Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

А. С. КОВАНЬКО

О КОМПАКТНОСТИ СИСТЕМ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ Б. М. ЛЕВИТАНА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение I. $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется функцией почти-периодической в смысле Б. Левитана („N почти-периодическая")*, если выполняются следующие условия:

1) $f(x)$ — всюду непрерывна.

2) каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, существует относительно плотное множество таких почти-периодов $\tau = \tau(\varepsilon, N)$,** что

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для } |x| < N.$$

3) каковы бы ни были числа ε, ρ и N, числа $-\tau(\varepsilon, N) \pm \tau(\rho N)$ являются также почти-периодами $\tau = \tau(\delta, N)$, где

$$\delta = \varepsilon + \lambda(\rho) \text{ и } \lim_{\rho \to 0} \lambda(\rho) = 0.$$

Определение II. Система „N почти-периодических" функций $\{f(x)\}$ называется системой функций „равностепенно N почти-периодических", если выполняются следующие условия:

Каковы бы ни были числа ε и N:

1) существует такое число $M = M(N) > 0$, что для всех функций $f(x)$ системы выполняется неравенство $|f(x)| < M$ при $|x| < N$;

2) существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, N)$, что все функции $f(x)$ системы удовлетворяют неравенству $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если

$$|h| < \delta \text{ и } |x| < N;$$

3) существует относительно плотное множество почти-периодов $\tau = \tau(\varepsilon, N)$, общих всем функциям $f(x)$ системы.

Если $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon, N)$ и $\tau_2 = \tau_2(\rho, N)$ два таких общих почти-периода, то $\tau_1 \pm \tau_2$ будет также общим почти-периодом функций, имеющих своими определяющими числами $\varepsilon + \lambda(\rho)$ и N, где $\lim_{\rho \to 0} \lambda(\rho) = 0$.

Свойство „N почти-периодических функций". Всякая конечная система „N почти-периодических функций" удовлетворяет определению II, т. е. ее функции всегда „равностепенно N почти-периодические".

---

* Наименование данное Б. Левитаном.

** τ называется $(\varepsilon\, N)$ почти-периодом.

ТЕОРЕМА АРЦЕЛЯ. Необходимое и достаточное условие компактности системы $\{f(x)\}$ непрерывных функций на данном конечном отрезке в смысле равномерной сходимости состоит в выполнении следующих условий: 1) функции системы ограничены в их совокупности; 2) функции системы равностепенно-непрерывны, т. е. к любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать число такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что все функции $\{f(x)\}$ системы удовлетворяют неравенству $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$.

ТЕОРЕМА ХАУСДОРФА. Система функций $\{f(x)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости, если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, можно подобрать другую компактную систему функции (в том же смысле) $\{\varphi(x)\}$, что $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всех значений x на данном интервале.

§ 2. КОМПАКТНОСТЬ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В СМЫСЛЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ

ТЕОРЕМА I. Необходимое и достаточное условие компактности системы непрерывных функций $\{f(x)\}$ $(-\infty < x < +\infty)$ в смысле равномерной сходимости на произвольном конечном интервале состоит в выполнении следующих условий:

Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и $N > 0$:

1) существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, N) > 0$, при котором для любой функции системы $f(x)$ выполняется неравенство $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$ и если $|x| < N$;

2) существует такое число $M = M(N) > 0$, что для любой функции системы $f(x)$ выполняется условие $|f(x)| < M$, если $|x| < N$.

Переходим к доказательству теоремы.

Условия необходимы. Пусть система $\{f(x)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале. Следовательно, она компактна на интервале $(-N, +N)$, как бы велико ни было N. Зафиксировав N, мы можем применить на интервале $(-N, +N)$ теорему Арцеля, в силу которой существуют числа $M = M(N) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon, N) > 0$, при которых для всех функций системы выполняются неравенства $|f(x)| < M$ и $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, когда $|h| < \delta$ и когда $|x| < N$.

А это и есть условие настоящей теоремы. Итак, необходимость условий доказана.

Условия достаточны. Зададим бесконечно возрастающую последовательность чисел:

$$N_1 < N_2 < N_3 < , \ldots , \quad \lim_{i \to \infty} N i = \infty.$$

Возьмем интервал $(-N_1, +N_1)$. Тогда условия нашей теоремы являются условиями Арцеля для этого интервала. Поэтому на основании теоремы Арцеля мы можем из функций нашей системы (и даже из любой ее бесконечной части) построить последовательность $\{f_n^{(1)}(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, которая сходится равномерно на $(-N_1, +N_1)$.

