Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

Е. Л. РВАЧЕВА

ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИТЯЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена некоторым обобщениям предельных закономерностей для сумм независимых случайных величин, подробно изложенных в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова (9), на многомерный случай.

Основные понятия и основные теоремы для многомерных случайных векторов освещены в работах Б. В. Гнеденко (4), П. Леви (13), Г. Крамера (11, 12).

В §§ 1 — 2 обобщены на многомерный случай предельные теоремы для сумм безгранично делимых и произвольно распределенных независимых бесконечно малых слагаемых. Полученные при этом результаты не претендуют на новизну, но они, повидимому, публикуются впервые. Доказательство основано на перенесении на многомерные распределения метода Б. В. Гнеденко, использованного им при изучении предельных закономерностей для сумм независимых случайных величин (1,3) и построенного на всестороннем использовании безгранично делимых распределений.

В § 3 приведены результаты, относящиеся к устойчивым распределениям, т. е. распределениям, обладающим следующими свойствами: каковы бы ни были положительные числа B_1 и B_2 и постоянные векторы $A_1(a_1', \ldots, a_s')$, $A_2(a_1'', \ldots, a_s'')$, существуют такое положительное число B и постоянный вектор $A(a_1, \ldots, a_s)$, что для функции распределения $F(x_1, \ldots, x_s)$ имеет место соотношение:

$$F(Bx_1 + a_1, \ldots, Bx_s + a_s) = F(B_1x_1 + a_1', \ldots, B_1x_s + \\ + a_s') * F(B_2x_1 + a_1'', \ldots, B_2x_s + a_s''),$$

где $*$ означает знак композиции законов. Это определение устойчивых распределений, рассмотренных П. Леви (13) и Э. Фельдхеймом (20). Класс таким образом определенных устойчивых распределений, как показали в одномерном случае А. Я. Хинчин и П. Леви (19, 18), совпадает с классом распределений, предельных для нормированных сумм независимых случайных одинаково распределенных векторов

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - A_n}{B_n}, \qquad [1]$$

где постоянные $B_n > 0$ и постоянные векторы $A_n\,(a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)})$ надлежаще выбраны.

В § 4 для таким образом определенных устойчивых распределений получены области притяжения, т. е. найдены необходимые и достаточные условия, чтобы для данной последовательности взаимно независимых и одинаково распределенных s-мерных случайных векторов $\xi_i\,(i=1, 2\ldots)$, при надлежащем подборе постоянных векторов A_n и положительных постоянных B_n, распределения нормированных сумм [1] сходились к данному устойчивому распределению.* Тем самым обобщены соответствующие результаты А. Я. Хинчина и В. Феллера (см., например, 9) для нормального одномерного распределения, а также результаты Б. В. Гнеденко (2) и В. Деблина (10) для остальных устойчивых распределений. Вывод результатов основан на использовании общих теорем о сходимости сумм независимых случайных векторов, изложенных в §§ 1—2.

§ 5 посвящен изучению свойств многомерных решетчатых распределений. Получен характеристический признак s-мерного решетчатого распределения.

В § 6 доказана многомерная локальная предельная теорема для общего случая одинаково распределенных решетчатых слагаемых для предельных в указанном смысле устойчивых распределений.** Теорема обобщает результаты, полученные Б. В. Гнеденко (5—8), на многомерный случай, а также результат, полученный для нормального предельного распределения в предположении существования конечных дисперсий у слагаемых, на общий случай (14). Доказательство основано на обобщении метода Б. В. Гнеденко (8).

Настоящая работа доводит до конца решение задач, связанных с многомерными устойчивыми распределениями, только в одном направлении. Имеется большое число вопросов, еще ожидающих своего решения. Ограничимся указанием на один из таких вопросов, который представляется нам первоочередным.

Назовем s-мерное распределение устойчивым в обобщенном смысле, если, каковы бы ни были неособые матрицы A_1 и A_2 (ранга s) и постоянные векторы $B_1=(b_1', \ldots, b_s')$ и $B_2=(b_1'', \ldots, b_s'')$, всегда найдутся неособая матрица A (ранга s) и вектор $B=(b_1, \ldots, b_s)$, что для функции распределения $F(X)=F(x_1, \ldots, x_s)$ будет выполнено следующее соотношение

$$F(AX+B)=F(A_1X+B_1) * F(A_2X+B_2).$$

Здесь AX означает линейное преобразование аргументов $x_1, \ldots, x_s$ с помощью матрицы A.

Каков же класс распределений, устойчивых в этом смысле? Каковы условия притяжения к этим устойчивым законам, если соответствующим образом обобщить также определение области притяжения?

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ряд ценных указаний при ее решении, а также за постоянный интерес и внимание при выполнении данной работы.

---

* Краткое сообщение результатов § 4 было опубликовано ранее (15).

** Результаты § 5 и § 6 были опубликованы в статье (17) и в кратком сообщении (16), однако для полноты мы их здесь воспроизводим.

§ 1. МНОГОМЕРНЫЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Назовем s-мерный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ безгранично делимым, если при любом натуральном n он может быть представлен в виде суммы

$$\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nn} \tag{[1]}$$

n взаимно независимых одинаково распределенных слагаемых ξ_{nk}. Соответствующую вероятностную функцию назовем безгранично делимой, а характеристическую функцию — безгранично делимой характеристической функцией. Это определение, очевидно, равносильно такому: s-мерное распределение вероятностей является безгранично делимым, если его характеристическая функция $\varphi(T) = \varphi(t_1, \ldots, t_s)$ при любом натуральном n является n-ой степенью некоторой характеристической функции.

Известно (13), что для того, чтобы функция $\varphi(T)$ была характеристической функцией некоторого s-мерного безгранично делимого распределения, необходимо и достаточно, чтобы ее логарифм мог быть представлен в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma) + \int\limits_{R_s} \left\{ e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right\} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM), \tag{[2]}$$

где $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$—произвольный постоянный вектор; $X = (x_1, \ldots, x_s)$—вектор, конец которого находится в dM; $(T\Gamma)$, (TX) — скалярное произведение векторов T и Γ, T и X соответственно; ρ — модуль вектора X; $G(M)$ — вполне аддитивная, неотрицательная функция множества, $G(R_s) < \infty$. Представление $\lg \varphi(T)$ формулой [2] единственно.

Если ввести обозначения

$$N(M) = \int\limits_{M} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM), \ 0 \overline{\in} M,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\rho<\varepsilon} \frac{(TX)^2}{\rho^2} G(dM) = Q_2(T),$$

то формула [2] может быть представлена в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma) - \frac{1}{2} Q_2(T) + \int\limits_{\rho>0} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) N(dM), \tag{[3]}$$

или в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma_1) - \frac{1}{2} Q_2(T) + \int\limits_{0<\rho<\tau} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) N(dM) +$$

$$+\int\limits_{\rho>\tau}\left(e^{i(TX)}-1\right)\ N(dM), \qquad [4]$$

где вектор Γ_1 имеет компоненты

$$\gamma_i'=\gamma_i+\int\limits_{\rho<\tau}x_i G(dM)-\int\limits_{\rho\geqslant\tau}\frac{x_i}{\rho^2}G(dM), \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Известны (13) следующие свойства многомерных безгранично делимых распределений:

1. Характеристическая функция многомерного безгранично делимого распределения не обращается в нуль ни при каком конечном значении модуля вектора $T=(t_1, \ldots, t_s)$.

2. Вероятностная функция суммы конечного числа взаимно независимых безгранично делимых случайных векторов безгранично делима.

3. Распределение, предельное для безгранично делимых распределений, безгранично делимо.

4. При любом $\lambda>0$ функция $\varphi^{\lambda}(t_1, \ldots, t_s)$, где $\varphi(t_1, \ldots, t_s)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения, является характеристической функцией.

5. Совокупность безгранично делимых распределений совпадает с совокупностью распределений, являющихся композицией конечного числа законов Пуассона и предельных для них.

ТЕОРЕМА 1. Для сходимости последовательности многомерных безгранично делимых распределений $P_n(M)$ к предельному распределению $P(M)$ необходимо и достаточно, чтобы при $n\to\infty$:

1. $G_n(I)\to G(I)$,

где I — интервалы непрерывности функции $G(M)$ вида $I=I(\rho>R;\ \varphi_1<\theta_1, \ldots, \varphi_{s-1}<\theta_{s-1})$, а $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$ — сферические координаты.

2. $G_n(R_s)\to G(R_s)$.

3. $\Gamma_n=(\gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_s^{(n)})\to\Gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$.

Здесь функции G_n, G и постоянные Γ_n, Γ определены формулой [2] для распределений $P_n(M)$ и $P(M)$.

Необходимость. Пусть $P_n(M)\to P(M)$. Тогда равномерно в каждом конечном интервале $[t\leqslant t_0]$ (t — модуль вектора T) $\varphi_n(T)\to\varphi(T)$. Так как $\varphi_n(T)$ и $\varphi(T)$ ни при одном t не обращаются в нуль, то при $n\to\infty$

$$A_n=A_n(T)=i(T\Gamma_n)+\int\limits_{R_s}\left(e^{i(TX)}-1-\frac{i(TX)}{1+\rho^2}\right)\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G_n(dM)\to$$

$$\to A=A(T)=i(T\Gamma)+\int\limits_{R_s}\left(e^{i(TX)}-1-\frac{i(TX)}{1+\rho^2}\right)\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G(dM),$$

откуда

$$RA_n = \int\limits_{R_s} (\cos(TX) - 1)\,\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G_n(dM) \to$$

$$\to RA = \int\limits_{R_s} (\cos(TX) - 1)\,\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G(dM).$$

Покажем, что $G_n(M)$ ограничены в совокупности. Рассмотрим множества $M_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ и $D_i (i = 1, 2, \ldots, s)$:

$$M_i \equiv \left\{\begin{matrix} \rho \leqslant 1 \\ \frac{x_i}{\rho} \geqslant \frac{1}{\sqrt{s}} \end{matrix}\right\};\quad D_i \equiv \left\{\begin{matrix} \rho > 1 \\ \frac{x_i}{\rho} \geqslant \frac{1}{\sqrt{s}} \end{matrix}\right\}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{s} M_i + \sum_{i=1}^{s} D_i = R_s.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$-RA(0, \ldots, 1, \ldots, 0) + \varepsilon > \int\limits_{M_i} (1 - \cos x_i)\,\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G_n(dM) >$$

$$> \int\limits_{M_i} \left(1 - \cos\frac{\rho}{\sqrt{s}}\right)\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,G_n(dM) > \frac{s}{3}\,G_n(M_i),$$

откуда

$$G_n(M_i) < -\frac{3}{s}\,RA\left(0, \ldots, 1, \ldots, 0\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad [5]$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$-RA(0, \ldots, t_i, \ldots, 0) + \varepsilon \geqslant \int\limits_{D_i} (1 - \cos t_i x_i)\,G_n(dM);$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{s}} \int\limits_0^{2\sqrt{s}} RA(0, \ldots, t_i, \ldots, 0)\,dt_i + \varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{D_i} \left(1 - \frac{\sin 2\sqrt{s}\,x_i}{2\sqrt{s}\,x_i}\right) G_n(dM) \geqslant \frac{1}{2}\,G_n(D_i),$$

откуда

$$G_n(D_i) \leqslant -\frac{1}{2\sqrt{s}} \int\limits_0^{2\sqrt{s}} RA(0, \ldots, t_i, \ldots, 0)\,dt_i + \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad [6]$$

Из соотношений (5) и (6) следует ограниченность $G_n(M)$ в совокупности.

