$

Из (12) и (10) следует, что

$$\frac{\partial \Phi_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu(x)}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu}(x) \quad (13)$$

Таким образом, в линейной обобщенной электродинамике для тензора смещений получаем полную систему уравнений Максвелла (11) и (13).

Уравнение (6) можно получить из функции действия

$$f = -\frac{1}{16\pi} \int f_{\mu\nu}(x) \varepsilon(x - x') f_{\mu\nu}(x') (dx) (dx') + \frac{1}{c} \int s_\mu(x) \varphi_\mu(x) (dx)$$

При этом необходимо предположить, что $\varepsilon(x - x') = \varepsilon(x' - x)$.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ПРИ ЗАДАННОМ СТАТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Обобщения электродинамики получаются обычно путем релятивистско-инвариантного обобщения функции Лагранжа. В линейной электродинамике возможен, однако, не менее общий и не менее интересный другой подход, сводящийся к решению следующей задачи: принимая определенный статический потенциал, построить линейную обобщенную электродинамику, дающую в случае покоящегося электрона принятый потенциал. При обобщении функции Лагранжа выбор этой функции ограничен такими только самыми общими требованиями, как релятивистская инвариантность функции Лагранжа, градиентная инвариантность и требование, чтобы уравнения электродинамики Максвелла являлись нулевым приближением обобщенных уравнений; помимо этих требований, выбор функции Лагранжа является произвольным. При другом подходе необходимо требовать, чтобы статический потенциал на больших расстояниях от электрона, создающего поле, совпадал согласно эксперименту с потенциалом Кулона. Помимо этого требования, выбор статического потенциала является произ-

вольным. В случае зависимости статического потенциала от $e^{-a^2 r^2}$ представляет интерес в первую очередь вид уравнений поля, а не уравнения поля для частного случая.

Начнем с решения следующей задачи в общем виде: найти уравнения поля, дающие в случае покоящейся заряженной точечной частицы определенный потенциал. Подобная задача решалась в работе [3] путем вычисления функции Грина уравнений электромагнитных потенциалов. Однако решение соответствующего интегрального уравнения возможно только в редких случаях. Поэтому мы используем представление уравнений электромагнитных потенциалов в виде (3). Тогда задача сводится к вычислению ядра интегральных уравнений (2) $K(x-x')$ при заданном статическом потенциале. Для частных вычислений удобно представить δ -функцию, ядро интегральных уравнений (3) $K(x-x')$ и электромагнитные потенциалы $\varphi_\mu(x)$ в виде интегралов Фурье:

$$\delta(x-x') = \frac{c}{(2\pi)^4} \int e^{i[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - c k_0(t-t')]} (dk), \quad (14a)$$

$$K(x-x') = \frac{c}{(2\pi)^4} \int A(k^2 - k_0^2) e^{i[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - c k_0(t-t')]} (dk), \quad (14б)$$

$$\varphi_\mu(x) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int F_\mu(k^2 - k_0^2) e^{i[(\vec{k}, \vec{r}) - c k_0 t]} (dk), \quad (14в)$$

где $(dk) = dk_x dk_y dk_z dk_0$ и $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Подставляя (14б) и (14в) в (3) и принимая во внимание (14а), получаем:

$$A(k^2 - k_0^2) F_\mu(k^2 - k_0^2) = - \frac{4\pi}{c} \int s_\mu(x) e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}) - c k_0 t]} (dk) \quad (15)$$

Рассмотрим точечный заряд e_0 , покоящийся в начале системы координат. Пусть статический потенциал точечного заряда будет $\varphi(r)$. Тогда

$$s_i(x) = 0 \quad (i=1, 2, 3); \quad s_4(x) = i c \delta(\vec{r}) \quad (16)$$

Из (14в) получаем

$$F_4(k^2 - k_0^2) = \frac{8\pi^2 i}{ck} \delta(k_0) \int_0^\infty r \varphi(r) \sin kr dr \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (15) и интегрируя по k_0 , вычисляем

$$A(k^2) = - \frac{c_0 k}{\int_0^\infty r \varphi(r) \sin kr dr} \quad (18)$$

Это дает возможность вычислить амплитуды Фурье ядра интегральных уравнений (3) $K(x-x')$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЗАВИСИМОСТИ СТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ОТ $e^{-a^2 r^2}$

Переходя к определению вида уравнений поля для случая, когда статический потенциал зависит от $e^{-a^2 r^2}$, возьмем наиболее простой потенциал:

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{r} (1 - e^{-a^2 r^2}) \quad (19)$$

Тогда

$$\int_0^\infty r \varphi(r) \sin kr dr = e_0 \left[\int_0^\infty \sin kr dr - \int_0^\infty e^{-a^2 r^2} \sin kr dr \right] \quad (20)$$

Определенные интегралы в (20) вычисляем следующим способом:

$$\int_0^\infty \sin kr dr = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\beta r} \sin kr dr = \frac{1}{k},$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 r^2} \sin kr dr = \frac{1}{k} \left[1 - F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right) \right],$$

где $F(1, \frac{1}{2}, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Таким образом находим согласно (18):

$$A(k^2) = -\frac{k^2}{F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right)} \quad (21)$$

Представим ядро уравнений поля (6) $\varepsilon(x - x')$ в виде интеграла Фурье:

$$\varepsilon(x - x') = \frac{c}{(2\pi)^4} \int A_0(k^2 - k_0^2) e^{i[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - ck_0(t - t')]} (dk) \quad (22)$$

Согласно (8)

$$A_0(k^2 - k_0^2) = -\frac{A(k^2 - k_0^2)}{k^2 - k_0^2} \quad (22a)$$

Из (21) следует, что в рассматриваемом нами случае:

$$A_0(k^2 - k_0^2) = \frac{1}{F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{k_0^2 - k^2}{4a^2}\right)} \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в (6), получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{c}{(2\pi)^4} \int \frac{(dk)}{F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{k_0^2 - k^2}{4a^2}\right)} \int \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} e^{i[(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') - ck_0(t - t')]} (dx') = \frac{4\pi}{c} s_\mu(x) \quad (24)$$

Приведение уравнений (24) в дифференциальные путем интегрирования подобно тому, как это можно сделать в электродинамике Максвелла или электродинамике с высшими производными, невозможно. Однако можно получить систему дифференциальных уравнений, если вычислить из (24) $\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}$. С этой целью умножаем (24) на $e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}) - ck_0 t]}$ и интегрируем по x, y, z, t . Переменяя порядок интегрирования и принимая во внимание (14а) находим:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}') - ck_0 t']} (dx') = \\ & = \frac{4\pi}{c} \int s_\mu(x') \cdot F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{k_0^2 - k^2}{4a^2}\right) e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}') - ck_0 t']} (dx) \end{aligned}$$

Но так как

$$(k_0^2 - k^2)^n e^{i[(\vec{k}, \vec{r}) - ck_0 t]} = \square^n e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}) - ck_0 t]},$$

где $\square^n$ обозначает n -кратное применение оператора $\square$, то

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial f_{\mu\nu}(x')}{\partial x'_\nu} e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}') - ck_0 t']} (dx') = \\ & = \frac{4\pi}{c} \int s_\mu(x') F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\square}{4a^2}\right) e^{-i[(\vec{k}, \vec{r}') - ck_0 t']} (dx'). \end{aligned} \quad (25)$$

Умножая (25) на $\frac{c}{(2\pi)^4} e^{i[(\vec{k}, \vec{r}) - ck_0 t]}$ и интегрируя по k_x, k_y, k_z, k_0 , получаем

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} \int s_\mu(x') F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\square}{4a^2}\right) \delta(x - x') (dx')$$

или, применяя интегрирование по частям:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\square}{4a^2}\right) s_\mu(x) \quad (26)$$

Так как электромагнитные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца то для потенциалов находим уравнения:

$$\square \varphi_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\square}{4a^2}\right) s_\mu(x) \quad (27)$$

Рассмотрим второй, более сложный, но вместе с тем охватывающий различные формы зависимости от $e^{-a^2 r^2}$, статический потенциал:

$$\varphi(r) = \frac{2e_0}{r\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{ar} e^{-t^2} dt - are^{-a^2 r^2} + 2a^2 r^2 \int_{ar}^\infty e^{-t^2} dt \right] \quad (28)$$