Пусть $\varphi_1(x)$—ее предельная функция определенная на этом интервале. Из данной последовательности выделим подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x)\}$, которая сходилась бы равномерно на интервале $(-N_2, +N_2)$ (к некоторой функции $\varphi_2(x)$, что опять возможно в силу той же теоремы Арцеля. Из данной последовательности мы снова выделяли подпоследовательность и так идем далее. После k шагов мы получим подпоследовательность

$$\{ f_n^{(k)}(x) \} \quad n=1,\ 2,\ 3, \dots),$$

которая будет равномерно сходится на $(-N_k, +N_k)$.

Пусть $\varphi_k(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(k)}(x)$, $|x| < N_k$; по самому построению видно, что $\varphi_k(x) = \varphi_e(x)$ на интервале $(-N_e, +N_e)$, если $e < k$.

Построим теперь такую функцию $\varphi(x)$, что $\varphi(x) = \varphi_k(x)$, когда $|x| < N_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$. $\varphi(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Построим теперь диагональным процессом последовательность $\{ f_n^{(n)}(x) \}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Легко показать, что эта последовательность сходится равномерно на любом конечном интервале $(-N, +N)$ к функции $\varphi(x)$.

Пусть $N_{k-1} < N \leqslant N_k$. Исследуем разность $[\varphi(x) - f_n^{(n)}(x)$ на интервале $(-N_k, +N_k)$. Так как последовательность $\{ f_n^k(x) \}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ сходится равномерно в $(-N_k, +N_k)$, то существует такое число $n_k > k$, что $|\varphi(x) - f_n^{(k)}(x)| < \varepsilon$ при $|x| < N_k$ и при $n > n_k > k$ (ибо $\varphi = \varphi_k$). Но поскольку $\{ f_m^{(n)}(x) \}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ есть подпоследовательность последовательности $f_m^{(k)}(x)$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$, можно найти такой индекс $n + p\ (> n)$, при котором $f_{n+p}^{(k)}(x) = f_n^{(n)}(x)$. Но так как $n + p > n_k$, то подавно $|\varphi(x) - f_n^{(n)}(x)| < \varepsilon$, если $n > n_k$. Но это значит, что последовательность $f_n^{(n)}(x)$ сходится равномерно на интервале $(-N, +N)$.

Итак, достаточность условий доказана.

§ 3. КОМПАКТНОСТЬ СИСТЕМ „N ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ“

ТЕОРЕМА II. Если система „N почти-периодических“ функций $\{ f(x) \}$ удовлетворяет условиям определения II, т. е. это функции „равностепенно N почти-периодические“, то такая система компактна в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале к функциям также „N почти-периодическим“.

Доказательство. Из теоремы I мы уже видели, что условия 1) и 2) в определении II достаточны для компактности системы $\{ f(x) \}$ в смысле равномерной сходимости на любом интервале $(-N, +N)$. Остается показать, что при наличии условия 3) в определении II предельная функция такой последовательности оказывается также „N почти-периодической“.

Рассмотрим последовательность $\{ f_n(x) \}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, составленную из функций системы $\{ f(x) \}$, которая сходится равномерно на любом конечном интервале к функции $f(x)$ и которая, следовательно, всюду непрерывна. Пусть $\tau = \tau(\varepsilon, N)$ есть почти-период общий всем функциям последовательности $\{ f_n(x) \}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Это значит, что $|f_n(x+\tau) - f_n(x)| < \varepsilon \dots (1)$, для любого n и для $|x| < N$. Выберем теперь $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$| f_n(x+\tau) - f(x+\tau) | < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

$$| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

когда $n > n_0$, что всегда возможно в силу равномерной сходимости нашей последовательности на любом конечном интервале.

Из соотношений (1) (2) (3) следует, что

$$| f(x+\tau) - f(x) | \leqslant | f(x+\tau) - f_n(x+\tau) | + | f_n(x+\tau) - f_n(x) | +$$
$$+ | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.$$

Значит, каждый (ε, N) почти-период функции $f_n(x)$ является $(2\varepsilon, N)$ почти-периодом для $f(x)$. И, следовательно, множество последних также относительно плотное. Значит, $f(x)$ удовлетворяет условию 2) определения I.