По первой теореме Хелли существует подпоследовательность $G_{n_k}(M)$, сходящаяся к предельной функции $G_1(M)$ на каждом интервале непрерывности функции $G_1(M)$. Покажем, что

$$G_{n_k}(R_s) \to G_1(R_s).$$

Для этого достаточно показать, что

$$G_{n_k}(\rho > R) = \int\limits_{\rho > R} G_{n_k}(dM) \underset{R \to \infty}{\to} 0. \qquad [7]$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Для достаточно больших k

$$\varepsilon - RA(T) \geqslant \int\limits_{\rho > R} (1 - \cos(TX)) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM).$$

Для достаточно больших $C > 0$

$$\varepsilon > \int\limits_{\rho > C} (1 - \cos(TX)) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM).$$

Обозначим через M_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ множества

$$M_i \equiv \left\{ \begin{array}{c} \rho > R \\ \frac{x_i}{\rho} \geqslant \frac{1}{\sqrt{s}} \end{array} \right\}.$$

Таким образом,

$$2\varepsilon + \int\limits_{\rho < C} (1 - \cos t_i x_i) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM) \geqslant \int\limits_{M_i} (1 - \cos t_i x_i) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM).$$

Возьмем среднее значение по t_i от обеих частей последнего неравенства в интервале $0 \leqslant t_i \leqslant \frac{2\sqrt{s}}{R}$. Получим

$$2\varepsilon + \int\limits_{\rho < C} \left(1 - \frac{\sin \frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}{\frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}\right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{M_i} \left(1 - \frac{\sin \frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}{\frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}\right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{M_i} G_{n_k}(dM), \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Так как подинтегральная функция в левой части при $R \to \infty$ равномерно при $\rho < C$ стремится к нулю, то в силу произвольности ε

$$\int\limits_{M_i} G_{n_k}(dM) = G_{n_k}(M_i) \to 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

откуда следует [7].

Тогда в силу обобщенной второй теоремы Хелли имеем

$$\int\limits_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \to$$

$$\to \int\limits_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_1(dM).$$

С другой стороны,

$$i(\Gamma_{n_k} T) + \int\limits_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \to$$

$$\to i(T\Gamma) + \int\limits_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM).$$

Таким образом, последовательность $\Gamma_{n_k} = (\gamma_1^{n_k}, \ldots, \gamma_s^{n_k})$ имеет предел $\Gamma_1 = (\gamma_1', \ldots, \gamma_s')$. В силу единственности представления логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения формулой [2] при любом выборе подпоследовательности n_k, а значит и для самой последовательности n имеем

$$\Gamma_n \to \Gamma; \quad G_n(M) \to G(M),$$

чем доказана необходимость условия.

Для доказательства достаточности условий теоремы надо показать, что $A_n \to A$ равномерно в каждом конечном интервале $[t \leqslant t_0]$, а это следует из однозначности определения вероятностной функции по ее характеристической функции (4).

ТЕОРЕМА 2. Чтобы последовательность безгранично делимых распределений $P_n(M)$ сходилась при $n \to \infty$ к предельному распределению, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$:

1. $\mathcal{N}_n(I) \to \mathcal{N}(I)$ на интервалах непрерывности функции $\mathcal{N}(M)$ вида $I = I(\rho > R;\ \varphi_1 < \theta_1, \ldots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$ $(\rho; \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ — сферические координаты).

2. $\Gamma_n \to \Gamma$.

3. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \int\limits_{0<\rho<\varepsilon} (TX)^2 N_n(dM) + Q_2^{(n)}(T) = Q_2(T)$.

Функции N_n, $N, Q_2^{(n)}$, Q_2 и постоянные Γ_n, Γ определяются формулой [4] для распределений $P_n(M)$ и $P(M)$.

Доказательство этой теоремы следует из второй обобщенной теоремы Хелли и из первой теоремы.

§ 2. СУММЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим последовательность s-мерных случайных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждый из которых представляет собой сумму некоторого числа независимых случайных векторов

$$\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \xi_{nk_n}. \qquad [1]$$

Пусть при надлежащем подборе постоянных s-мерных векторов $A_n = (a_1{}^n, \ldots, a_s{}^n)$ распределения векторов $\xi_n - A_n$ сходятся к предельному. Как и в одномерном случае (9), при решении общей задачи о природе предельных распределений для сумм [1] представляется разумным принять следующие ограничения: слагаемые ξ_{nk} $[1 \leqslant k \leqslant k_n]$ при $n \to \infty$ должны быть предельно постоянными. Это означает, что для случайных векторов ξ_{nk} можно подобрать такие постоянные векторы $B_{nk} = (b_{nk}^1, \ldots, b_{nk}^s)$, что при произвольном $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ равномерно относительно k $[1 \leqslant k \leqslant k_n]$

$$P\{|\overline{\xi}_{nk} - \overline{B}_{nk}| \geqslant \varepsilon\} = P\left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{s} (x_{nk}^i - b_{nk}^i)^2} \geqslant \varepsilon \right\} \to 0.$$

Если все постоянные векторы B_{nk} можно заменить вектором $0\,(0, \ldots, 0)$, то величины ξ_{nk} назовем бесконечно малыми. Назовем медианой распределения $F(M)$ постоянный вектор $M(m_1, \ldots, m_s)$, координаты которого определяются из соотношений

$$\int\limits_{M\,(x_i < m_i)} F(dM) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \int\limits_{M\,(x_i \geqslant m_i)} F(dM) \geqslant \frac{1}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad [2]$$

ЛЕММА 1. В качестве постоянных B_{nk} для предельно постоянных векторов можно взять медианы $M_{nk}\,(m_{nk}^1, \ldots, m_{nk}^s)$.

Действительно, по определению предельного постоянства векторов ξ_{nk} для достаточно больших n

$$P\{|\overline{\xi}_{nk} - \overline{B}_{nk}| < \varepsilon\} > 1 - \eta.$$

Докажем, что

$$|\overline{M}_{nk} - \overline{B}_{nk}| = + \sqrt{\sum_{i=1}^{s} (m_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)})^2} \to 0.$$

Пусть

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{s}(m_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)})^2}\geqslant C,$$

тогда

$$\max_i\left|m_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)}\right|=\left|m_{nk}^{(j)}-b_{nk}^{(j)}\right|\geqslant\frac{C}{\sqrt{s}}=a>0,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{s}\left(x_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)}\right)^2}=\max_i\left|x_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)}\right|+k,\ k\geqslant 0.$$

Далее

$$P\{|\overline{\xi}_{nk}-\overline{B}_{nk}|\geqslant a\}=P\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{s}\left(x_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)}\right)^2}\geqslant a\right\}\geqslant$$

$$\geqslant P\left\{\max_i\left|x_{nk}^{(i)}-b_{nk}^{(i)}\right|\geqslant a\right\}=P\left\{\left|x_{nk}^{(j)}-b_{nk}^{(j)}\right|\geqslant a\right\}=$$

$$=P\left\{\left|x_{nk}^{(j)}-m_{nk}^{(j)}-b_{nk}^{(j)}+m_{nk}^{(j)}\right|\geqslant a\right\}\geqslant\frac{1}{2},$$

что противоречит исходному предположению о предельном постоянстве ξ_{nk}.

ЛЕММА 2. Условие бесконечной малости величин ξ_{nk} эквивалентно условию

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant k_n}\int_{R_s}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}P_{nk}(dM)\underset{n\to\infty}{\to}0. \qquad [3]$$

Здесь $P_{nk}(M)$ — вероятностная функция величины ξ_{nk}, ρ — модуль вектора $X=(x_1,\ldots,x_s)$, конец которого находится в dM.

Пусть величины ξ_{nk} — бесконечно малые, т. е.

$$P\{|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\underset{n\to\infty}{\to}0 \qquad [4]$$

равномерно относительно $k\,[1\leqslant k\leqslant k_n]$.

Тогда

$$P\{\max_k|\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\underset{n\to\infty}{\to}0;$$

$$\sup_k\int_{R_s}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}P_{nk}(dM)=\int_{R_s}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}P_{nl}(dM)\leqslant\int_{\rho<\varepsilon}\rho^2P_{nl}(dM)+$$

$$+\int_{\rho\geqslant\varepsilon}P_{nl}(dM)\leqslant\varepsilon^2+\int_{\rho\geqslant\varepsilon}P_{nl}(dM)<\varepsilon^2+P\{|\xi_{nl}|\geqslant\varepsilon\}\to 0.$$

Пусть соотношение [3] имеет место. Тогда

$$\sup_k \int\limits_{R_S} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} P_{nk}(dM) \geqslant \int\limits_{R_S} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} P_{nk}(dM) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \int\limits_{\rho \geqslant \varepsilon} P_{nk}(dM) = \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} P\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\}.$$

Таким образом, из соотношения [3] следует [4], что доказывает наше утверждение.

Легко видеть, что условие предельного постоянства может быть записано в виде

$$\sup_k \int\limits_{R_S} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X+M_{nk}) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где M_{nk} — медиана, F_{nk} — функция распределения вектора ξ_{nk}.

ЛЕММА 3. Чтобы случайные векторы ξ_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ были бесконечно малыми, необходимо, чтобы их характеристические функции $f_{nk}(t_1, \ldots, t_s)$ равномерно относительно $k[1 \leqslant k \leqslant k_n]$ и $t(t$ — модуль вектора $T = (t_1, \ldots, t_s))$ в любом конечном интервале $t[t \leqslant t_0]$ сходились в единице.

Пусть ξ_{nk} — бесконечно малы, $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\sup_k |f_{nk}(t_1, \ldots, t_s) - 1| = \sup_k \left| \int\limits_{R_S} \left(e^{i(TX)} - 1\right) P_{nk}(dM) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \int\limits_{\rho<\varepsilon} \left| e^{i(TX)} - 1 \right| P_{nk}(dM) + 2 \sup_k \int\limits_{\rho \geqslant \varepsilon} P_{nk}(dM).$$

Для произвольного $\eta > 0$ и конечного t при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $(\rho < \varepsilon)$

$$\left| e^{i(TX)} - 1 \right| < \frac{1}{2}\eta,$$

$$\sup_k \int\limits_{\rho<\varepsilon} \left| e^{i(TX)} - 1 \right| P_{nk}(dM) < \frac{1}{2}\eta.$$

Так как ξ_{nk} — бесконечно малы, то

$$\sup_k 2 \int\limits_{\rho \geqslant \varepsilon} P_{nk}(dM) < \frac{1}{2}\eta$$

и для больших n

$$\sup_k |f_{nk}(t_1, \ldots, t_s) - 1| < \eta.$$

ЛЕММА 4. Если при некотором подборе постоянных $B_n = \left(b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(s)}\right)$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} - B_n$$

независимых предельно постоянных случайных векторов сходятся к предельному, то существует такое постоянное $c < \infty$, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \, dF_{nk}(X + M_{nk}) < C, \tag{5}$$

где M_{nk} — медиана вектора ξ_{nk}, F_{nk} — его функция распределения.