Подставляя (28) в (29), принимая во внимание (22а), вычисляем:

$$\frac{1}{A_0(k^2)} = 2e^{-\frac{k^2}{4a^2}} - F\left(1, 2, -\frac{k^2}{4a^2}\right).$$

Подобным способом, как в случае потенциала $\varphi(r) = \frac{e_0}{r}(1 - e^{-a^2 r^2})$, находим дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} \left[2e^{\frac{\square}{4a^2}} - F\left(1, 2, \frac{\square}{4a^2}\right) \right] s_\mu(x) \quad (29)$$

Таким образом, в случае, если статический потенциал зависит от $e^{-a^2 r^2}$, компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s'_\mu(x), \quad (30)$$

где плотность „свободного“ тока имеет вид

$$s'_\mu(x) = \left[1 + \frac{a_1}{1!} \cdot \frac{\square}{4a^2} + \frac{a_2}{2!} \left(\frac{\square}{4a^2} \right)^2 + \dots \right] s_\mu(x) \quad (31)$$

Уравнения (30) получаются из уравнений Максвелла, если „истинный“ ток $s_\mu(x)$ заменить „свободным“ током $s'_\mu(x)$. Если в (31) $a \rightarrow \infty$, то $s'_\mu(x) \rightarrow s_\mu(x)$, и уравнения (30) переходят в уравнения Максвелла.

Предположим, что источником поля является точечный заряд e_0 , тогда можно записать:

$$s_\mu(x) = e_0 \int \xi_\mu \delta(x - \xi) ds,$$

где s — собственное время, $\xi_\mu = \xi_\mu(s)$ — четырёхмерные координаты движущегося заряда, а ξ_μ обозначает дифференцирование координаты ξ_μ по собственному времени s . Тогда согласно (31):

$$s'_\mu(x) = e_0 \int \xi_\mu \left[1 + \frac{a_1}{1!} \cdot \frac{\square}{4a^2} + \frac{a_2}{2!} \left(\frac{\square}{4a^2} \right)^2 + \dots \right] \delta(x - \xi) ds.$$

Следовательно, источник поля для компонент тензора напряжений будет распределен в некоторой области пространства и времени.

Выражение (31) подобно выражению, которое получается для поляризации вакуума. В частности, можно подобрать статический потенциал так, чтобы второй и третий член в (31) совпадали с двумя известными членами для поляризации вакуума.

Вычислим распределение плотности „свободного“ заряда для случая статического потенциала (19) в системе координат, в которой точечный заряд покоится в начале системы координат. Согласно (27).

$$\rho'(\vec{r}) = F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\square}{4a^2}\right) \delta(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right) e^{i(\vec{k}, \vec{r})} (d\vec{k})$$

Но вырожденную гипергеометрическую функцию можно представить в виде:

$$F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{k^2}{4a^2}\right) = 1 - k \int_0^\infty e^{-a^2 t^2} \sin kt dt.$$

Выполняя интегрирование, вычисляем:

$$\rho'(\vec{r}) = e_0 \vec{\delta}(\vec{r}) - \frac{e_0 a^2}{2 r \pi} \left(1 - 2 a^2 r^2 \right) e^{-a^2 r^2}$$

Дополнительная плотность на расстояниях $r < \frac{1}{a\sqrt{2}}$ имеет знак, противоположный знаку точечного заряда e_0 , а на расстоянии $r > \frac{1}{a\sqrt{2}}$ имеет тот же самый знак, что заряд e_0 . Это распределение дополнительной плотности аналогично поляризации диэлектрика с переменной диэлектрической постоянной. Подобное распределение плотности получается во втором частном примере (28).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко Д. и Соколов А. — Классическая теория поля. М—Л., 1949.
2. Sauter F. — ZS. f. Phys., 69, 742, 1931.
3. В о р р F. — Ann. d. Phys., 42, 573, 1942.

А. Е. ГЛАУБЕРМАН

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ¹

Известные трудности современной квантовой теории поля, в частности, квантовой электродинамики находятся в связи с проблемой учета реакции поля в последовательной форме с одной стороны и с учетом так называемых вакуумных эффектов — с другой [1].

В настоящей статье рассматривается новая трактовка некоторых узловых вопросов современной теории.

§ 1. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В обычной квантовой электродинамике (если мы для удобства рассуждений будем рассматривать волномеханический формализм без вторичного квантования) гамильтониан системы, состоящей из частиц и поля, записывается в виде

$$H = H_D + H_F \quad (1)$$

где H_F представляет энергию излучения, а

$$H_D = \sum_k \left[\left(\vec{\alpha}_k \vec{p}_k + \frac{e_k}{c} \vec{A} \right) + \beta_k \mu_k - e_k \varphi^e \right], \quad (2)$$

где заряд электрона e_k , α_k и β_k матрицы Дирака для k -ой частицы, φ^e — скалярный потенциал только внешнего поля и $\vec{A}$ — векторный потенциал внешнего поля и излучения (исключая продольную часть поля). Оператор $\vec{A}$, описывающий полное поле, рассматривается при этом как эрмитовый оператор и оператор, описывающий энергию излучения H_F также эрмитов.²

Рассматривая задачи методом возмущений в обычной теории, выделяют из (2) часть, зависящую от переменных частиц и поля, и трактуют эту часть как возмущение, приводящее к переходам в двух „квазинезависимых“ подсистемах — частиц и поля [2, 3].

Таким образом, возмущение в этой теории имеет вид

$$H' = \sum_k e_k \left(\vec{\alpha}_k \vec{A} \right)$$

¹ Краткое содержание доклада, прочитанного на научной конференции ЛГУ в феврале 1952 г.

² Мы употребляем термин „эрмитовый“ на равных правах с термином „самосопряженный“. Чтобы избежать неточности в случае неограниченных операторов, отметим, что имеется в виду только свойство вещественности собственных значений (можно было бы говорить вообще о симметричных операторах).

Физический смысл члена H' очевиден, он описывает взаимодействие рассматриваемых двух „подсистем“.

Приведенная выше обычная схема в общем случае не может быть признана правильной; описание взаимодействия „подсистем“ частиц и поля только членом H' , строго говоря, не может претендовать на полноту и должно быть изменено.¹ Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно произвести следующий анализ. Дираковская форма (2) имеет смысл и по существу определена только для электронов в заданном *внешнем* поле, и описание взаимодействия путем введения в дираковский гамильтониан потенциала полного поля (включающего собственное поле излучения электрона) необосновано.

При наличии взаимодействия, включающего собственное поле электрона, каждая из „подсистем“ не может рассматриваться в принципе независимо от другой; только вся система в целом, т. е. система частиц и поля является в нашей теории замкнутой и должна описываться эрмитовским оператором Гамильтона. Если мы теперь искусственно разделим полную систему на две подсистемы частиц и поля, то, учитывая существование взаимодействия между ними, мы можем формально описать всю систему суммой двух операторов, относящихся соответственно к первой и второй „независимым“ подсистемам. Первой подсистеме (частицы) при учете реакции поля тогда будет соответствовать оператор:

$$H'_D = \sum_k \left[\left(\vec{\alpha}_k, \vec{p}_k + \frac{e_k}{c} \vec{A} \right) + \beta_k m_k - e_k \varphi^e \right] + L_D^{(1)} - iL_D^{(2)}, \quad (3)$$

где $\vec{A}$ эрмитовский оператор, описывающий *полное* поле как и в (2), а дополнительный член $L_D = L_D^{(1)} - L_D^{(2)}$ представляет собой общий вид некоторого несамосопряженного оператора при условии, что $L_D^{(1)}$ и $L_D^{(2)}$ — эрмитовы операторы.

Несамосопряженный оператор H'_D имеет физический смысл и соответствует тому, что для подсистемы частиц в отдельности при учете „реакции поля“ невозможны стационарные состояния (такая система диссипативна). Вторая подсистема — поле, взятая в отдельности, также должна описываться неэрмитовым оператором

$$H'_F = H_F + L_F^{(1)} - iL_F^{(2)}, \quad (4)$$

где $L_F^{(1)}$ и $L_F^{(2)}$ эрмитовские операторы а H_F — второй член в формуле (1).

