Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

I. О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ОДНОГО КЛАССА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Условимся через X, Y обозначать точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного пространства и через $\overset{(n)}{\int\limits_B} f(X)dX$ — n-мерный интеграл от функции $f(X)$ по области B этого пространства.

В одной из работ Хопфа [1] приводится следующая лемма.

ЛЕММА I. Пусть в замкнутой области B n-мерного пространства задана функция $\varphi(X)$, удовлетворяющая условию

$$\varphi(X) \in \operatorname{Lip}\alpha, \; (o < \alpha \leqslant 1) \tag{1}$$

и функция $H(XY)$, которая при $X \neq Y$ непрерывно дифференцируема по X и Y, причем

$$|H(X, Y)| < \frac{A}{|X - Y|^{n-1}}, \; |\operatorname{grad} H(X, Y)| < \frac{A}{|X - Y|^{n}}, \tag{2}$$

где A — абсолютная постоянная и $|Y - X| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$. Тогда для произвольной внутренней точки X_0 области B функция

$$\varphi(X, X_0) = \overset{(n)}{\int\limits_B} [\rho(Y) - \rho(X_0)] H(X, Y) dY, \tag{3}$$

дифференцируема в точке X_0 и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{x=x_0} = \overset{(n)}{\int\limits_B} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_{x=x_0} dY. \tag{4}$$

Целью настоящего пункта является доказательство следующего усиления этой леммы:

Если функция $\rho(X)$, определенная всюду в области B, удовлетворяет соотношениям

$$|\rho(X)| < M, \; \overset{(n)}{\int\limits_B} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} dY < \infty, \tag{5}$$

где $X_0=(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{no})$ — фиксированная внутренняя точка области B, и функция $H(X, Y)$ всюду в B удовлетворяет прежним условиям, то функция (3) тотально дифференцируема в точке X_0, т. е. обладает там полным дифференциалом в смысле Штольца, причем справедливо соотношение (4).

Доказательство. Так как

$$\varphi(X, X_0)-\varphi(X_0, X_0)=\int\limits_B^{(n)}[\rho(Y)-\rho(X_0)][H(X, Y)-H(X_0, Y)]\,dY$$

и интегралы

$$\int\limits_B^{(n)}[\rho(Y)-\rho(X_0)]\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_{X=X_0} dY \tag{6}$$

в силу (2) и (5) существуют, то достаточно показать, что разностное отношение

$$I(X, X_0)=\frac{\int\limits_B^{(n)}\left[\rho(Y)-\rho(X_0)\right]\left[H(X, Y)-H(X_0, Y)-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_{X=X_i}(x_i-x_{i0})\right]dY}{|X-X_0|} \tag{7}$$

стремится к нулю при $X \to X_0$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для $|X-X_0|<\delta$ часть $I_{U_\delta(X_0)}$ выражения (6), связанная с интегрированием по δ-окрестности $U_\delta(X_0)$ точки X_0, удовлетворяет неравенству

$$|I_{U_\delta(X_0)}X, X_0|<\varepsilon.$$

В самом деле, если такое $\delta(\varepsilon)$ найдено, то в силу непрерывной дифференцируемости $H(X, Y)$ при $X \neq Y$ найдется для любого N такое $\delta'=\delta'\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)<\delta$, что для $|X-X_0|<\delta'$ и $|Y-X_0|>\delta$

$$\frac{\left|H(X, Y)-H(X_0, Y)-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_{X=X_0}(x_i-x_{i0})\right|}{|X-X_0|}<\frac{\varepsilon}{N},$$

следовательно,

$$|I_{B-U_\delta(X_0)}(X_1X_0)|<\frac{\varepsilon}{N}\int\limits_B^{(n)}|\rho(Y)-\rho(X_0)|\,dY<\varepsilon$$

если N взято достаточно большим. Так как интегралы (6) существуют и от X_0 не зависят, то все сводится к доказательству существования такой окрестности $U_\delta(X_0)$, что для всех $|X-X_0|<\delta$

$$\left|\int\limits_{U_\delta(X_0)}^{(n)}[\rho(Y)-\rho(X_0)]\frac{H(X, Y)-H(X_0, Y)}{|X-X_0|}\right|<\varepsilon \tag{8}$$