Для доказательства этого предложения применяем метод, использованный Б. В. Гнеденко для получения соответствующего результата в одномерном случае (9, § 23, теорема I). Для этого замечаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_D \rho^2 \, d\,F_{nk}(X + M_{nk}) < C_1,$$

где D обозначает область $\left(|x_i| \leqslant \frac{2}{\alpha};\ i = 1, 2, \ldots, s\right)$, а C_1 — некоторая постоянная, и

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{M_i} d\,F_{nk}(X + M_{nk}) < C_2,$$

где M_i — область$\left(\,|x_i| > \frac{2}{\alpha},\ i = 1, 2, \ldots, s\right)$, C_2 — некоторая постоянная, $D + \sum_{i=1}^{s} M_i = R_s$. Отсюда получаем:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \, d\,F_{nk}(X + M_{nk}) \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_D \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \, d\,F_{nk}(X + M_{nk}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \, d\,F_{nk}(X + M_{nk}) \right\} \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_D \rho^2 \, d\,F_{nk}(X + M_{nk}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} d\,F_{nk}(X + M_{nk}) \right\} \leqslant C.$$

ЛЕММА 5. Если при некотором подборе постоянных $A_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(s)})$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} - A_n$$

независимых бесконечно малых случайных векторов сходятся при $n \to \infty$ к предельному, то существует такое постоянное число C, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\, dF_{nk}(X + B_{nk}) < C,$$

где вектор $B_{nk} = (b_{nk}^{(1)}, \ldots, b_{nk}^{(s)})$ имеет компоненты

$$b_{nk}^{(i)} = \int\limits_{\rho<\tau} x_i\, dF_{nk}(X),$$

τ — произвольное число > 0.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из доказательства леммы 4.

На основании приведенных лемм $1-5$ легко получить доказательства следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных векторов A_n распределения сумм бесконечно малых независимых случайных векторов сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы к предельному распределению сходились распределения безгранично делимых, логарифмы характеристических функций которых $\psi_n(t_1, \ldots, t_s)$ даются формулой

$$\psi_n(t_1, \ldots, t_s) = -i(TA_n) + \sum_{k=1}^{k_n} \Big\{ i(TB_{nk}) + \\ + \int\limits_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1\right) dF_{nk}(X + B_{nk}) \Big\},$$

где вектор $B_{nk}(b_{nk}^{(1)}, \ldots, b_{nk}^{(s)})$ имеет компоненты

$$b_{nk}^{(i)} = \int\limits_{\rho<\tau} x_i\, dF_{nk}(X),$$

τ — положительная постоянная. Предельные распределения для обеих последовательностей совпадают.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы распределение $P(M)$ могло быть предельным для сумм независимых в каждой сумме предельно постоянных s-мерных случайных векторов, необходимо и достаточно, чтобы оно было безгранично делимым.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных $A_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(s)})$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} - A_n$$

независимых бесконечно малых s-мерных векторов сходились к предельному, наобходимо и достаточно, чтобы существовала вполне аддитивная, неотрицател ная функция множества $N(M)$, определенная на множествах $M\,(0 \in M)$, и неотрицательная квадратичная форма $Q_2(T) = Q_2(t_1, \ldots, t_s) < \infty$, такие, что:

1. На интервалах вида $I = I(\rho > R;\ \varphi_1 < \theta_1, \ldots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$ (ρ; $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ — сферические координаты), являющихся интервалами непрерывности функции $N(M)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_I P_{nk}(dM) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P_{nk}(I) = N(I),$$

2. $$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{\rho<\varepsilon} (TX)^2 P_{nk}(dM) - \left(\int_{\rho<\varepsilon} (TX) P_{nk}(dM) \right)^2 \right\} = Q_2(T).$$

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$(A_n T) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\rho<\tau} (TX)\, P_{nk}(dM) - (T\Gamma),$$

где $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ — произвольный постоянный вектор; $\rho < \tau$ — сфера непрерывности $N(M)$. Логарифм характеристической функции предельного закона определяется формулой [3] с функциями $N(M)$, $Q_2(T)$ и постоянным вектором Γ.

Замечание. В соотношении [2], вместо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ можно брать $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$.

ТЕОРЕМА 4. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных векторов A_n распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{nk_n} - A_n \qquad [6]$$

независимых случайных векторов сходились к нормальному распределению с характеристической функцией

$$e^{-\frac{1}{2}Q_2(t_1, \ldots, t_s)} = e^{-\frac{1}{2}Q_2(T)} \qquad [7]$$

и слагаемые $\xi_{nk}\,[1 \leqslant k \leqslant k_n]$ были бесконечно малы, необходимо и достаточно выполнение условий:

1. $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{\rho>\varepsilon} P_{nk}(dM) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad [8]$$

$$2.\quad \sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{\rho<\varepsilon}(TX)^2 P_{nk}(dM)-\Big(\int\limits_{\rho<\varepsilon}(TX)P_{nk}(dM)\Big)^2\right\}\underset{n\to\infty}{\to} Q_2(T) \qquad [8]$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Из условия 1 имеем

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} P\{|x_{nk}|>\varepsilon\}=\max_k\int\limits_{\rho>\varepsilon}P_{nk}(dM)\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\rho>\varepsilon}P_{nk}(dM)\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Отсюда следует, что слагаемые $\xi_{nk}[1\leqslant k\leqslant k_n]$ бесконечно малы. Из теоремы 3 вытекает, что для сходимости распределений сумм [6] к распределению с характеристической функцией [7], необходимо и достаточно, чтобы

$$1.\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{I}P_{nk}(dM)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}P_{nk}(I)=0.$$

для любого интервала $I=I(\rho>R;\ \varphi_1<\theta_1),\ldots,\varphi_{s-1}<\theta_{s-1})$, [9]

$$2.\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{\rho<\varepsilon}(TX)^2 P_{nk}(dM)-\Big(\int\limits_{\rho<\varepsilon}(TX)P_{nk}(dM)\Big)^2\right\}=Q_2(T).$$

Легко убедиться в эквивалентности условий [8] и [9], и теорема будет доказана.

ТЕОРЕМА 5. Для того, чтобы для данной последовательности

$$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$$

независимых случайных векторов можно было подобрать действительные постоянные $B_n>0$ и постоянные векторы A_n, чтобы распределения сумм

$$s_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{B_n}-A_n \qquad [10]$$

сходились к распределению с характеристической функцией [7] и слагаемые $\xi_{nk}=\frac{\xi_k}{B_n}$ были бесконечно малы, необходимо и достаточно существование таких последовательностей постоянных $C_n\,(C_n\to\infty)$ и $\varepsilon_n\,(\varepsilon_n\to 0)$, что при $n\to\infty$

$$1.\quad \sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\rho>C_n}P_k(dM)\to 0,$$

$$2.\quad \frac{\varepsilon_n^2}{C_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{\rho\leqslant C_n}(TX)^2 P_k(dM)-\Big(\int\limits_{\rho\leqslant C_n}(TX)P_k(dM)\Big)^2\right\}\to Q_2(T). \qquad [11]$$

Доказательство этого предложения легко получить, воспользовавшись теоремой 4.

§ 3. МНОГОМЕРНЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Назовем s-мерное распределение устойчивым, если, каковы бы ни были векторы A_1, A_2 и положительные числа B_1, B_2, всегда найдутся постоянный вектор A и положительное число B, при которых для трех независимых случайных векторов ξ_1, ξ_2, ξ, имеющих это распределение, случайный вектор $\frac{\xi-A}{B}$ является суммой векторов $\frac{\xi_1-A_1}{B_1}$ и $\frac{\xi_2-A_2}{B_2}$.

Обозначим функцию распределения устойчивого закона через $F(X)=F(x_1,\ldots,x_s)$. Тогда указанное свойство устойчивости распределения означает, что для произвольных постоянных $B_1>0$, $B_2>0$ и векторов $A_1=(a_1',\ldots,a_s')$, $A_2=(a_1'',\ldots,a_s'')$ найдутся постоянная $B>0$ и постоянный вектор $A=(a_1,\ldots,a_s)$, такие, что

$$F(Bx_1+a_1,\ldots,Bx_s+a_s)=$$
$$=F(B_1x_1+a_1',\ldots,B_1x_s+a_s') * F(B_2x_1+a_1'',\ldots,B_2x_s+a_s''). \quad [1]$$

Рассмотрим последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s-мерных векторов

$$\xi^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\ldots,\xi_s^{(n)}),\quad (n=1,2,\ldots).$$

Нетрудно показать, что класс предельных распределений для нормированных сумм

$$s^{(n)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}-A_n}{B_n}, \quad [2]$$

где последовательность постоянных векторов A_n и $B_n>0$ надлежаще выбраны, совпадает с классом определенных выше устойчивых распределений.

Фельдхейм и Леви (13, 20) показали, что s-мерное распределение устойчиво тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции $\psi(t_1,\ldots,t_s)=\chi(t;\varphi)=\chi(t;\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$ (t; $\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}$ — сферические координаты) может быть представлен в виде

$$\chi(t;\varphi)=-t^{\alpha}(C_1(\varphi)+iC_2(\varphi))+i(T\Gamma),\ (0<\alpha\leqslant 2;\ \alpha\neq 1)$$
$$\chi(t;\varphi)=-t(C_1(\varphi)+iC_2'(t;\varphi))+i(T\Gamma),\ (\alpha=1), \quad [3]$$

где

$$C_1(\varphi)=k\int_e|\cos\theta|^{\alpha}H(ds),$$

$$C_2(\varphi)=-k\int_e\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha|\cos\theta|^{\alpha}H(ds),$$

$$C_2'(t;\varphi)=\int\limits_e \cos\theta \lg|t\cos\theta|\,H(ds).$$

Здесь введены обозначения: t — модуль вектора $T=(t_1,\ldots,t_s)$; $\Gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ — постоянный вектор; $(T\Gamma)$ — скалярное произведение векторов T и Γ; $H(s)$ — аддитивная неотрицательная функция поверхности, определенная на единичной сфере; k — положительная постоянная; θ — угол между вектором T и единичным вектором $(\omega_1,\ldots,\omega_{s-1})$, конец которого находится в ds; интегрирование распространяется по единичной сфере e.

Число α может принимать значения $0<\alpha\leqslant 2$ и называется характеристическим показателем устойчивого распределения. При $\alpha=2$ имеем нормальное распределение. Функция $C_2(\varphi)$ в этом случае тождественно равна нулю, $C_1(\varphi)$ — положительно определенная квадратичная форма от $\frac{t_i}{t}$, $(i=1,2,\ldots,s)$. При $H(s)=\text{const}$ имеем несобственные распределения.

Непосредственное дифференцирование формулы обращения показывает, что все собственные устойчивые распределения непрерывны и имеют непрерывные производные всех порядков. Обозначим в дальнейшем плотность собственного устойчивого распределения, определенного формулой [3], через

$$p(\overline{t};H;\alpha,\overline{\gamma}).$$

Если в выражении [2] принять, что

$$\xi_{nk}=\frac{\xi^{(k)}}{B_n}-\frac{A_n}{n\,B_n},$$

то задача разыскания предельных распределений для нормированных сумм [2] будет сведена к общей задаче суммирования независимых случайных векторов, рассмотренной в § 2. Отсюда следует, что устойчивые распределения являются безгранично делимыми.

Легко убедиться в том, что в формуле [3] § 1, дающей общий вид логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения, для невырожденных s-мерных устойчивых распределений следует положить

1. При $\alpha=2$

$$N(M)\equiv\text{const};\ \tfrac{1}{2}Q_2(T)=t^2C_1(\varphi), \qquad [4]$$

2. При $0<\alpha<2$

$$N(I)=\frac{H(\omega)}{R^\alpha};\ Q_2(T)\equiv 0, \qquad [5]$$

где I означает интервал

$$I=I(\rho>R;\ \varphi_1<\omega_1,\ldots,\varphi_{s-1}<\omega_{s-1});$$

ω — интервал на единичной сфере:

$$\omega=\omega(\rho=1;\ \varphi_1<\omega_1,\ldots,\varphi_{s-1}<\omega_{s-1}).$$

Отсюда непосредственно следует единственность представления логарифма характеристической функции устойчивого распределения формулой [3].