Оператор H , описывающий полную систему, должен быть эрмитовым (полная система консервативна). Из требования эрмитовости полного оператора H вытекает единственное следствие

$$L_D^{(2)} = -L_F^{(2)}$$

и, таким образом, в общем случае полный оператор Гамильтона будет иметь форму:

$$H \equiv H_D + H_F + L, \quad (5)$$

где $L = L_D^{(1)} + L_F^{(1)}$ — некоторый эрмитовский оператор.

¹ В обычной теории указанный вид H' по существу выступает как гипотеза.

Если теперь считать взаимодействие частиц с полем излучения слабым, и выделить из H члены, содержащие переменные частиц и поля, то оператор возмущения будет иметь вид

$$\sum_k e_k (\vec{\alpha}_k \vec{A}) + L, \quad (6)$$

отличающийся от вида оператора H' обычной теории.

Следовательно, произведенный выше анализ показывает, что обычная теория оперирует, вообще говоря, с неправильным гамильтонианом полной системы частиц и поля; этот гамильтониан определен в ней с точностью до некоторого эрмитовского оператора. С точностью до этого же оператора определяется в обычной теории и оператор возмущения H' .

Поправочный член L в выражениях (5) и (6) должен играть существенную роль в высших приближениях теории возмущений, в то время как в первом приближении его влияние должно быть незаметным.

Высказанные соображения открывают путь к устранению некоторых трудностей теории без существенного изменения ее аппарата, приводя к задаче определения поправочного эрмитового оператора L формул (5) и (6).

§ 2. О НЕЭРМИТОВСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В связи с изложенными в § 1 соображениями естественно поставить вопрос относительно обобщения существующей квантовой механики путем введения в рассмотрение более широкого класса операторов, чем самосопряженные операторы.

В такой „неэрмитовской квантовой механике“ нашло бы место описание спонтанных переходов атомных систем и получили бы полное и последовательное решение всякие задачи, в которых волновое уравнение имеет только нестационарные решения, как, например, система, способная к распаду.

В действительности, задачи, подобные последней, заставили уже давно формально вводить в теорию комплексные собственные значения и решения брались в виде:

$$\psi(r, t) = \varphi(r) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}, \quad (7)$$

где $E = E_0 - i\Gamma$.

Задачи указанного типа не являются в принципе задачами особого рода, так как квантовая механика стационарных состояний должна вообще рассматриваться как приближенная „механическая“ теория. Известно, что в классической механике диссипативные проблемы, например, учет реакции поля электрона, невозможны, если механика построена в форме Гамильтона и, наоборот, можно формулировать задачу в рамках механической теории в форме Ньютона при введении соответствующих членов типа „радиационного трения“. Это положение находит свое отражение в квантовой механике. Гамильтоновой форме классической механики электрона может соответствовать квантовая

¹ Здесь и дальше $\hbar$ означает постоянную Планка, разделенную на 2π .

механика с самосопряженными операторами, а механике Ньютона с учетом диссипативных членов — квантовая механика, оперирующая, вообще говоря, с несамосопряженными операторами. Рассматривая уравнение

$$\psi(x, t) = S \psi(x, 0)$$

и отбрасывая предположение об унитарности оператора S , мы приходим, как обычно, к волновому уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^* \psi \quad (8)$$

где

$$i S S^{-1} = \frac{1}{\hbar} H^*, \quad (9)$$

и H^* неэрмитов.

Собственные значения оператора H^* , вообще говоря, комплексны, и мы приходим к квантовой механике „квазистационарных“ состояний, что полностью соответствует физическому смыслу проблемы. При этом решение уравнения

$$H^* \psi = E \psi \quad (10)$$

будет в общем случае отличным от выражения (7).

В такой неэрмитовой квантовой механике понятие „времени жизни“ атомной системы в том или ином состоянии будет внутренним, органически включенным в теорию. Комплексные собственные значения должны иметь вид

$$E = E_0 - i\Gamma(E_0), \quad (11)$$

где E_0 — вещественное число, характеризующее энергию рассматриваемого квазистационарного состояния, а $\Gamma(E_0)$ характеризует „ширину“ этого состояния, так как время жизни системы в том или ином состоянии, вообще говоря, различно. Если предполагать нормальность неэрмитовского гамильтониана квантовомеханической системы, то этот гамильтониан может быть представлен в виде:

$$H^* = H - iF(H), \quad (12)$$

где H обычный эрмитовский гамильтониан, приводящий к механике стационарных состояний.

Однако в некоторых задачах, связанных с граничным условием типа условия „излучения“ для волновой функции, как это имеет место, например, в теории распада сложной системы, построение эквивалентного оператора должно приводить к операторам не являющимся нормальными.¹ В связи с этим можно предполагать, что следует различать задачи, в которых неэрмитовость вводится благодаря граничным условиям указанного выше типа (как в теории α -распада), и задачи, в которых неэрмитовость содержится внутренне, как, например, в проблеме учета реакции поля электронов. В задачах первого типа (12), очевидно, не может иметь места, в то время как в задачах второго типа требование нормальности соответствующего неэрмитового оператора, вероятно, может быть выполнено.

При определении вида операторов, соответствующих физическим величинам, в этой неэрмитовской теории необходимо опираться на

¹ Этот результат был мне сообщен профессором М. С. Лифшицем.

принцип соответствия с классической механикой, включая механику диссипативных систем, с одной стороны, и с обычной квантовой механикой — с другой; можно сформулировать ряд физических требований, например, требования вещественности наименьшего собственного значения (по вещественной части E_0) оператора H^* , что соответствует стационарности основного состояния системы, условие $\Gamma(E_0) > 0$, что в большинстве случаев должно иметь место, и т. д., которые в совокупности с требуемыми соответствиями позволяют определить область расширения класса операторов, вводимых в теорию.

§ 3. ОБ УЧЕТЕ ВАКУУМНЫХ ЭФФЕКТОВ

Переходя к обсуждению вопроса о вакуумных эффектах отметим следующее. Уравнение Дирака, как и все релятивистские квантовые уравнения, вводит в рассмотрение „античастицы“;¹ можно высказать утверждение, что это уравнение в определенной степени учитывает взаимодействие „фона“, т. е. в данном случае электронно-позитронного вакуума с рассматриваемым электроном. В этом смысле проблема электрона в релятивистской квантовой теории является проблемой многих тел. Действительно, при рассмотрении свободного электрона по Дираку и применении соотношения, определяющего оператор производной в связи с самосопряженностью оператора Гамильтона H , мы получим, как известно, для оператора скорости

$$\frac{dx_i}{dt} = c\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Полученный оператор скорости может быть разложен на две части (так называемые „четная“ и „нечетная“ части). Первая часть, не обращающаяся в нуль при усреднении по времени, описывает трансляционное движение электрона; вторая же часть, обращающаяся в нуль при усреднении по времени, описывает дополнительное колебательное движение (Шредингеровское — „дрожание“) с большой частотой ν .

$$\nu = \frac{2H}{h} = \frac{2mc^2}{\sqrt{h^2(1-\beta^2)}}. \quad (14)$$

Это осциллирующее движение обычно связывается с существованием состояний отрицательной энергии. Усредняя по времени, мы отбрасываем движение, соответствующее переходам на отрицательные уровни и совершаем так называемую „индивидуальную“ ошибку. Говоря на модельном языке, можно предложить, согласно Френкелю [4], интерпретацию этого „дрожания“ в связи с отрицательными уровнями энергии, как результат того, что электрон может ассимилировать² с позитронами виртуальных пар из области вакуума, непосредственно окружающей электрон. Не углубляясь сейчас в рассмотрение этой модели, отметим как вывод, что при таком подходе мы должны считать, что требование релятивистской инвариантности кван-

¹ Попытки исключить отрицательные уровни энергии связаны с утратой релятивистской инвариантности теории.

² Употребление этого термина, принадлежащего Я. И. Френкелю, представляется нам более удачным, чем термин „аннигиляция“.

товой теории имеет более глубокое физическое содержание, чем это обычно считают. В частности, оно приводит к учету, в определенной степени, взаимодействия электрона с электронно-позитронным вакуумом, в связи с чем уравнение Дирака для свободного электрона является в прямом смысле уравнением „многоэлектронной задачи“.