Пусть затем $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon, N)$ и $\tau_2 = \tau_2(\rho, N)$ — два почти-периода всех функций $f_n(x)$. Тогда, согласно условию 3), определения II, $\tau_1 \pm \tau_2$ будет $(\varepsilon + \lambda(\rho), N)$ почти-периодом общим всем функциям последовательности $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, а потому в силу выше полученного вывода $\tau_1 \pm \tau_1$ будет $(2\varepsilon + 2\lambda(\rho), N)$ почти-периодом $f(x)$ в то время как τ_1 будет $(2\varepsilon, N)$ почти-периодом, а τ_2 будет $(2\rho, N)$ почти-периодом для $f(x)$, откуда видно, что $f(x)$ удовлетворяет 3) условию определения I. Значит, $f(x)$ подходит под определение I как функция „N почти-периодическая".

Итак теорема доказана.

Легко проверить, что условия теоремы являются только достаточными для „N почти-переодичности" $f(x)$. В самом деле, рассмотрим последовательность $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Это функции всюду непрерывные и периодические, следовательно, „N почти-переодические". На любом конечном интервале $(-N, +N)$ — $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x) \equiv 0$, следовательно, к функции „N почти-периодической". Тем не менее, функции системы $f_n(x)$ не обладают общим относительно плотным множеством почти-периодов, что вытекает из того факта, что для всякого $0 < \varepsilon < 1$ масштаб относительной плотности почти-периодов функций $f_n(x)$ неограниченно возрастает с возрастанием n.

§ 4. „КВАЗИКОМПАКТНОСТЬ" СМЕЩЕНИЙ „N ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ" ФУНКЦИИ

ЛЕММА. Если $f(x)$ есть „N почти-периодическая" функция, то всякая система $\{f(x+k)\}$ ограниченных смещений компактна в смысле равномерной сходимости к „N почти-периодической" функции на любом конечном интервале.

Примечание. Смещения ограничены, если существует такое постоянное k_0, при котором все k удовлетворяют условию $|k| < k_0$.

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из того факта, что система $\{f(x+k)\}$ удовлетворяет всем требованиям определения II (§ 1), а потому в силу теоремы II (§ 3) она компактна.

Определение III. Система смещений $\{f(x+k)\}$ данной функции $f(x)$ называется относительно плотной, если множество всех чисел k относительно плотное.

Определение IV. Относительно плотная система смещений данной непрерывной функции называется „квазикомпактной", если из любой ее относительно плотной части можно выделить последовательность, которая сходится равномерно на любом конечном интервале.

ТЕОРЕМА III. Относительно плотная система смещений „N почти-периодической" функции „квазикомпактна" в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале.

Доказательство. Пусть $L > 0$ есть масштаб относительной плотности чисел k смещений $\{f(x+k)\}$ данной „N почти-периодической" функции.

Выберем числа ε и $N > L$. Тогда в любом интервале длины N будет содержаться хотя бы одно число k, взятое из нашей системы смещений.

Пусть τ_i $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ — какая-либо относительно плотная система (ε, N) почти-периодов функции $f(x)$. Построим всевозможные интервалы вида: $\left(\tau_i - \frac{N}{2}, \tau_i + \frac{N}{2}\right)$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ (они могут оказаться пересекающимися). В каждый такой интервал попадает хотя бы одно число k, как это было отмечено выше. Отметим в каждом таком интервале $\left(\tau_i - \frac{N}{2}, \tau_i + \frac{N}{2}\right)$ свое число

k_i, $\tau_i - \frac{N}{2} < k_i < \tau_i + \frac{N}{2}$,

откуда $-\frac{N}{2} < k_i - \tau_i < +\frac{N}{2}$.

Выберем теперь x внутри интервала $\left(-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right)$, тогда

$$|f(x+k_i) - f(x+k_i-\tau_i)| < \varepsilon,$$

поскольку τ_i почти-период, а

$$|x+k_i-\tau_i| \leq |x| + |k_i - \tau_i| < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N.$$

Положим для краткости $k_i - \tau_i = \alpha_i$. Тогда последнее неравенство можем переписать так:

$$|f(x+k_i) - f(x+\alpha_i)| < \varepsilon \ldots\ldots (4) \quad \text{при } |x| < \frac{N}{2},$$

но система смещений $\{f(x+\alpha_i)\}$ ограниченная, ибо $|\alpha_i| < \frac{N}{2}$, а потому в силу леммы настоящего параграфа она компактна в смысле равномерной сходимости к „N почти-периодической" функции.

Но тогда в силу теоремы Хаусдорфа и неравенства (4) следует, что последовательность $\{f(x+k_i)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости, при $|x| < \frac{N}{2}$.