ЛЕММА 1. Рост функции $H(s)$ для невырожденного s-мерного устойчивого распределения при $\alpha \neq 2$ не может сводиться к росту на некотором множестве, принадлежащем диаметральному сечению единичной s-мерной сферы.

Доказательство этого предложения основано на следующем признаке вырождения распределения.

ЛЕММА 2. Чтобы s-мерное распределение вырождалось в s-1-мерное распределение, необходимо и достаточно, чтобы модуль его характеристической функции обращался в единицу в двух точках (отличных от начала) $(a_1, \ldots, a_s)$, $(\beta a_1, \ldots, \beta a_s)$, где β — иррациональное число.

Назовем такие точки несоизмеримыми.

Докажем более точное предложение.

ЛЕММА 2′. Для того чтобы s-мерное распределение $P(M)$ вырождалось в s-1-мерное в гиперплоскости $a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s = 2\pi d$, необходимо и достаточно, чтобы для точки $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$

$$e^{-2\pi i d} f(a_1, \ldots, a_s) = 1$$

и для некоторого иррационального числа β

$$e^{-2\pi i d\beta} f(\beta a_1, \ldots, \beta a_s) = 1,$$

где $f(T)$ — характеристическая функция распределения $P(M)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если модуль характеристической функции s-мерного распределения обращается в единицу в точке, отличной от начала, то распределение не может быть непрерывным в s-мерном пространстве. Действительно, пусть в точке $(t_1^0, \ldots, t_s^0)$

$$|f(t_1^0, \ldots, t_s^0)| = 1,$$

где, по крайней мере, одно из чисел $t_1^0, \ldots, t_s^0$ отлично от нуля. Тогда имеем

$$e^{i\theta} f(t_1^0, \ldots, t_s^0) = 1$$

или

$$\int\limits_{R_s} e^{i(\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s)} P(dM) = 1.$$

Отсюда видим, что $P(dM)$ может отличаться от нуля только в точках, расположенных на системе параллельных гиперплоскостей

$$\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s = 2\pi k,$$

где k — произвольное целое.

Докажем теперь достаточность условий леммы 2. Как и выше, имеем

$$\int_{R_s} e^{-2\pi id+i(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)}P(dM)=1,$$

$$\int_{R_s} e^{-2\pi i\beta d+i\beta(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)}P(dM)=1.$$

Отсюда заключаем, что $P(dM)$ может отличаться от нуля только на общей части двух систем параллельных гиперплоскостей

$$\begin{cases} a_1x_1+\ldots+a_sx_s=2\pi d+2\pi k, \\ \beta(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)=2\pi d\beta+2\pi k_1. \end{cases}$$

Эта система совместима только для одной пары значений $k=k_1=0$ и сводится к одному уравнению

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_sx_s=2\pi d.$$

Необходимость. Пусть распределение сводится к распределению в гиперплоскости

$$a_1x_1+\ldots+a_sx_s=2\pi d.$$

Тогда

$$e^{-2\pi id}f(a_1,\ldots,a_s)=\int_{R_s} e^{-2\pi id+i(a_1x_1+\ldots+a_sx_s)}P(dM)=\int_{R_s}P(dM)=1,$$

а также

$$e^{-2\pi i\beta d}f(\beta a_1,\ldots,\beta a_s)=\int_{R_s} e^{\beta i(-2\pi d+a_1x_1+\ldots+a_sx_s)}P(dM)=1.$$

Следствие. Если модуль характеристической функции s-мерного распределения равен единице в m парах точек, несоизмеримых в каждой паре

$$\begin{pmatrix} t_{11}',\ldots,t_{1s}' \\ t_{11}'',\ldots,t_{1s}'' \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} t_{m1}',\ldots,t_{ms}' \\ t_{m1}'',\ldots,t_{ms}'' \end{pmatrix},$$

и таких, что матрица (t_{ik}') $(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,\ldots s)$ имеет ранг m, то распределение вырождается в распределение в пространстве $s-m$-измерений.

Доказательство леммы 1. Из соотношения [5] следует, что логарифм характеристической функции $\chi(t;\varphi)$ устойчивого распределения может быть представлен в виде

$$\chi(t;\varphi)=i(T\Gamma)-\int_{\rho>0}\int_{e}\left(e^{i(TX)}-1-\frac{i(TX)}{1+\rho^2}\right)d\frac{H(\omega)}{\rho^\alpha}, \qquad [6]$$

где внутреннее интегрирование проводится по единичной s-мерной сфере e. В предположении леммы внутреннее интегрирование надо проводить по диаметральному сечению σ единичной сферы e. Обозначим через ω' совокупность текущих координат этого сечения. Возьмем в левой части [6] вместо совокупности координат φ значения φ°, определяющие ортогональное к сечению σ направление. При произвольном $t > 0$ имеем

$$\chi(t;\varphi^\circ) = i(T'\Gamma) - \int\limits_{\rho>0}\int\limits_{\sigma}\left(e^{i(T'X)} - 1 - \frac{i(T'X)}{1+\rho^2}\right) d\frac{H(\omega)}{\rho^\alpha} = i(T'\Gamma).$$

Таким образом, на направлении $\varphi^\circ = (\varphi_1^\circ, \ldots, \varphi_{s-1}^\circ)$ найдутся две несоизмеримые точки, в которых модуль характеристической функции равен единице. В силу леммы 2 распределение вырождается. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 3. Если распределение $P(M)$, предельное для сумм [2] независимых бесконечно малых слагаемых $\xi_{nk} = \frac{\xi_k}{B_n} - \frac{A_n}{nB_n}$, где $B_n > 0$ и постоянные векторы A_n надлежаще выбраны, является собственным, то при $n \to \infty$

$$B_n \to \infty. \qquad [7]$$

Действительно, пусть существует такая последовательность $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$, что $B_{n_i} \to B \neq \infty$. Пусть тогда $(t_1, \ldots, t_s)$ — произвольный вектор. Величины $t_j^{(i)} = t_j B_{n_i}$ при $i \to \infty$ стремятся к $t_j B\,(j = 1, 2, \ldots, s)$. Так как величины ξ_{nk} бесконечно малы равномерно относительно $k\,[1 \leqslant k \leqslant k_n]$, то при $i \to \infty$

$$|f_k(t_1, \ldots, t_s)| = \left| f_k\left(\frac{t_1^{(i)}}{B_{n_i}}, \ldots, \frac{t_s^{(i)}}{B_{n_i}}\right)\right| \to 1, \quad [1 \leqslant k \leqslant n],$$

т. е. $|f_k(t_1, \ldots, t_s)| = 1$ при любом $(t_1, \ldots, t_s)$ $[1 \leqslant k \leqslant n]$. Отсюда следует, что при любом $(t_1, \ldots, t_s)$ для характеристической функции предельного распределения $\varphi(t_1, \ldots, t_s)$ имеет место соотношение

$$|\varphi(t_1, \ldots, t_s)| = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{k} \left| f_k\left(\frac{t_1}{B_{nk}}, \ldots, \frac{t_s}{B_{nk}}\right)\right| = 1.$$

В силу леммы 2 § 2 это означает, что предельное распределение $P(M)$ является несобственным, что противоречит исходному предположению.

§ 4. ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s-мерных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ с вероятностной функцией $P(M)$. Скажем, что $P(M)$ принадлежит области притяжения распределения $R(M,)$ если при некотором подборе постоянных чисел $B_n > 0$ и вещественных векторов A_n при $n \to \infty$ распределения сумм

$$s_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - A_n$$

сходятся к $F(M)$. Из § 3 следует, что областями притяжения обладают только устойчивые распределения и что область притяжения каждого устойчивого распределения непуста, так как она содержит, по крайней мере, данное устойчивое распределение.

Теорема 3 § 2 позволяет указать на характеристический признак, которому должна удовлетворять вероятностная функция $P(M)$ для того, чтобы она принадлежала области притяжения данного устойчивого распределения. В одномерном случае признаки, аналогичные приведенным далее в теоремах 1 — 2, были получены для нормального распределения А. Я. Хинчиным, П. Леви и В. Феллером (9,18) в 1935 г. и для остальных устойчивых распределений с характеристическим показателем $0 < \alpha < 2$ Б. В. Гнеденко (2,9) в 1938 г., а также другим способом — В. Деблиным (10) в 1939 г.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы s-мерная вероятностная функция $P(M)$ принадлежала области притяжения невырожденного нормального распределения $G(M)$ с характеристической функцией

$$e^{-\frac{1}{2} Q_2(t_1, \ldots, t_s)} = e^{-\frac{1}{2} Q_2(T)}, \qquad [1]$$

необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1. $$\lim_{R \to \infty} \frac{R^2 \int\limits_{\rho > R} P(dM)}{\int\limits_{\rho < R} \rho^2 P(dM)} = 0,$$

$$[2]$$

2. $$\lim_{R \to \infty} \frac{\int\limits_{\rho < R} (T_1 X)^2 P(dM)}{\int\limits_{\rho < R} (T_2 X)^2 P(dM)} = \frac{Q_2(T_1)}{Q_2(T_2)}$$

при произвольных $T_1 = (t_1', \ldots, t_s')$ и $T_2 = (t_1'', \ldots, t_s'')$.

Доказательство. Случай первый:

$$\int\limits_{R_s} \rho^2 P(dM) < \infty. \qquad [3]$$

Тогда

$$\int\limits_{R_s} (TX) P(dM) < \infty$$

при любом $T = (t_1, \ldots, t_s)$. Центрируя $P(M)$ математическими ожиданиями, полагая $B_n = \sqrt{n}$, убеждаемся в принадлежности центрированного распределения $\overline{P}(M)$ (а, значит, и $P(M)$) к области притяжения нормального распределения с характеристической функцией [1], причем

$$Q_2(T)=\int\limits_{R_s}(TX)^2\,\overline{P}(dM).$$

С другой стороны, очевидно, что $\overline{P}(M)$ удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, все распределения с конечными дисперсиями принадлежат областям притяжения нормальных распределений.

Случай второй:

$$\int\limits_{R_s}\rho^2\,P(dM)=\infty. \qquad [4]$$

Тогда

$$\{\int\limits_{\rho<R}x_i\,P(dM)\}^2=\mathrm{o}\,\{\int\limits_{\rho<R}\rho^2\,P(dM)\},\qquad (i=1,2,\ldots,s). \qquad [5]$$

Действительно, если

$$\int\limits_{R_s}x_i^2\,P(dM)<\infty,$$

то соотношение [5] очевидно; если

$$\int\limits_{R_s}x_i^2\,P(dM)=\infty,$$

то выберем положительную неограниченно возрастающую при $x_i=\pm\infty$ функцию $z_i(x_i)$ и такую, что

$$\int\limits_{R_s}z_i^2(x_i)\,P(dM)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z_i^2(x_i)\,d_{x_i}P(M)=C<\infty.$$

Имеем

$$[\int\limits_{\rho<R}x_i\,P(dM)]^2\leqslant\int\limits_{\rho<R}z_i^2(x_i)\,P(dM).$$

$$\int\limits_{\rho<R}\frac{x_i^2}{z^2{}_i(x_i)}\,P(dM)\leqslant C\int\limits_{\rho<R}\frac{x_i^2}{z^2{}_i(x_i)}\,P(dM).$$

Отсюда следует [5].