Отсюда вытекает обоснование физически ясной „вычитательной“ операции. Так как картина флуктуаций различна при отсутствии и при наличии „реальных“ электронов, то учет обратного воздействия поляризованного вакуума на рассматриваемый „реальный“ электрон нужно производить „внешним“ образом, т. е. путем введения соответствующих дополнительных членов, не *полностью*, а *за вычетом взаимодействия* с флуктуациями, соответствующими отсутствию „реальных“ электронов. Это взаимодействие учитывается „внутренним“ образом, т. е. в самом уравнении Дирака, как это обсуждалось выше.

Последние соображения нужно связать еще с тем обстоятельством, что независимое рассмотрение нулевых флуктуаций электромагнитного поля и электронно-позитронного поля с последующим учетом „интерференционных эффектов“ является по существу неправильным. Несмотря на кажущуюся независимость перестановочных соотношений, из которых следуют флуктуации одного и другого типа, между ними должна существовать глубокая связь.¹

Изложенные в настоящей работе общие соображения составляют качественную схему, согласно которой может быть предпринята попытка построения количественной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвиг уровней атомных электронов, сборник статей под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, 1950.
2. Гайтлер В. — Квантовая теория излучения, ГТТИ, М.-Л., 1940.
3. Вентцель Г. — Введение в квантовую теорию волновых полей, ГТТИ, М.-Л., 1947.
4. Френкель Я. И. УФХ, т. 47, стр. 69, 1952.

¹ Простая модель нулевых флуктуаций электромагнитного поля, в которой рассматривается излучение электроном фотона с последующим поглощением последнего, непригодна ни в какой мере, так как флуктуации электромагнитного поля следуют из перестановочных соотношений, сформулированных для поля без частиц. Скорее может быть полезной модель, исходящая из рассмотрения виртуальных пар их образования и ассимиляции, в которой ясно выступает неразрывная связь флуктуаций первого и второго полей, или, вернее, то, что оба сорта флуктуаций — это две стороны одного явления.

С. А. КАПЛАН

О КОНДЕНСАЦИИ МЕЖЗВЕЗДНОГО ГАЗА НА ЧАСТИЦАХ КОСМИЧЕСКОЙ ПЫЛИ

Гипотеза конденсации межзвездного газа на частицах космической пыли, выдвинутая Линдбладом (1), повидимому, теперь является общепризнанной. Одна из последних по этому вопросу работ принадлежит Ван де Хальсту (2) и посвящена обоснованию этой гипотезы при помощи данных, полученных в результате опытов по аккомодации газов. По этим экспериментам можно заключить, что коэффициент аккомодации или вероятность адсорбции на поверхности с посторонними примесями (какие, повидимому, и осуществляются в случае кристалликов космической пыли) близки к единице. Между тем последним автором не учитывался тот факт, что во всех без исключения земных опытах, во-первых, разность между температурой газа и адсорбента мала, а, во-вторых, температура адсорбирующегося газа не превосходила $300 - 400^\circ$ абсолютной шкалы.

В межзвездном пространстве такие условия осуществляются лишь в плотных пылевых облаках, расположенных в областях неионизированного водорода (HI), т. е. на достаточном расстоянии от горячих звезд. Спитцер нашел, что температура газа в таких облаках порядка нескольких десятков и в крайнем случае — сотни градусов (3). Поэтому только на эти пылевые облака в областях HI можно экстраполировать земные данные и только к ним применимы соображения и доказательства Ван де Хальста.

Вне пылевых облаков температура межзвездного газа, по оценке Спитцера (3), достигает одной тысячи градусов, однако в силу малой плотности пылевой материи в этих областях адсорбция газа вряд ли имеет какое-либо значение.

И, наконец, в областях ионизированного водорода (HII) температура межзвездного газа достигает десяти и даже более тысяч градусов, в то время как температура пылинок попрежнему не превышает $30 - 40^\circ$. Ясно, что экстраполяция результатов земных экспериментов на эти условия, как это делает Ван де Хальст, совершенно незаконна.

Прежде всего заметим, что в силу большой разности температур процесс адсорбции в областях HII можно рассматривать только кинетически. Методы статистической теории адсорбции здесь совершенно неприменимы. Далее, так как теории кинетического процесса адсорбции фактически не существует, то самое большее, на что можно рассчитывать, — это качественные оценки.

В. П. Бонч-Бруевичем дан хороший обзор теоретических работ и современных представлений о кинетике процесса адсорбции, к которому мы и отсылаем за всеми подробностями физической стороны проблемы (4).

Как известно, процесс адсорбции заключается в следующем механизме: атом газа, налетающий на поверхность кристалла, отдает свою энергию кристаллической решетке и попадает в связанное состояние. Атом может передавать энергию кристаллической решетке благодаря возбуждению тепловых колебаний (фононов). Однако надо всегда иметь ввиду, что спектр энергии фононов ограничен сверху, а вероятность возбуждения одновременно нескольких фононов очень мала. Поэтому кристаллическая решетка не может поглотить в одном акте энергию, большую чем $k\Theta$, где Θ — дебаевская температура, а k — постоянная Больцмана. Для большинства кристаллов Θ порядка 300° .

Таким образом, чтобы адсорбция атома с энергией порядка kT , где T — температура межзвездного газа, могла бы иметь место с достаточной вероятностью, необходимо чтобы $T \leq \Theta$, что справедливо лишь для областей неионизированного водорода. В областях ионизированного водорода, где $T \gg \Theta$, вероятность передачи энергии кристаллической решетке космической пылинки очень мала, следовательно, и адсорбция будет сильно уменьшена по сравнению с областями HI. Оценить адсорбцию в этом случае можно, если принять, что все атомы с энергией, меньшей чем $k\Theta$, адсорбируются при столкновении с пылинками, а все атомы с энергией, большей чем $k\Theta$, — не адсорбируются.

Число столкновений атомов массы m , энергия которых находится в интервале от u до $u + du$, с единицей площади на поверхности кристалликов за единицу времени определяется известной формулой:

$$dz(u) = \frac{nudu}{(2\pi m)^{1/2} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{u}{kT}}, \quad [1]$$

где n — число атомов в единице объема межзвездного пространства. Отсюда число столкновений с энергией, меньшей чем $k\Theta$:

$$z(k\Theta) = \int_0^{k\Theta} dz(u) = n \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\Theta}{T} \right) e^{-\frac{\Theta}{T}} \right\} \quad [2]$$

или, приближенно, учитывая, что $\Theta \ll T$:

$$z(k\Theta) \approx \frac{n}{2} \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} \frac{\Theta^2}{T^2} \quad [3]$$

Так как полное число столкновений $z = n \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}$, то вероятность адсорбции:

$$\bar{w} = \frac{z(k\Theta)}{z} \approx \frac{1}{2} \frac{\Theta^2}{T^2} \approx 5 \cdot 10^{-4}, \quad [4]$$

если принять $\Theta = 300^\circ$ и $T = 10000^\circ$. Заменяя в [3] m на Am_n , где A — атомный вес, а m_n — масса атома водорода, получим для числа

атомов, адсорбирующихся за 1 сек. на 1 см^2 поверхности кристалликов:

$$\frac{n}{2A^{1/2}} \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} \frac{\Theta^2}{T^2}$$

или численно:

$$165 \frac{n}{A^{1/2}} \quad [5]$$

Поскольку время существования III области не превосходит 10^{16} сек., то полное число атомов, адсорбированных на 1 см^2 поверхности пылинок, должно быть меньше, чем:

$$1,65 \cdot 10^{18} \sum \frac{n}{A^{1/2}},$$

где сумма распространена по всем элементам, способным адсорбироваться. Поскольку водород и гелий не могут адсорбироваться в значительном количестве, то $\sum \frac{n}{A^{1/2}} \leq 1$. Между тем, для того, чтобы рост частиц вследствие адсорбции был бы заметен, необходимо, чтобы число атомов, адсорбированных на 1 см^2 поверхности пылинок, было бы порядка $10^{22} - 10^{23}$.

Таким образом, мы можем заключить, что прямой процесс адсорбции, т. е. основной механизм передачи кинетической энергии тепловым колебанием решетки в областях ионизированного водорода имеет очень малую вероятность.