Для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность условий [2] с условиями [7] теоремы 5 § 2, которые в нашем случае могут быть записаны в таком виде: существуют последовательности C_n ($C_n\to\infty$) и ε_n ($\varepsilon_n\to 0$) такие, что

1. $$n \int\limits_{\rho > C_n} P(dM) \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

2. $$\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \int\limits_{\rho < C_n} (TX)^2 P(dM) \underset{n \to \infty}{\to} Q_2(T)$$ [6].

при любом $T = (t_1, \ldots, t_s)$.

Далее заметим, что если $P(M)$ принадлежит области притяжения некоторого нормального распределения, то в рассматриваемом случае при любом $T = (t_1, \ldots, t_s)$, отличном от $0\,(0, \ldots, 0)$

$$\int\limits_{\rho < R} (TX)^2 P(dM) \underset{R \to \infty}{\to} \infty \qquad [7]$$

Действительно, в этом случае выполнены условия [6] и для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant s)$

$$\int\limits_{R_s} x_i^2 P(dM) = \infty .$$

Допустив во втором условии [6], что $t_i \neq 0$; $t_k = 0$, $k \neq i$, получаем

$$\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \int\limits_{\rho < C_n} x_i^2 t_i^2 P(dM) \underset{n \to \infty}{\to} \sigma_{ii} t_i^2,$$

где σ_{ii} — коэффициент при t_i^2 в квадратичной форме $Q_2(T)$. Отсюда $\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \to 0$ и из второго условия [6] следует [7].

Из соотношения [7] следует, что если для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant s)$

$$\int\limits_{R_s} x_i^2 P(dM) = \infty$$

и $P(M)$ принадлежит области притяжения невырожденного нормального распределения, то это соотношение имеет место для всех i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ (достаточно заметить, что в силу предположения о невырождаемости предельного распределения все коэффициенты σ_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ отличны от нуля).

Покажем, что из условий [6] следуют условия [2]. Обозначим

$$\nu(R, T) = \int\limits_{\rho > R} t^2 \cos^2 (\widehat{TX}) P(dM) = t^2 k_T \int\limits_{\rho > R} P(dM),$$

где k_T — среднее значение $\cos^2(\widehat{TX})$,

$$\mu(R; T) = \frac{1}{R^2} \int\limits_{\rho < R} (TX)^2 P(dM).$$

Так как $C_n \to \infty$, то для всякого сколь угодно большого R можно найти такое n, при котором $C_n \leqslant R < C_{n+1}$. Имеем

$$\frac{1}{R^2}\int\limits_{\rho<R}(TX)^2\,P(dM)=\frac{1}{R^2}\int\limits_{C_n<\rho<R}(TX)^2\,P(dM)+\frac{1}{R^2}\int\limits_{\rho<C_n}(TX)^2\,P(dM)\leqslant$$

$$\leqslant t^2\int\limits_{\rho>C_n}\cos^2(\widehat{TX})\,P(dM)+\frac{1}{C_n^2}\int\limits_{\rho<C_n}(TX)^2\,P(dM).$$

Отсюда

$$\mu(C_n;T)+\nu(C_n;T)\geqslant\mu(R;T)\geqslant\mu(C_{n+1};T)-\nu(C_n;T),$$

$$\nu(C_n;T)\geqslant\nu(R;T)\geqslant\nu(C_{n+1};T)$$

$$\frac{n\,\nu(C_n;T)}{\frac{n}{n+1}(n+1)\,\mu(C_{n+1};T)-n\,\nu(C_n;T)}\geqslant\frac{\nu(R;T)}{\mu(R;T)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(n+1)\,\nu(C_{n+1};T)}{\frac{n+1}{n}\,[\,n\,\mu(C_n;T)+n\mu(C_n;T)\,]}.$$

В силу условий [6] получаем

$$\frac{R^2\int\limits_{\rho>R}t^2\cos^2(\widehat{TX})\,P(dM)}{\int\limits_{\rho>R}(TX)^2\,P(dM)}\;N\to O,$$

откуда следует первое условие [2].

Пусть теперь T_1 и T_2 произвольные векторы, отличные от нулевого. Имеем

$$\mu(C_n;T_1)+\nu(C_n;T_1)\geqslant\mu(R;T_1)\geqslant\mu(C_{n+1};T_1)-\nu(C_n;T_1),$$

$$\mu(C_n;T_2)+\nu(C_n;T_2)\geqslant\mu(R;T_2)\geqslant\mu(C_{n+1};T_2)-\nu(C_n;T_2).$$

Отсюда

$$\frac{n\mu(C_n;T_1)+n\nu(C_n;T_1)}{\frac{n}{n+1}\;(n+1)\,\mu(C_{n+1};T_2)-n\nu(C_n;T_2)}\geqslant\frac{\mu(R;T_1)}{\mu(R;T_2)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n\mu(C_{n+1};T_1)-n\nu(C_n;T_1)}{n\mu(C_n;T_2)+n\nu(C_n;T_2)},$$

и из второго условия [6] следует второе условие [2].

Из условий [2] следуют условия [6]. Пусть $\delta>0$ — произвольно; T_1 — вектор, отличный от нулевого. Обозначим через $C_n(\delta)$ наименьшее R, для которого $n\nu(R;T)\leqslant\delta$. Так как

$$\int\limits_{R_s}(T_1X)^2\,P(dM)=\infty,$$

то $C_n(\delta)\to\infty$ при $n\to\infty$. Из первого условия [2] следует, что каково бы ни было $\varepsilon>0$ при достаточно больших n

$$n\mu\left(\frac{1}{2}C_n(\delta);\ T_1\right)>\frac{\delta}{\varepsilon},$$

отсюда

$$\mu\left(\frac{1}{2}C_n(\delta);\ T_1\right)=\frac{4}{C_n^2(\delta)}\int\limits_{\rho<\frac{C_n(\delta)}{2}}(T_1X)^2P(dM)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{C_n^2(\delta)}\int\limits_{\rho<C_n(\delta)}(T_1X)^2P(dM)=4\mu(C_n(\delta);\ T_1)$$

или

$$n\mu\left(C_n(\delta);\ T_1\right)>\frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

Выберем ε равным δ^2. Имеем

$$n\mu\left(C_n(\delta);\ T_1\right)>\frac{1}{4\delta}.$$

Пусть $\delta_k>0$, $\delta_k\to0$ $(n\to\infty)$. Для каждого δ_k получим последовательность $C_n(\delta_k)$. Обозначим $C_n=C_n(\delta_n)$. Имеем

$$n\nu(C_n;\ T_1)\leqslant\delta_n,\ n\mu(C_n;\ T_1)>\frac{1}{4\delta_n}.$$

Отсюда

$$n\int\limits_{\rho>C_n}(T_1X)^2P(dM)=nt^2\int\limits_{\rho>C_n}\cos^2(\widehat{T_1X})P(dM)\to0,$$

откуда следует первое условие [6]; точно так же имеем

$$\frac{n}{C_n^2}\int\limits_{\rho<C_n}(T_1X)^2P(dM)\to\infty.$$

Допустим

$$\varepsilon_n^2=\frac{Q_2(T_1)}{\dfrac{n}{C_n^2}\displaystyle\int\limits_{\rho<C_n}(T_1X)^2P(dM)}$$

Отсюда из второго условия [2] для всякого T

$$\frac{\varepsilon_n^2n}{C_n^2}\int\limits_{\rho<C_n}(T_1X)^2P(dM)\to Q_2(T),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Чтобы s-мерная вероятностная функция принадлежала области притяжения невырожденного s-мерного устойчивого распределения, логарифм характеристической функции которого определяется формулой 3 § 3 с характеристическим показателем α $(0<\alpha<2)$ и функцией $H(\theta)$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1. $$\lim_{R\to\infty}\frac{P\{\rho>R\}}{P\{\rho>kR\}}=k^{\alpha}$$

при произвольном $k>0$, [8]

2. $$\lim_{R\to\infty}\frac{P\{\rho>R;\ \varphi<\theta\}}{P\{\rho>R;\ \varphi<\theta'\}}=\frac{H(\theta)}{H(\theta')}$$

для произвольного $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_s)$ и $\theta'=(\theta_1',\ldots,\theta_s')$, для которого $H(\theta')=H(\varphi_1<\theta_1',\ldots,\varphi_{s-1}<\theta_{s-1}')\neq 0$.

Доказательство. Из теоремы 3 § 2 следует, что для принадлежности $P(M)$ области притяжения устойчивого распределения (с характеристическим показателем α $(0<\alpha<2)$ и функцией $H(\theta)$) необходимо и достаточно, чтобы при некотором подборе постоянных B_n $(B_n\to\infty)$ выполнялись соотношения:

1. $$\lim_{n\to\infty} nP\{\rho>RB_n;\ \varphi<\theta\}=\frac{H(\theta)}{R^{\alpha}}$$

для любого $R>0$, [9]

2. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{B_n^2}\Big\{\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2\,P(dM)-\Big(\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n}(TX)\,P(dM)\Big)^2\Big\}=0.$$

Покажем эквивалентность условий [8] и [9].

Из условий [9] следуют условия [8]. Пусть $y>0$ велико. Подберем столь большое n, чтобы при данном k

$$B_nR\leqslant y<B_{n+1}R.$$

Имеем

$$P\{\rho>B_nR\}\geqslant P\{\rho>y\}\geqslant P\{\rho>B_{n+1}R\},$$

$$P\{\rho>kB_nR\}\geqslant P\{\rho>ky\}\geqslant P\{\rho>kB_{n+1}R\},$$

$$\frac{nP\{\rho>B_nR\}}{nP\{\rho>kB_{n+1}R\}}\geqslant\frac{P\{\rho>y\}}{P\{\rho>ky\}}\geqslant\frac{P\{\rho>B_{n+1}R\}}{P\{\rho>kB_nR\}};$$

Отсюда

$$k^{\alpha}\geqslant\overline{\lim_{y\to\infty}}\frac{P\{\rho>y\}}{P\{\rho>ky\}}\geqslant\underline{\lim_{y\to\infty}}\frac{P\{\rho>y\}}{P\{\rho>ky\}}\geqslant k^{\alpha},$$

т. е. имеет место первое условие [8]. Далее

$$P\{\rho>B_nR;\ \varphi<\theta\}\geqslant P\{\rho>y;\ \varphi<\theta\}\geqslant P\{\rho>B_{n+1}R;\ \varphi<\theta\},$$

$$P\{\rho>B_nR;\ \varphi<\theta'\}\geqslant P\{\rho>y;\ \varphi<\theta^1\}\geqslant P\{\rho>B_{n+1}R;\ \varphi<\theta'\}.$$

Отсюда, как и выше, получаем второе условие [8].

Из условий [8] следуют условия [9]. Действительно, из [8] следует, что для таких θ', для которых $H(\theta') \neq 0$ при любом R

$$P\{\rho > R;\ \varphi < \theta'\} > 0.$$

Обозначим через B_n наименьший корень уравнения

$$P\{\rho > R(1+0);\ \theta'\} \leq \frac{H(\theta')}{n} \leq P\{\rho > R(1-0);\ \theta'\}. \qquad [10]$$

В силу [10] $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Отсюда из соотношений [8] следует, что при любом $R\,(R > 0)$

$$nP(\rho > RB_n;\ \theta) = \frac{H(\theta)}{H(\theta^1)}\, nP(\rho > RB_n;\ \theta')\ (1 + o(1)) =$$

$$= \frac{H(\theta)}{H(\theta^1)}\, nP(\rho > B_n(1+0);\ \theta')\ \frac{1}{R^\alpha}(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{H(\theta)}{H(\theta^1)}\, nP(\rho > B_n(1-0);\ \theta')\frac{1}{R^\alpha}\,(1 + o(1)).$$

Отсюда и из [10] заключаем, что

$$nP\{\rho > xB_n;\ \varphi < \theta\} = \frac{H(\theta)}{x^\alpha}\,(1 + o(1)). \qquad [11]$$

Покажем теперь, что при $T = (t_1, \ldots, t_s)$, отличном от начала,

$$\int\limits_{R_s} (TX)^2 P(dM) = \infty. \qquad [12]$$

Из условия [8] следует, что можно найти такое большое x_o, что при данном $\varepsilon > 0$ и $k > 1$ $(k^{2-\alpha}(1-\varepsilon) \geqslant 1)$

$$\frac{P(\rho > k^s x_o)}{P(\rho > k^{s+1} x_o)} = (1 + \varepsilon_s)^{-1} k^\alpha, \qquad [13]$$

где $|\varepsilon_s| \leq \varepsilon$ для $s = 0, 1, 2, \ldots$. Имеем при произвольном $T (\neq 0)$

$$\int\limits_{R_s} (TX)^2 P(dM) = \int\limits_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{k^{s-1}x_0 \leqslant \rho < k^s x_0} (TX)^2 P(dM) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + t^2 x_o^2 \sum_{s=1}^{\infty} k^{2(s-1)} \int\limits_{k^{s-1}x_0 \leqslant \rho < k^s x^0} \cos^2(\widehat{TX})\, P(dM) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + t^2 x_o^2 \sum_{s=1}^{\infty} k^{2(s-1)} k_T P(k^{s-1}x_o \leq \rho < k^s x_o).$$

В силу условия [12]

$$P(k^{s-1}x_o \leq \rho < k^s x_o) = P(\rho > k^{s-1}x_o) - P(\rho > k^s x_o) \geqslant$$

$$\geqslant P(\rho > x_o)\left\{\prod_{r=1}^{s-1}(1+\varepsilon_r)\,k^{-\alpha(s-1)} - \prod_{r=1}^{s}(1+\varepsilon_r)\,k^{-\alpha s}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{\rho > x_o\}(1-\varepsilon)^s k^{-\alpha s}\left\{\frac{k^\alpha}{1+\varepsilon} - 1\right\}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{R_s}(TX)^2 P(dM) \geqslant \int\limits_{\rho<x_0}(TX)^2 P(dM) +$$

$$+ P(\rho > x_o)\,k^{-2}\left\{\frac{k^\alpha}{1+\varepsilon} - 1\right\}\sum_{s=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^s k^{s(2-\alpha)}. \qquad [14]$$

Так как при каждом x_o $P(\rho > x_o) > 0$ и ряд в последнем неравенстве расходится, то соотношение [12] доказано.

Выберем теперь столь большое n, чтобы при данном $T(\neq 0)$

$$\int\limits_{\rho<x_0}(TX)^2 P(dM) \leqslant \int\limits_{x_0\leqslant\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2 P(dM),$$

что в силу соотношения [12] возможно. Тогда

$$\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2 P(dM) \leqslant 2\int\limits_{x_0\leqslant\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2 P(dM).$$

Выберем такое $s > 0$, чтобы

$$k^s x_o \leqslant B_n\varepsilon < k^{s+1}x_o. \qquad [15]$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2 P(dM) \leqslant 2x_o^2\sum_{1=r}^{s}k^{2(r+1)}P\{k^r x_o \leqslant \rho < k^{r+1}x_o\} <$$

$$< 2x_o^2\sum_{r=0}^{s}k^{2(r+1)}P\{\rho \geqslant k^r x_o\} \leqslant 2\varepsilon^2 B_n^2\sum_{r=0}^{s}k^{2(r-s+1)}P(\rho \geqslant k^r x_o).$$

В силу [14] и [15]

$$P\{\rho \geqslant k^r x_o\} \leqslant k^\alpha(1+\varepsilon)P\{\rho \geqslant k^{r+1}x_o\} \leqslant$$

$$\leqslant [(1+\varepsilon)\,k^\alpha]^{s-r+1}P\{\rho \geqslant k^{s+1}x_o\} \leqslant [(1+\varepsilon)\,k^\alpha]^{s-r+1}P\{\rho \geqslant \varepsilon B_n\}.$$

Отсюда получаем при $k^{\alpha-2}(1+\varepsilon) < 1$

$$\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n}(TX)^2 P(dM) \leqslant 2B_n^2\varepsilon^2(1+\varepsilon)\,k^{\alpha+2}P(\rho \geqslant \varepsilon B_n)\frac{1}{1-(1+\varepsilon)\,k^{\alpha-2}}$$

и в силу [12]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{B_n^2} \int\limits_{\rho<\varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) \leqslant 2\varepsilon^{2-\alpha}(1+\varepsilon)\, k^{\alpha+2} \frac{1}{1-(1+\varepsilon)\, k^{\alpha-2}},$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to\infty}} \frac{n}{B_n^2} \int\limits_{\rho<\varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) = 0.$$

А так как

$$\frac{n}{B_n^2}\left\{ \int\limits_{\rho<\varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) - \left(\int\limits_{\rho<\varepsilon B_n} (TX) P(dM)\right)^2 \right\} \leqslant \frac{n}{B_n^2} \int\limits_{\rho<\varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM),$$

то теорема доказана.

Для частного случая, когда распределение $P(M)$ притягивается к устойчивому распределению с помощью одних нормирующих коэффициентов $B_n > 0$, и случаев, приводящихся к этому, легко указать характеристический признак принадлежности этого распределения области притяжения данного устойчивого распределения. В случае притяжения такого вида в качестве предельных распределений могут быть устойчивые распределения, логарифм характеристической функции которых имеет вид

$$lg\ \psi(t;\varphi) = \chi(t,\varphi) = -t^\alpha (C_1(\varphi) + i\, C_2(\varphi)) + \\ + i(T\Gamma) = -t^\alpha C(\varphi) + i(T\Gamma), \qquad [15]$$

где $C_1(\varphi)$, $C_2(\varphi)$ определены, как в § 3. При $\alpha = 2$ $C_2(\varphi) \equiv 0$ (заметим, что для невырожденных устойчивых распределений $C_1(\varphi) \neq 0$ ни при одном значении φ. Это следует, хотя бы из того, что устойчивые распределения безгранично делимы).

ТЕОРЕМА 3. Чтобы распределение $P(M)$ принадлежало области притяжения устойчивого распределения с характеристической функцией [15], необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\text{а)} \quad \lim_{\tau\to 0} \frac{R\chi(s\tau;\varphi)}{R\chi(\tau;\varphi)} = s^\alpha,$$

$$\text{б)} \quad \lim_{\tau\to 0} \frac{\chi(\tau;\varphi_1)}{\chi(\tau;\varphi_2)} = \frac{C(\varphi_1)}{C(\varphi_2)}.$$

Необходимость условия следует с очевидностью из того факта, что (в силу леммы 3 §3) $B_n \to \infty$.

Достаточность. Из второго условия имеем

$$R\chi(\tau;\varphi_1)\cdot IC(\varphi_2) + I\chi(\tau;\varphi_1)\cdot RC(\varphi_2) \underset{\tau\to 0}{\to} \\ \underset{\tau\to 0}{\to} R\chi(\tau;\varphi_2)\cdot IC(\varphi_1) + I\chi(\tau;\varphi_2)\cdot RC(\varphi_1).$$

Полагая здесь $\varphi_2=\varphi+\pi$, $\varphi_1=\varphi$, получаем

$$R\chi(\tau;\ \varphi)\cdot IC(\varphi)\underset{\tau\to 0}{\to} I\chi(\tau;\ \varphi)\cdot R\,C(\varphi),$$

или

$$\frac{R\chi(\tau;\ \varphi)}{I\chi(\tau;\ \varphi)}\underset{\tau\to 0}{\to}\frac{R\,C(\varphi)}{I\,C(\varphi)}.$$

Обозначим через B_n наименьший корень уравнения

$$R\chi(\tau;\ \varphi_o)=-\frac{R\,C(\varphi_o)}{n},$$

где φ_o — произвольное фиксированное значение φ. Имеем

$$I\chi(\tau;\ \varphi_o)\underset{\tau\to 0}{\to}\frac{IC(\varphi_o)}{RC(\varphi_o)}R\chi(\tau;\ \varphi_o)=-\frac{IC(\varphi_o)}{RC(\varphi_o)}\frac{RC(\varphi_o)}{n}=-\frac{IC(\varphi_o)}{n},$$

$$\chi\left(\frac{1}{B_n};\ \varphi_o\right)=R\chi\left(\frac{1}{B_n};\ \varphi_o\right)+iI\chi\left(\frac{1}{B_n};\ \varphi_o\right)\to-\frac{C(\varphi_o)}{n}.$$

Отсюда

$$n\chi\left(\frac{t}{B_n};\ \varphi\right)\to nt^{\alpha}\chi\left(\frac{1}{B_n};\ \varphi\right)\to nt^{\alpha}\frac{C(\varphi)}{C(\varphi_o)}\chi\left(\frac{1}{B_n};\ \varphi_o\right)\to$$

$$\to nt^{\alpha}\frac{C(\varphi)}{C(\varphi_o)}\cdot\frac{-C(\varphi_o)}{n}=-t^{\alpha}C(\varphi),\ (n\to\infty),$$

что и доказывает наше предположение.

Замечание. Все распределения $P(M)$, принадлежащие областям притяжения устойчивых распределений с характеристическим показателем $\alpha\,(0<\alpha\leqslant 2)$, обладают следующим свойством

$$\frac{R\chi(s\tau;\ \varphi)}{R\chi(\tau;\ \varphi)}\underset{\tau\to 0}{\to}s^{\alpha}.$$

Это следует немедленно из того, что $B_n\to\infty$.
Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

§ 5. МНОГОМЕРНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть s = мерная случайная величина $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_s)$ принимает значения только с координатами вида

$$(a_1+k_1h_1,\ \ldots,\ a_s+k_sh_s),$$

где $k_i\,(i=1,\ldots,s)$ — произвольные целые, a_i, $h_i\,(i=1,2,\ldots,s)$ — — некоторые постоянные. Изменив для простоты масштабы по осям, можем ограничиться рассмотрением случая, когда случайный вектор принимает значения только с целочисленными координатами. Назовем такой случайный вектор d-решетчатым, если общий наибольший делитель всех определителей порядка s, составленных из разностей координат точек, вероятности которых положительны, равен s.

Не ограничивая общности, будем считать, что координаты возможных значений вектора ξ по каждой оси взаимно просты в совокупности.

Решетчатые распределения могут быть охарактеризованы следующими свойствами.

ЛЕММА 1. Модуль характеристической функции d-решетчатого s-мерного распределения обращается в единицу в области $(|t_i| < 2\pi;\ i=1, 2, \ldots, s)$ в точке, отличной от начала, тогда и только тогда, когда $d > 1$.