Помимо прямого акта передачи кинетической энергии адсорбирующегося атома решетке, было предложено несколько механизмов, растягивающих этот процесс во времени и тем самым позволяющих возбуждение нескольких фононов 4. Однако эти процессы не в состоянии заметно увеличить вероятность [4], так как для адсорбции атома с $T = 10^4$ градусов требуется возбуждения по крайней мере 30 фононов.

Большую вероятность в нашем случае имеет механизм адсорбции, заключающийся в перебрасывании поверхностных атомов решетки на возбужденные уровни. Возможно также поглощение энергии за счет выбивания атомов из положения равновесия в решетке и перебрасывания их в другой узел или в междуузлие. К сожалению, эти механизмы в теории кинетики адсорбции еще не рассматривались. Необходим детальный анализ. Однако мало вероятно, чтобы эти механизмы увеличили вероятность адсорбции [4] в $10^4 - 10^6$ раз. Заметим, что оба эти механизма приводят не только к адсорбции, но и к разрушению кристалликов.

Отсюда следует, что рост пылевых частиц в облаках, расположенных в областях ионизированного водорода, практически не происходит.

Наличие пылевых облаков вблизи звезд типа VI — A0, находящихся при этом в зоне III, можно, повидимому, объяснить случайной встречей звезды с облаком.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Lindblad B. — Nat 135 133, 1935.
2. Van de Hulst H. — Rech d'Obs d'Utrecht XI part 2, 1949.
3. Spitzer L., Savedoff—Ap J 111 593, 1950.
4. Бонч-Бруевич В. Л. — УФН 60 369, 1950.

С. А. КАПЛАН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖЗВЕЗДНОГО ВОДОРОДА
С КОСМИЧЕСКОЙ ПЫЛЬЮ И ПЛОТНОСТЬ L_{α} ИЗЛУЧЕНИЯ В
МЕЖЗВЕЗДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Для решения многих космогонических задач, связанных с вопросами образования и распада облаков межзвездного газа и космической пыли, а также с гипотетической конденсацией этих облаков в протозвезды, нужно выяснить, какие силы действуют между различными компонентами межзвездной среды. Помимо обычного гравитационного притяжения, существует и так называемое радиативное притяжение. Механизм этого притяжения заключается в том, что атом или пылинки, находящиеся вблизи другой пылинки в поле излучения, получают импульс с противоположной стороны, так как указанная пылинка закрывает (затеняет) излучение. В работе (1) было показано, что радиативное притяжение между двумя пылинками, находящимися в галактическом поле излучения, в сто и более раз превышает их гравитационное притяжение. Этот результат уже был использован во многих космогонических работах. Можно далее показать, что радиативное притяжение между любыми атомами, кроме водорода, и пылинками меньше их гравитационного притяжения.

Особый интерес представляет случай радиативного притяжения межзвездного водорода и космической пыли, так как, во-первых, водород является наиболее обильным элементом, а, во-вторых, в межзвездном пространстве может происходить накопление L_α квантов. Таким образом, для определения радиативного притяжения между водородом и космической пылью необходимо прежде всего вычислить плотность L_α излучения в межзвездном пространстве. Вследствие большой оптической толщины слоя межзвездного водорода в этой линии, наличия чистого поглощения космической пылью, а также благодаря неоднородному вращению Галактики для вычисления плотности L_α излучения в общем случае необходимо решить задачу о рассеянии света в оптически толстой рассеивающей и поглощающей среде.

2. Мы учтем следующие механизмы выхода L_{α} кванта из среды межзвездного водорода:

а) Некогерентность рассеяния. Занстра (2) показал, что в среде ионизированного водорода с полной оптической толщиной в L_α порядка 10^4 вероятность выхода кванта из среды благодаря некогерентности рассеяния: $w \approx \frac{1}{300}$. Это значение мы примем в дальнейших выкладках, хотя вывод Занстра и не является достаточно надежным.

б) Доплеровский эффект, вызванный неоднородным вращением Галактики. Учет этого эффекта мы проведем методом В. В. Соболева (3). Величина β , играющая в теории В. В. Соболева основную

роль и являющаяся отношением градиента скорости по оптической глубине к средней хаотической скорости — u (тепловой и турбулентной), в нашем случае дается выражением:

$$\beta = \frac{A}{2ua_H} \sin 2(l - l_0) \cos^2 b, \quad [1]$$

где A — постоянная Оорта, l и b — галактические координаты, a_H — коэффициент поглощения в L_α на единицу длины.

в) Чистое поглощение L_α квантов на частицах космической пыли. Коэффициент этого поглощения на единицу длины обозначим через a_g . Повидимому, в среднем вблизи плоскости Галактики: $a_g \approx 3^m \text{ kps}^{-1}$.

Введем удобное для дальнейших выкладок обозначение:

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = w + \frac{a_g}{a_H}. \quad [2]$$

Для простоты расчетов будем также считать слой межзвездного водорода плоскопараллельным и отсчитывать оптическое расстояние от галактической плоскости в обе стороны.

3. Вывод основного интегрального уравнения нашей задачи аналогичен выводу соответствующего интегрального уравнения для планетарных туманностей, полученного В. В. Соболевым (3). Небольшое отличие связано с необходимостью учета чистого поглощения и некогерентности рассеяния, а также несколько иной зависимости градиента скорости от направлений.

Интенсивность излучения, идущего на оптическом расстоянии τ в направлении с координатами l и $\frac{\pi}{2} \geq b \geq 0$, дается выражением:

$$I(\tau, l, b) = \int_{\tau}^{\infty} B(t) e^{-(t-\tau) \operatorname{Cosec} b} [1 - |\beta| (t-\tau) \operatorname{Cosec} b] \operatorname{Cosec} b dt \quad [3]$$

и аналогично для $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq 0$. С другой стороны, для отношения коэффициента излучения к коэффициенту поглощения имеем из условия лучевого равновесия:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} dl \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} I(\tau, l, b) \cos b db + \frac{\varepsilon}{4\pi a_H} \quad [4]$$

Здесь ε — энергия, излучаемая в единице объема за единицу времени источниками L_α излучения. Подставляя [3] в [4], получаем:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(t) \left\{ Ei(|\tau - t|) - \right. \\ \left. - \bar{\beta} \left[e^{-|\tau - t|} - |\tau - t| \cdot Ei_2(|\tau - t|) \right] \right\} dt + \frac{\varepsilon}{4\pi a_H}, \quad [5]$$

где $\bar{\beta} = \frac{2A}{\pi a_H}$; Ei и Ei_2 — интеграллогарифмы. Пределы в [3] и [5] взяты бесконечными ввиду большой оптической толщины среды межзвездного водорода в линии L_α . Интегральное уравнение [5] является основным уравнением нашей задачи.

Согласно предложенному В. А. Амбарцумяном [4] методу решения уравнений этого типа, ищем сначала решение однородного уравнения в виде $B(\tau) = \text{Const } e^{-k\tau}$. Подставляя в [5] при $\varepsilon = 0$, получаем условие, которому должна удовлетворять постоянная величина k :

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{2k} - \frac{\bar{\beta}}{k^3} \right) \ln \frac{1+k}{1-k} + \frac{2\bar{\beta}}{k^2} \quad [6]$$

При малых $1 - \lambda$, $\bar{\beta} - k$ также мало. Разлагая в ряд по $\bar{\beta}$ и k , получаем:

$$k^2 = 3(1 - \lambda) + 2\bar{\beta} \quad [7]$$

Решение однородного уравнения экспоненциально спадает на оптических расстояниях порядка $1/k$. Как легко убедиться подстановкой численных значений, в областях неионизированного водорода (HI) этому оптическому расстоянию соответствует геометрическое расстояние порядка одной тысячной парсека. Отсюда сразу следует, что в областях HI, где нет источников L_α квантов, плотность L_α излучения практически равна нулю, т. е. почти все L_α кванты поглощаются или выходят из среды межзвездного водорода вблизи самых границ областей ионизированного водорода (HII).

В областях HII оптическое расстояние $1/k$ соответствует геометрическому расстоянию порядка одной десятой парсека при плотности протонов $n_p \approx 1 \text{ см}^{-3}$ (при увеличении плотности эквивалентное расстояние уменьшается примерно как $n_p^{-3/2}$). Если величина ε мало меняется на расстояниях такого порядка, то частное решение неоднородного уравнения [5] имеет вид:

$$B = \frac{\varepsilon}{4\pi a_H \left(1 - \lambda + \frac{2}{3} \bar{\beta} \right)} \quad [8]$$

как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Выражение [8] имеет простой физический смысл, так как величина $\left(1 - \lambda + \frac{2}{3} \bar{\beta} \right)^{-1}$ есть среднее число рассеяний, испытываемых одним L_α квантом, прежде чем он будет удален из среды каким-либо из рассмотренных механизмов. Если оптические размеры области HII велики по сравнению с $1/k$ (что почти всегда имеет место), то однородное решение, постоянные которого определяются из граничных условий, можно опустить и считать [8] полным решением.

Так как отклонение L_α излучения от изотропности мало, порядка k , то для плотности ρ_α получаем:

$$\rho_\alpha = \frac{4\pi B}{c} = \frac{\varepsilon/c}{\omega a_H + a_g + \frac{4A}{3\pi u}}, \quad [9]$$

где c — скорость света. Формула [9] является решением задачи о вычислении плотности L_α излучения в общем случае. Кроме рассмотренных механизмов удаления L_α квантов из среды межзвездного водорода, есть еще два — двухквантовые спонтанные переходы со второго уровня атома водорода на первый и поглощение L_α квантов атомами гелия, находящимися в состоянии 2^3S . Можно показать, что значение этих механизмов для определения плотности L_α излучения мало. Более того, нетрудно убедиться подстановкой численных значений в [9], что, если размеры ионизированной области меньше одного килопарсека, то двумя последними членами в знаменателе формулы [9] можно пренебречь по сравнению с первым. Тогда:

$$\rho_\alpha = \frac{\epsilon s_0}{\omega c \tau_0}, \quad [10]$$

так как $a_H = \frac{\tau_0}{s_0}$, где s_0 — размеры ионизированной области, а τ_0 — ее

оптическая толщина. Упрощенной формулой [10] мы и будем в дальнейшем пользоваться. В случае необходимости (протяженные ионизированные области с малой плотностью) легко перейти и к более общей формуле [9]. Таким образом, главный механизм, определяющий плотность L_α излучения, — выход квантов из среды в далеких частях крыльев контура [2].

4. Механизм излучения L_α квантов в областях ионизированного водорода тот же, что и в планетарных туманностях. Как известно из теории планетарных туманностей, примерно 70% рекомбинаций на второй и высшие уровни заканчивается излучением L_α квантов (остальные 30% рекомбинаций приводят к состоянию $2S$ и заканчиваются большей частью двухквантовым переходом в основное состояние). Поэтому:

$$\epsilon = 0.7 h \nu_\alpha n_e n_p \sum_{i=2}^{\infty} C_i(T_e), \quad [11]$$

где h — постоянная Планка, ν_α — частота линии L_α , n_e и n_p — числа электронов и протонов в одном кубическом сантиметре, $C_i(T_e)$ — вероятность, рекомбинации на i -уровень при электронной температуре T_e . Подставляя [11] в [10], получаем:

$$\rho_\alpha = \frac{0.7 h \nu_\alpha}{c \omega} \cdot \frac{s_0 n_e n_p}{\tau_0} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} C_i(T_e). \quad [12]$$

Формула [12] позволяет вычислить плотность L_α излучения в области ионизированного водорода, если известны размеры области, температура и плотность газа. С достаточной общностью мы можем считать: $\tau_0 = 10^4$, $T_e = 10000^\circ$. Тогда численное значение для

$$\rho_\alpha = 8.8 \cdot 10^{-18} s_0 n_e n_p \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \quad [13]$$

где s_0 — выражено в парсеках.

5. Теперь мы можем вернуться к определению силы радиативного притяжения между атомами водорода и космическими пылинками.

Как известно, сила действующая на один атом водорода в поле излучения с потоком H_α равна:

$$F_{\text{рад}} = \frac{a_H}{n_H} \cdot \frac{H_\alpha}{c} = \frac{\tau_0 H_\alpha}{c s_0 n_H} \quad [14]$$

Среднее значение силы, действующей как на нейтральные атомы водорода, так и на протоны:

$$\bar{F}_{\text{рад}} = F_{\text{рад}} \frac{n_H}{n_p + n_H} = \frac{\tau_0 H_\alpha}{c s_0 (n_H + n_p)} \quad [15]$$

В случае, когда, поток отличен от нуля благодаря отклонению от изотропности, вызванному тенью от пылинки, получаем:

$$H_\alpha = \frac{c \rho_\alpha}{4\pi} \omega \chi. \quad [16]$$

Здесь ω — телесный угол, под которым видна пылинка из точки, где расположен атом, χ — множитель, учитывающий коэффициент чистого поглощения на пыли. Подставляя [12] и [16] в [15], получаем:

$$\bar{F}_{\text{рад}} = \frac{0.7 h \nu_\alpha}{c \omega} \cdot \frac{n_e n_p}{n_H + n_p} \cdot \frac{\omega \chi}{4\pi} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} C_i(T_e). \quad [17]$$

Численное значение в системе $C g_1 S$:

$$\bar{F}_{\text{рад}} = 2.9 \cdot 10^{-32} \frac{n_e n_p}{n_H + n_p} \cdot \frac{\omega \chi}{4\pi} \text{ дин.}$$

Сравним величину радиативного притяжения с гравитационным притяжением для пылинки размером 10^{-5} см и плотностью равной единице:

$$\frac{\bar{F}_{\text{рад}}}{F_{\text{грав}}} = 320 \frac{n_e n_p}{n_H + n_p} \quad [18]$$

Таким образом, радиативное притяжение водорода и космической пыли в областях III действительно значительно превосходит их гравитационное притяжение.

В случае непрозрачного облака атомы водорода, находящиеся вблизи его границы, также будут испытывать притяжение к этому облаку с силой, величину которой можно определить по [17], где вместо $\frac{\omega \chi}{4\pi}$ подставлено π .

Подчеркнем, что это радиативное притяжение существенно в областях ионизированного водорода, между тем, как показано в работе (5), в областях ионизированного водорода пылевые частицы имеют тенденцию разрушаться, а не расти. Однако радиативное притяжение между водородом и космической пылью играет, повидимому, большую роль в космогонии.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Spitzer L. — Ap. J., 94, 232, 1941.
 2. Zanstra H. — BAN, XI, N 401, 1949.
 3. Соболев В. В. — Движущиеся оболочки звезд, Изд. ЛГУ, Ленинград 1947
 4. Амбарцумян В. А. — Уч. записки ЛГУ, № 82, 64, 1941.
 5. Каплан С. А. — Уч. записки Львов, Гос. унив., т. XXII, серия физико-математическая, в-5, 1953 г.
-

И. И. ТАЛЪЯНСКИЙ

ОБ ОРИЕНТАЦИИ МОЛЕКУЛ ВОДЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ

1. Поверхностный слой жидкости, как было указано Я. И. Френкелем (1), можно считать состоящим из молекул, адсорбированных на плоской границе остальной части жидкости, которую можно рассматривать как непрерывную однородную среду с диэлектрической постоянной ϵ . Тогда возможной оказывается ориентация молекул поверхностного слоя в результате поляризации ими среды.

Мы будем предполагать, что взаимодействие молекул со своими соседями и с диэлектрической средой сводится к электростатическим силам, и при этом будем рассматривать молекулу как диполь с моментом $\vec{P}$. Такое рассмотрение взаимодействия молекул можно считать физически обоснованным, так как оно учитывает основную часть взаимодействия. Остальная часть взаимодействия молекул до некоторой степени учитывается неявно в предположении, что молекулы жидкости расположены на некотором определенном среднем расстоянии a друг от друга.

Молекулы воды, как известно, имеют определенную структурную форму. В дальнейшем мы будем пользоваться этим структурным представлением.

Для вычисления поля, создаваемого диэлектриком, поляризованным поверхностной сеткой диполей, особенно удобным и даже, повидимому, единственно практически приемлемым приемом является метод „электрического изображения“. Как известно, заряду e , находящемуся над диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ , соответствует фиктивный заряд в диэлектрике (см. например, (2)) $e^1 = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}e$ (2).