ЛЕММА 2. Для того, чтобы s-мерное распределение было d-решетчатым, необходимо и достаточно, чтобы модуль его характеристической функции обращался в единицу в таких s узлах s-мерной решетки масштаба $\frac{2\pi}{a}$ (отличных от начала), которые вместе с началом образуют вершины s-мерного симплекса объема $\frac{(2\pi)^s}{s!\,d}$, внутри и на гранях которого модуль характеристической функции не обращается в единицу.

Доказательство леммы 1. Пусть рассматриваемый случайный вектор ξ принимает с положительными вероятностями p_i значения

$$X_i = (x_i', \ldots, x_i^{(s)}) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Квадрат модуля характеристической функции дискретного распределения равен

$$|f(t_1, \ldots, t_s)|^2 = \left|\sum_{j=1}^{\infty} e^{i(t_1 x'_j + \ldots + t_s x_j^s)} p_i\right|^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j \cos(t_1 x_j' + \ldots + t_s x_j^s) + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sin(t_1 x_j' + \ldots t_s x_j^s)\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_j^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j \cos((x_i' - x_j')\, t_1 + \ldots + (x_i^s - x_j^s)\, t_s).$$

Отсюда видим, что $|f(t_1, \ldots, t_s)|$ такого распределения равен единице тогда и только тогда, когда величины $t_1, \ldots, t_s$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (x_1' - x_2')\, t_1 + \ldots + (x_1^s - x_2^s)\, t_s = 2\pi e_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_j' - x_j')\, t_1 + \ldots + (x_i^s - x_j^s)\, t_s = 2\pi e_{ij}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

где e_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ — произвольные целые.

Рассмотрим систему n уравнений, выделенную из системы [1] и эквивалентную ей

$$\begin{cases} x_{11} t_1 + \ldots + x_{1s} t_s = 2\pi e_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} t_1 + \ldots + x_{ns} t_s = 2\pi e_n. \end{cases}$$

Будем считать, что $n \geqslant s$, так как при $n < s$ распределение выродилось бы в распределение в пространстве с числом измерений, равным n (действительно, в этом случае модуль характеристической функции обращается в единицу в пространстве $s-n$ измерений, а, значит, и в $s-n$ парах несоизмеримых точек с координатами, образующими матрицу ранга $s-n$, и наше утверждение следует из следствия леммы 2 §3).

Замечание. Если модуль характеристической функции $f(t_1, \ldots, t_s)$ равен единице в точке $(t_1^0, \ldots, t_s^0)$, то он равен единице во всех точках вида

$$\text{а)} \quad (t_1^0 + 2\pi k_1, \ldots, t_s^0 + 2\pi k_s),$$

где $k_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)$ — произвольные целые,

$$\text{б)} \quad (kt_1^0, kt_2^0, \ldots, kt_s^0),$$

где k — произвольное целое.

Утверждение а) следует непосредственно из вида уравнений [2]. Утверждение б) не менее очевидно: если $|f(T_0)| = 1$, то

$$e^{i\theta} f(t_1^0, \ldots, t_s^0) = \int\limits_{R_s} e^{i(\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s)} \, dP(x_1, \ldots, x_s).$$

Отсюда следует, что dP отлично от нуля только на гиперповерхностях вида

$$\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s = 2\pi k_j \ (j = 1, 2, \ldots), \qquad [3]$$

где $k_j \ (j = 1, 2, \ldots)$ — произвольное целое. Далее имеем

$$e^{ik\theta} f(kt_1^0, \ldots, kt_s^0) = \int\limits_{R_s} e^{ik(\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s)} \, dP(X) =$$

$$= \sum_j \int\limits_{\theta + t_1^0 x_1 + \ldots + t_s^0 x_s = 2\pi k_j} e^{ik \cdot 2\pi k_j} \, dP(X) = \int\limits_{R_s} dP(X) = 1,$$

так как интегрирование по всему пространству R_s сводится к интегрированию по гиперплоскостям [3].

Пусть квадратные унимодулярные матрицы: A (порядка n) и B (порядка s) приводят матрицу (x_{ij}) $(i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, s)$ к каноническому виду

$$A(x_{ij}) B = E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_s & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s| = d.$$

Примем для удобства $\tau_i = \frac{t_i}{2\pi}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Из [2] имеем

$$(x_{ij}) \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}. \qquad [4]$$

Произведем замену по формуле

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \vdots \\ \Upsilon_s \end{pmatrix}. \qquad [5]$$

Умножим [4] слева на A. Имеем

$$A\,(x_{ij})\,B \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \vdots \\ \Upsilon_s \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \vdots \\ \Upsilon_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon_1 \Upsilon_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} e_i \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_s \Upsilon_s = \sum\limits_{1}^{n} a_{si} e_i \\ 0 = \sum\limits_{1}^{n} a_{s+1,i} e_i \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \sum\limits_{1}^{n} a_{ni} e_i \end{array}\right\} \qquad [6]$$

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{1}^{n} a_{1i} e_i = 0 \\ \dots\dots \\ \sum\limits_{1}^{n} a_{s-1,i} e_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si} e_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{s+1,i} e_i = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{1}^{n} a_{ni} e_i = 0 \end{array}\right\} \qquad [7]$$

Так как матрица A унимодулярна, то система [7] разрешима в целых числах. Взяв в качестве $e_1, \ldots, e_n$ в уравнении [6] это решение, получим значения для $\Upsilon_i\,(i=1, \ldots, s)$,

$$\Upsilon_1 = 0, \ldots, \Upsilon_{s-1} = 0, \ \Upsilon_s = \frac{1}{\varepsilon_s}$$

или, переходя к переменным $\tau_1, \ldots, \tau_s$, а затем к $t_1, \ldots, t_s$, получаем

$$t_1^0 = 2\pi \frac{b_{1s}}{\varepsilon_s}, \ldots, t_s^0 = 2\pi \frac{b_{ss}}{\varepsilon_s},$$

в которой $|f(t_1^0, \ldots, t_s^0)| = 1$. Пусть $d > 1$. Тогда $\varepsilon_s > 1$. Так как матрица B унимодулярна, то, по крайней мере, одно из чисел b_{is} $(i = 1, \ldots, s)$ несоизмеримо с ε_s. Уменьшая числа $t_1^0, \ldots, t_s^0$ на кратные 2π так, чтобы $|t_i'| < 2\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, получаем точку, в которой, согласно сделанному замечанию, модуль характеристической функции обращается в единицу.

С другой стороны, если $d = 1$, то соотношения [5] и [6] показывают, что система [2] разрешима только в целых числах. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Из леммы 1 следует, что точками, в которых модуль характеристической функции d-решетчатого распределения обращается в единицу, являются точки с координатами вида

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\pi \frac{b_{11}}{\varepsilon_1} \sum_1^n a_{1i} e_1 + \ldots + 2\pi \frac{b_{1s}}{\varepsilon_s} \sum_1^n a_{si} e_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_s &= 2\pi \frac{b_{s1}}{\varepsilon_1} \sum_1^n a_{1i} e_1 + \ldots + 2\pi \frac{b_{ss}}{\varepsilon_s} \sum_{i=1}^n a_{si} e_i, \end{aligned} \qquad [8]$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — произвольные целые. Отсюда непосредственно выводим, что эти точки лежат на решетке масштаба $\frac{2\pi}{d}$. Очевидно, что каковы бы ни были s точек вида [8], определитель

$$|t_{ij}| = \frac{(2\pi)^s k}{d},$$

где k — произвольное целое. В то же время, выбирая в качестве $e_1, \ldots, e_n$ решения s систем

$$1) \quad \sum_{i=1}^n a_{1i} e_1 = 1; \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i = 0, \; j \neq 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s) \quad \sum_{i=1}^n a_{si} e_i = 1, \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i = 0; \; j \neq s,$$

что возможно ввиду унимодулярности матрицы A, получим s точек, для которых

$$|t_{ij}| = \begin{vmatrix} 2\pi \frac{b_{11}}{\varepsilon_1} \ldots 2\pi \frac{b_{s1}}{\varepsilon_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2\pi \frac{b_{1s}}{\varepsilon_s} \ldots 2\pi \frac{b_{ss}}{\varepsilon_s} \end{vmatrix} = \frac{(2\pi)^s}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s} |b_{ij}| = \frac{(2\pi)^s}{d}$$

Необходимость условий доказана.

Достаточность. Обозначим через

$$T_1 = (t_1', \ldots, t_s'), \ldots, T_s = (t_1^s, \ldots, t_s^s);\ |t_i^j| = \frac{(2\pi)^s}{d}$$

точки, в которых модуль характеристической функции обращается в единицу. Тогда имеем s соотношений

$$e^{i\theta_j} f(t_1^i, \ldots, t_s^i) = f(0, \ldots, 0) = 1;\ (j = 1, 2, \ldots, s)$$

или

$$\int\limits_{R_s} e^{i(\theta_j + t_1^j x_1 + \ldots + t_s^j x_s)} P(dX) = 1,\ (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда выводим, что dP может отличаться от нуля только в точках, координаты которых являются решением системы

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 - t_1' x_1 + \ldots + t_s' x_s = 2\pi k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_s + t_1^s x_1 + \ldots + t_s^s x_s = 2\pi k_s \end{array}\right\}, \qquad [9]$$

где $k_1, \ldots, k_s$ — произвольные целые. Перенесем начало в точку, определяемую из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 + t_1' x_1 + \ldots + t_s' x_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_s + t_1^s x_1 + \ldots + t_s^s x_s = 0 \end{array}\right\}$$

и положим, что $\tau_j = \frac{t_l}{2\pi}$. Система [9] примет вид

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1' x_1 + \ldots + \tau_s' x_s = k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_1^s x_1 + \ldots + \tau_s' x_s = k_s \end{array}\right\},\ |\tau_l^j| = \frac{1}{d}. \qquad [10]$$

Решения системы [10] имеют вид

$$x_1 = \sum_{l=1}^{s} k_l M_{l1} d, \ldots, x_s = \sum_{l=1}^{s} k_l M_{ls} d, \qquad [11]$$

где M_{ij} — минор элемента τ_{ij} матрицы (τ_{ij}). Таким образом, случайный вектор с рассматриваемой характеристической функцией принимает значения с положительными вероятностями только в точках с координатами вида [11]. Определители порядка s, составленные из разностей координат таких точек, кратны d. Действительно, обозначив через e_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, s)$ соответственные разности чисел $k_i^{n_1} - k_i^{n_2}$, имеем

$$\left|\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{s} e_{1i} M_{i1} d \ldots \sum_{i=1}^{s} e_{si} M_{i1} d \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{s} e_{1i} M_{is} d \ldots \sum_{i=1}^{s} e_{si} M_{is} d \end{array}\right| =$$

$$= d^s \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots i_s} \omega \left|\begin{array}{c} e_{1i_1} M_{11} \ldots e_{s i_s} M_{s1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{1i_1} M_{1s} \ldots e_{s i_s} M_{ss} \end{array}\right| =$$

$$= d^s \sum_{i_1 \neq \ldots i_s} \omega e_{1i_1} \ldots e_{si_s} \left|\begin{array}{c} M_{11} \ldots M_{s1} \\ \cdots\cdots \\ M_{1s} \ldots M_{ss} \end{array}\right| = \frac{d^s \sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_s} \omega e_{1i_1} \ldots e_{si_s}}{d^{s-1}} =$$

$$= d\beta, (\omega = \pm 1).$$

С другой стороны, из доказательства необходимости следует, что общий наибольший делитель таких определителей равен d. Действительно, из обратного предположения следует существование совокупности s точек, расположенных на решетке масштаба, меньшего $\frac{2\pi}{d}$, в которых модуль характеристической функции обращается в единицу. Но тогда в силу сделанного при доказательстве леммы 1 замечания внутри каждого симплекса объема $\frac{(2\pi)^s}{s!\,d}$ с вершинами в точках, расположенных на решетке масштаба $\frac{2\pi}{d}$, найдутся такие точки, что противоречит исходному предположению.