Легко видеть, что всякой электрической системе с моментом P соответствует „отраженная“ система с моментом, равным (по величине)

$$P^1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} P \quad [1]$$

Будем характеризовать положение каждой молекулы двумя числами k и l , представляющими собой координаты молекулы на плоскости.

Энергия каждой молекулы (k, l) поверхностного слоя состоит из трех частей: а) энергии взаимодействия молекулы со своим изображением в диэлектрике, которую мы обозначим $U_{kl}^{k'l'}$; б) энергии непосредственного взаимодействия с соседями U_{kl}^{mn} и в) энергии взаимо-

действия с изображениями окружающих молекул $U_{kl}^{m'n'}$. Полная энергия, приходящаяся на одну молекулу на поверхности:

$$U_{kl} = U_{kl}^{kl} + \frac{1}{2} \sum (U_{kl}^{mn} + U_{kl}^{m'n'}),$$

где суммирование распространено на все молекулы, окружающие данную.

Тогда суммарная энергия поверхностного слоя

$$U = \sum_{kl} U_{kl}$$

Так как дипольные силы довольно быстро убывают с расстоянием, то достаточно рассмотреть взаимодействие с двумя ближайшими соседями, т. е. с молекулами, находящимися на расстоянии $\leq 2a$ от данной молекулы, где a — среднее расстояние между молекулами.

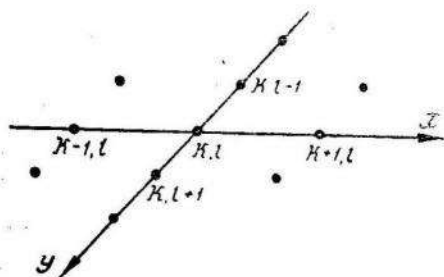


Рис. 1. Положение молекулы на плоскости xOy

2. Решим здесь вспомогательную задачу об энергии квадратной сетки диполей на поверхности диэлектрика.

Пусть индексы k и l определяют положение молекулы на плоскости xOy , как показано на рис. 1. Тогда средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу, будет равна

$$U_{kl} = U_{kl}^{kl} + (U_{kl}^{k-1, l} + U_{kl}^{k+1, l} + U_{kl}^{k, l-1} + U_{kl}^{k, l+1} + U_{kl}^{k-1, l-1} + U_{kl}^{k-1, l+1}) + \\ + (U_{kl}^{(k-l)^1 l^1} + U_{kl}^{(k-2)^1 l^1} + U_{kl}^{(k-1)^1 l^1} + U_{kl}^{k^1 (l-2)^1} + U_{kl}^{(k-l)^1 (k-1)^1} + U_{kl}^{(k-1)^1 l+1}) \quad [2]$$

Каждый из членов правой части будем находить по известной формуле для энергии взаимодействия диполей

$$U_{ij}^j = \frac{P_i P_j}{r^3} (-2 \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j), \quad [3]$$

где ϑ_i и ϑ_j — углы между соответствующими дипольными моментами и линией, соединяющей диполи, r — расстояние между диполями.

Мы рассмотрим ниже все возможные типы упорядоченного расположения диполей, окружающих данный, и подсчитаем энергию, соответствующую каждому типу ориентации.

После несложных вычислений при помощи [2] и [3] получим:

I тип ориентации (см. рис. 2а)

$$U_{kl}^{(1)} = -2,77 \frac{P^2}{a^3} - 0,43 \frac{PP^1}{a^3} \quad [4]$$

II тип ориентации (см. рис. 2б)

$$U_{kl}^{(2)} = -1,48 \frac{P^2}{a^3} - 1,14 \frac{PP^1}{a^3} \quad [5]$$

I и II типы соответствуют ориентации диполей параллельно поверхности жидкости.

Рассмотрим теперь возможные ориентации при расположении диполей перпендикулярно к поверхности.

III тип ориентации (см. рис. 2в)

$$U_{kl}^{(3)} = -1,04 \frac{P^2}{a^3} - 1,57 \frac{PP^1}{a^3} \quad [6]$$

IV тип ориентации (см. рис. 2г)

$$U_{kl}^{(4)} = 2,96 \frac{P^2}{a^3} - 2,28 \frac{PP^1}{a^3} \quad [7]$$

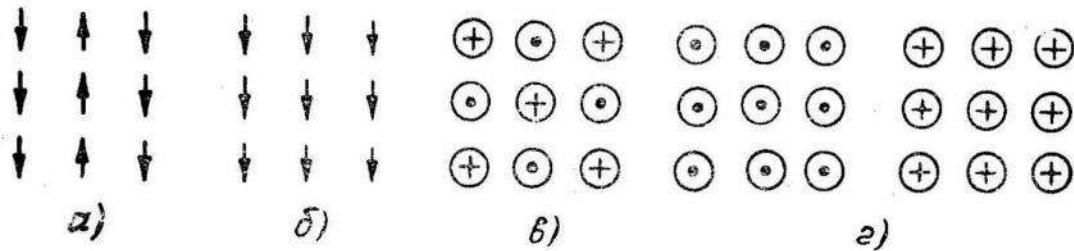


Рис. 2. Различные типы ориентаций в сетке диполей (вид сверху). Значком $\odot$ обозначается диполь с моментом, перпендикулярным к плоскости чертежа и направленным к наблюдателю, значком $\oplus$ — от наблюдателя.

Во всех приведенных выше выражениях для U_{kl} первый член дает энергию непосредственного взаимодействия с окружающими диполями, второй — энергию взаимодействия с их отражениями и с собственным изображением в диэлектрике.

Мы видим, таким образом, что ориентации I, II и III типов являются энергетически выгодными, т. е. устойчивыми, в то время, как в случае IV, энергия оказывается положительной (так как $P^1 \leq P$ при любом ϵ). Следовательно, ориентация типа IV является неустойчивой.

В случае любой ориентации, отличной от рассмотренных выше, в том числе и в случае совершенно беспорядочного расположения молекул друг относительно друга, энергия должна по величине находиться где-то между $U_{kl}^{(1)}$ и $U_{kl}^{(4)}$.

Действительно, при совершенно беспорядочном расположении средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу

$$\begin{aligned} \bar{U}_{kl} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{PP^1}{a^3} \left[-2 \cos \vartheta \cos(-\vartheta) + \sin \vartheta \sin(-\vartheta) \right] d\vartheta + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{kl}^{mn} d\vartheta_{kl} d\vartheta_{mn} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m^1,n^1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{kl}^{m^1n^1} d\vartheta_{kl} d\vartheta_{m^1n^1} \end{aligned} \quad [8]$$

Здесь первый интеграл представляет собой среднюю энергию взаимодействия молекулы со своим собственным изображением. Интегралы, стоящие под знаками сумм, и представляющие собой среднюю энергию взаимодействия данной молекулы с соседними молекулами и их изображениями, равны нулю, как показывает их непосредственное вычисление с помощью [3].

Следовательно, $\overline{U}_{kl}$ равно значению первого интеграла, который вычисляется элементарно

$$\overline{U}_{kl} = -1,5 \frac{PP_1}{a^3}$$

Таким образом, в случае совершенно беспорядочного расположения молекул, вся энергия сетки состоит из энергии взаимодействия диполей со своими изображениями. Суммарная же энергия взаимодействия диполей между собой равна нулю.

3. Поверхностный слой дипольной жидкости (воды) можно, очевидно, считать состоящим из микрообластей, строение которых в каждый данный момент в большей или меньшей степени приближается к упорядоченным расположениям типов I, II, III. Тип ориентации IV является энергетически невыгодным.

Те микроучастки поверхности, где ориентация близка к типу III, как легко видеть, не дают ни результирующего дипольного момента, ни двойного электрического слоя. На тех же участках, где молекулы ориентированы дипольными моментами параллельно поверхности (I и II типы), эта ориентация приводит к тому, что сверху оказываются положительные заряды¹ (см. рис. 3). На больших расстояниях по

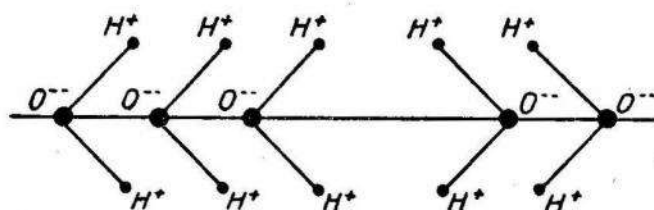


Рис. 3. Разрез поверхностного слоя молекул плоскостью, перпендикулярной к поверхности воды.

сравнению с расстояниями между молекулами система зарядов, изображенная на рис. 3, (два двойных слоя), не оказывает никакого действия на заряд, находящийся над этими слоями. Однако при приближении адсорбируемого иона к поверхности воды на расстояние порядка атомных расстояний, пред-

ставление о двойном слое вообще теряет обычный смысл из-за дискретности составляющих его зарядов. Тогда играет роль то обстоятельство, что положительные заряды находятся сверху над отрицательными и, следовательно, на малых расстояниях над поверхностью имеется положительный потенциал.

Этим обстоятельством, повидимому, можно объяснить тот факт, что „сродство“ воды к отрицательным ионам больше, чем к положительным.

В заключение выражаю глубокую благодарность доц. А. Е. Глауберману за постановку задачи и за руководство работой.

¹ Конечно, ориентация молекул на каждом участке поверхности непрерывно меняется благодаря тепловому движению. Поэтому сказанное выше следует понимать в статистическом смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. — Кинетическая теория жидкостей. Изд. АН СССР, 1945.
2. Иваненко Д. и Соколов А. — Классическая теория поля. ГТТИ, 1949.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА

ЗАЩИТА ДИССЕРТАЦИЙ НА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В 1948 — 52 гг.

В 1948 — 52 гг. на физико-математическом факультете Львовского университета защитили диссертации на степень кандидата физико-математических наук следующие товарищи

	Фамилия диссертанта	Тема диссертации	Руководитель	Оппоненты	Дата защи- ты
1948 год					
1	Шевляков	Исследование изгиба коротких анизотропных балок	—	Проф. Г. Н. Савин и доц. М. П. Шереметьев	8. XI
1949 год					
2	А. Н. Костовский	Квадрируемость одного общего класса непрерывных несправляемых поверхностей, заданных параметрически	Проф. А. С. Кованько	Проф. М. О. За- рицкий, доц. Л. И. Волко- выский	18. VI
3	О. С. Парасюк	Пластические зоны при концентрации напряжений возле отверстий	Проф. Г. Н. Савин	Проф. А. И. Иш- линский, проф. Л. А. Галин доц. Л. Г. Афен- дик	17. IX
1950 год					
4	Г. Я. Доронин	К вопросу об остатке при приближении периодических функций многочленами	—	Проф. С. М. Ни- кольский, проф. Я. Б. Лопатинский, доц. И. Г. Соколов	23. V
5	Е. Л. Рвачева	Об областях притяжения многомерных устойчивых законов	Проф. Б. В. Гнеденко	Академик А. Н. Колмогоров, доц. И. Г. Соколов	30. V
6	Д. Г. Майзлер	Предельные распределения для максимального члена вариационного ряда	Проф. Б. В. Гнеденко	Проф. Н. В. Смирнов, доц. И. Г. Соколов	12. XII
7	И. В. Кутовой	Дифракция электронов при катодном распылении	—	Проф. Н. В. По- нырко, доц. В. С. Мили- янчук	25. XII

	Фамилия диссертанта	Тема диссертации	Руководитель	Оппоненты	Дата защи- ты
1951 год					
8	Н. П. Флейшман	К вопросу о подкреплении круговых отверстий упругими кольцами	Проф. Г. Н. Савин	Проф. А. Ю. Ишлинский, проф. М. Я. Леонов	26. III
9	В. Э. Лянце	О корректности постановки некоторых задач математической физики	Проф. Я. Б. Лопатинский	Проф. С. Л. Крейн, проф. А. С. Кованько	7. IV
10	К. Ф. Губа	Определение пьезоэлектрических констант кристалла сегнетовой соли	—	Проф. Н. В. Поньрко, доц. Ю. Г. Величко	23. IV
11	Б. Н. Гартштейн	Предельные законы распределения для рангов вариационного ряда	Проф. Б. В. Гнеденко	Проф. Н. В. Смирнов, проф. А. А. Ляпунов, доц. И. Г. Соколов	26. V
12	М. Н. Саврук	Влияние неоднородности напряженного поля на концентрацию напряжений возле двух круговых отверстий	—	Проф. Г. Н. Савин, доц. О. С. Парасюк	2. VI
13	Н. Ф. Гурьев	Распределение напряжений в растягиваемой изотропной конечной прямоугольной пластинке, ослабленной круговым отверстием	—	Проф. Г. Н. Савин, доц. О. С. Парасюк	25. VI
14	А. В. Сандулова	Меднозакисные выпрямители, сформованные в высокочастотном поле	—	Проф. Ф. Ф. Волькенштейн, проф. К. Б. Карандеев, доц. А. Е. Глауберман	25. VI
15	Т. Л. Городецкая	К вопросу о продольных колебаниях системы сосредоточенных масс с упругими и упруго-вязкими связями	—	Проф. М. Я. Леонов, доц. Г. Я. Головин	
16	А. Л. Рвачев	О спектральных характеристиках меднозакисных фотоэлементов	—	Проф. Ф. Ф. Волькенштейн, проф. Н. В. Поньрко, доц. В. С. Милинчук	18. XII

	Фамилия диссертанта	Тема диссертации	Руководитель	Оппоненты	Дата защи- ты
1952 год					
17	В. И. Мосса- ковский	Давление круглого штампа на упругую полуплоскость	—	Проф. Я. Б. Лопатинский, доц. О. С. Парасюк	25. XI
18	М. Г. Мищенко	Исследование процес- сов окисления меди и роста кристаллов заиси меди	—	Проф. Ф. Ф. Волькенштейн, проф. Н. В. Понырко	5. VI
19	И. Д. Квит	О сравнении эмпириче- ских распределений в двух независимых выборках	Проф. Б. В. Гнеденко	Проф. Н. В. Смирнов, проф. А. А. Ляпунов	30. VI
20	Д. И. Шиль- крут	О динамических зада- чах теории не вполне упругой среды и об их применении к продоль- ным колебаниям необ- тянутых проволочных канатов	—	Проф. А. Ю. Ишлинский, доц. О. С. Парасюк	
21	С. Д. Берман	О некоторых свой- ствах групповых колец	Проф. Я. Б. Лопатинский	Проф. И. Р. Шафаревич, проф. Л. И. Волковский	13. IX

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Я. Б. Лопатинский — Об одной граничной задаче для гармонических функций	5
А. С. Кованько — К вопросу о разложимости почти-периодических функций в конечную сумму почти-периодических функций	12
А. С. Кованько — О непрерывном преобразовании плоскости в плоскость и мероопределении поверхности	17
С. Д. Берман — О приведении системы дифференциальных уравнений к пассивной форме	27
В. Э. Лянце — Об одном новом способе приложения интеграла Фурье к решению задачи с начальными условиями для систем уравнений в частных производных	40
Б. Н. Гартштейн — О предельном распределении крайнего ранга	50
В. Ф. Рогаченко — О возможности решения задач на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского при помощи циркуля и гиперциркуля	72
Н. П. Флейшман — Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплён тонким упругим кольцом	84
В. С. Милиянчук — К вопросу об обобщенной линейной электродинамике	96
А. Е. Глауберман — К релятивистской квантовой теории ¹	105
С. А. Каплан — О конденсации межзвездного газа на частицах космической пыли	111
С. А. Каплан — Взаимодействие межзвездного водорода с космической пылью и плотность L_α излучения в межзвездном пространстве	115
И. И. Тальянский — Об ориентации молекул воды в поверхностном слое	121
Научная хроника	125

Техредактор Г. Я. Лизунов

БЦ 10563. Підписано до друку 7.7.1953. Друк. арк. 8. Обліково-вид. арк. 12.
Папір 70×100^{1/16}. Зам. 354. Тир. 500. Ціна 6 крб.

Друкарня науково-технічної книги Головидаву Міністерства культури УРСР,
м. Львів, Чайковського, 27.

Ціна 6 крб.