§ 6. МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных s-мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_s^{(n)}), \qquad [1]$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения. Обозначим через $\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_s)$ вероятность того, что

$$\xi_k^{(n)} = x_k, \ (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Очевидно, что компоненты вектора $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi^{(i)}$ могут принимать также только целочисленные значения. Пусть $P_n(z) = P(z_1, \ldots, z_n)$ — вероятность того, что компоненты вектора ζ_n примут значения

$$\zeta_k^{(n)} = z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Обозначим

$$x_i = \frac{z_i - na_i^{(n)}}{B_n},$$

где $A_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)})$ — некоторые постоянные векторы, а B_n — положительные постоянные и через $p(x; H; \alpha, \gamma)$ — плотность устойчивого распределения $\Phi(M)$ с характеристической функцией, определяемой формулой 3 §3. Относительно решетчатых распределений имеет место следующее предложение.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы для одинаково распределенных решетчатых взаимно независимых случайных векторов последовательности [1] при некотором подборе постоянных векторов $A_n = (a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)})$ и положительных постоянных B_n равномерно относительно z_i ($i = 1, 2, \ldots, s; -\infty < z_i < \infty$) имело место соотношение

$$B_n^s P_n(z) - p(x; H; \alpha, \gamma) \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad [2]$$

необходимо и достаточно, чтобы

1. распределение $P(M)$ величин $\xi^{(n)}$ — принадлежало области притяжения устойчивого распределения $\Phi(M)$ с плотностью $p(x; H; \alpha, \gamma)$.

2. распределение величин $\xi^{(n)}$ было однорешетчатым.

Второе условие равносильно таким эквивалентным между собою условиям:

(s) Общий наибольший делитель объемов s-мерных симплексов, все $s+1$ вершины которых лежат в целочисленных точках с $P(X) > 0$ равен $\frac{1}{s!}$.

(s') Параллелепипедальная решетка, порожденная всеми векторами, $X = X' - X''$, для которых $P(X') > 0$, $P(X'') > 0$, совпадает с решеткой всех целочисленных точек s-мерного пространства.

Доказательство. Обозначим через

$$f(T) = Me^{i\sum_{\nu=1}^{s} t_\nu \xi_\nu} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_s=-\infty}^{\infty} e^{i(TX)} P(X)$$

характеристическую функцию вектора $\xi^{(n)}$. Тогда характеристическая функция вектора-суммы $\zeta^{(n)}$ будет равна

$$f^n(T) = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(TZ)} P_n(z).$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{i(TZ)}$ и проинтегрируем по $t_1, \ldots, t_s$ каждый раз в пределах от $-\pi$ до π. Тогда получим

$$(2\pi)^s P_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f^n(T)\, e^{-i(TZ)}\, dt_1 \ldots dt_s.$$

В силу того, что

$$z_i = x_i B_n + n a_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

имеем

$$(2\pi)^s P_n (B_n X + n A_n) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i B_n (TX)} e^{-in (A_n T)} f^n (T) \, dt_1 \ldots dt_s .$$

Обозначив

$$\overline{f}(T) = e^{-i (A_n T)} f(T),$$

имеем

$$(2\pi)^s P_n (B_n X + n A_n) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i B_n (TX)} \overline{f}^n (T) \, dt_1 \ldots dt_s .$$

Произведем замену переменных, положив, что

$$Y_i = t_i B_n \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Находим

$$(2\pi)^s B^s{}_n P_n (B_n X + n A_n) =$$

$$= \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} \cdots \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-i(XY)} \overline{f}^n \left(\frac{y_1}{B_n}, \ldots, \frac{y_s}{B_n} \right) dy_1 \ldots dy_s .$$

Соотношение, где $\varphi(t_1, \ldots, t_s)$ — характеристическая функция распределения $\Phi(x_1, \ldots, x_s)$,

$$\varphi(T) = \int_{R_s} e^{i(TX)} p(x; H; \alpha, \gamma) \, dx_1 \ldots dx_s ,$$

дает равенство

$$(2\pi)^s p(x; H; \varphi, \gamma) = \int_{R_s} e^{-i(XY)} \varphi(y_1, \ldots, y_s) \, dy_1 \ldots dy_s .$$

Таким образом,

$$R_n = (2\pi)^s [B_n^s P_n(z) - p(x; H; \varphi, \gamma)] =$$

$$= \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} \cdots \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-i(XY)} \overline{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) dy_1 \ldots dy_s - \int_{R_s} e^{i(XY)} \varphi(Y) \, dy_1 \ldots dy_s$$

Нам необходимо показать, что при $n \to \infty$ равномерно в s-мерном интервале $-\infty < z_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, s)$ разность $R_n \to 0$.

С этой целью представим R_n^* в виде суммы таких четырех интегралов.

$$I_1 = \int\limits_{v < A} e^{-i(XY)} \left[\overline{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) - \varphi(Y) \right] dy_1 \ldots dy_s,$$

$$I_2 = \int\limits_{A \leqslant v < \varepsilon B_n} e^{-i(XY)} \overline{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) dy_1 \ldots dy_s,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon B_n < v \leqslant \pi B_n} e^{i(XY)} \overline{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) dy_1 \ldots dy_s,$$

$$I_4 = \int\limits_{v > A} e^{-i(XY)} \varphi(Y) \, dy_1 \ldots dy_s,$$

где A — некоторое постоянное достаточно большое число, которое мы точнее определим позднее и ε — достаточно малое число, y — модуль вектора $Y = (y_1, \ldots, y_s)$.

В силу предположения о принадлежности распределения P к области притяжения распределения Φ и предельной теоремы относительно последовательности характеристических функций равномерно относительно t $(t \leqslant A)$

$$\overline{f}^n \left(\frac{t_1}{B_n}, \ldots, \frac{t_s}{B_n} \right) \underset{n \to \infty}{\to} \varphi(t_1, \ldots, t_s)$$

для произвольного постоянного числа A. Отсюда при $n \to \infty$ равномерно относительно z $I_1 \to 0$.

Из леммы 1 §3 в силу условия [2] вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое C_0, что при всех $t < \varepsilon$ в области $(\varepsilon \leqslant t < 2\pi - \varepsilon)$

$$|f(t_1, \ldots, t_s)| \leqslant e^{-C_0}$$

Отсюда вытекает, что при произвольном $\varepsilon > 0$ $I_3 \to 0$.

Выбором достаточно большого A можно I_4 сделать как угодно малым.

Далее имеем

$$|I_2| \leqslant \sum_{m=0}^{k} \int\limits_{2^m A < t < 2^{m+1} A} \left| \overline{f}_1 \left(\frac{t}{B_n}, \omega_1, \ldots, \omega_{s-1} \right) \right|^n \cdot t \cdot dt d\omega_1 \ldots, d\omega_{s-1},$$

где k определяется неравенствами

$$2^k A < \varepsilon B_n \leqslant 2^{k+1} A;$$

а $(t; \omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$ — сферические координаты; $\overline{f}(t_1, \ldots, t_s) = \overline{f}_1(t; \omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$.

Выберем ε таким, чтобы при $|t| \leqslant \varepsilon$.

$$\frac{R\lg \overline{f_1}(\tau;\omega)}{R\lg \overline{f_1}(\frac{1}{2}\tau;\omega)} = 2^{\alpha} + \eta_t$$

и $|\eta_t| < \eta < \frac{2^{\alpha}-1}{2}$. Отсюда и из замечания к теореме 3 §4 вытекает, что

$$\int\limits_{2^m A < t \leqslant 2^{m+1} A} \left| \overline{f_1}\left(\frac{t}{B_n}; \omega_1, \ldots, \omega_{s-1}\right)\right|^n t dt d\omega_1 \ldots d\omega_{s-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A < t \leqslant 2A} e^{nR\lg \overline{f_1}\left(\frac{t}{B_n}, \omega_1, \ldots, \omega_{s-1}\right)\left(2^{\alpha}-\eta\right)_s} 2^{2s} t dt d\omega_1 \ldots d\omega_{s-1}.$$

Поскольку по предположению P принадлежит области притяжения распределения Φ, в интервале $(A, 2A)$

$$n\, R\lg \overline{f_1}\left(\frac{t}{B_n}; \varphi\right) = -C_1(\varphi)t^{\alpha} + o(1).$$

Так как в предположении невырождения распределения Φ, функция $C_1(\varphi)$ не обращается в нуль ни при каком значении своих аргументов, то

$$|I_2| \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{A}^{2A} e^{-C_1(\varphi_0)t^{\alpha}(2^{\alpha}-\eta)^s + o(1)} \cdot t \cdot 2^{2s}\, dt.$$

Таким образом, выбрав достаточно большое A и n, и достаточно малое ε, можем интеграл I_2 сделать сколь угодно малым.

Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условия I очевидна. Легко видеть также, что при нарушении условия 2 асимптотическое представление [2] не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, но и вообще совершенно непригодно для представления вероятностей $P_n(\mathbf{z})$, ибо, очевидно, возможные значения векторной суммы будут иметь систематические пропуски.

ЛИТЕРАТУРА

Гнеденко Б. В.

(1) О сходимости законов распределения сумм независимых слагаемых, ДАН СССР, 18, 1938, 231—234.

(2) К теории областей притяжения устойчивых законов, Уч. зап. Моск. унив. 30, 1939, 61—82.

(3) Предельные законы для сумм независимых случайных величин, Усп. мат. наук, вып. X, 1944, 115—165.

(4) Элементы теории функций распределения случайных векторов, Усп. мат. наук, вып. X, 1944, 230—244.

(5) О локальной предельной теореме теории вероятностей, Усп. мат. наук, т. 3, вып. III, 1948, 187—194.

(6) О локальной предельной теореме для случая бесконечной дисперсии, Труды мат. ин-та АН УССР, т. 12, 1949, 22—30.

(7) О локальной теореме для предельных устойчивых распределений, Укр. мат. журнал, № 4, 1949, 3—15.
(8) Об области притяжения нормального закона, ДАН СССР, т. 71, № 3, 1950, 425—428.

Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н.
(9) Предельные закономерности для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1949.

Деблин В.
(10) Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, Studia Math, t. 9,1940, 71 — 96.

Крамер Г.
(11) Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
(12) Основы математической статистики, Гос. Изд-во ин. литературы, 1949.

Леви П.
(13) Théorie de l'àddition des variables aléatoires, Paries, 1937.

Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С., Рвачева Е. Л.
(14) О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей, ДАН СССР, 60, № 7, 1948; Укр. мат. журнал, № 1, 1949.

Рвачева Е. Л.
(15) Області притягання багатомірних стійких розподілів, ДАН УССР, № 3, 1950.
(16) Багатомірна локальна теорема для граничних стійких розподілів, ДАН УССР, № 3, 1950.
(17) Многомерная локальная теорема для предельных устойчивых распределений, Труды ин-та Математики и механики УзССР, вып. 10, ч. 1.

Хинчин А. Я.
(18) Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938.

Хинчин А. Я. и Леви П.
(19) Sur les lois stables, C. R. Ac. Sc., Paris, 202,1936.

Фельдхейм Э.
(20) E'tude de la stabilité des lois de probabilité, (Thèse de la Faculté des Sciences de Paris), 1937.