Подберем такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы

$$\int\limits_{U^{2\delta}(X_0)}^{(n)} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} \delta Y < \varepsilon^n \tag{9}$$

и, фиксируя точку X, $|X - X_0| = h < \delta$, оценим сперва часть интеграла (8), взятого по окрестности $U_{2h}(X_0)$. Для $Y \in U_{2h}(X_0)$ имеем $\frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} < 2$, следовательно,

$$\frac{|H(X_0, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} \cdot \frac{|Y - X_0|^{n-1} |H(X_0, Y)|}{|Y - X_0|^n} < \frac{2A}{|Y - X_0|^n},$$

откуда

$$\left| \int\limits_{U_{2h}(X_0)}^{(n)} \left[\rho(Y) - \rho(X_0) \right] \frac{H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < 2A\varepsilon^n. \tag{10}$$

Для оценки

$$\int\limits_{U_{2h}(X_0)}^{(n)} \left[\rho(Y) - \rho(X_0) \right] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY$$

заметим, что для $Y \in U_{\varepsilon h}(X)$ имеем

$$\frac{|H(X, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X|^{n-1} |H(X, Y)|}{|X - X_0| \, |Y - X|^{n-1}} < \frac{A}{h \cdot |Y - X|^{n-1}},$$

откуда

$$\left| \int\limits_{U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} \left[\rho(Y) - \rho(X_0) \right] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < \frac{2MA}{h} \int\limits_{U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} \frac{dY}{|Y - X|^{n-1}} =$$

$$= \frac{2MA}{h} ne_n \int\limits_0^{\varepsilon h} dr = 2MAne_n\varepsilon, \tag{11}$$

где e_n — объем n-мерного шара. Если же $Y \in U_{2h}(X_0) - U_{\varepsilon h}(X)$, то

$$\frac{|Y - X_0|}{|Y - X|} < \frac{h + \varepsilon h}{\varepsilon h} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\frac{|H(X, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} \frac{|Y - X_0|^{n-1}}{|Y - X|^{n-1}} \frac{|Y - X|^{n-1} |H(X, Y)|}{|Y - X_0|^n} < \frac{2^n A}{\varepsilon^{n-1} |Y - X_0|^n},$$

следовательно,

$$\left| \int\limits_{U_{2h}(X_0) - U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} \left[\rho(Y) - \rho(X_0) \right] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < \frac{2^n A}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{U_\delta(X_0)}^{(n)} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} dY < 2^n A\varepsilon. \tag{12}$$

Пусть теперь $Y \in U_\delta(X_0) - U_{2h}(X_0)$.

Тогда

$$\frac{H(X,Y)-H(X_0,Y)}{|X-X_0|} < \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{X=X^*},$$

где производная справа берется в направлении $\overrightarrow{X_0X}$ в некоторой промежуточной точке X^*, зависящей вообще от Y.

Так как

$$\left|\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{X=X^*}\right| \leqslant \left|\operatorname{grad} H(X^*, Y)\right| < \frac{A}{|Y-X^*|^n}$$

и

$$|Y-X_0| < |Y-X^*| + |X^*-X_0| < 2|Y-X^*|,$$

то

$$\frac{|H(X,Y)-H(X_0,Y)|}{|X-X_0|} < \frac{|Y-X_0|^n}{|Y-X^*|^n}\,\frac{A}{|Y-X_0|^n} < \frac{2^nA}{|Y-X_0|^n},$$

следовательно,

$$\left|\overset{(n)}{\int\limits_{U_\delta(X)-U_{2h}(X_0)}}\left[\rho(Y)-\rho(X_0)\right]\frac{H(X,Y)-H(X_0,Y)}{|X-X_0|}\,dY\right| < 2^nA\varepsilon^n \tag{13}$$

Из оценок (10)—(13) следует, что

$$\left|\overset{(n)}{\int\limits_{U_\delta(X_0)}}\left[\rho(Y)-\rho(X_0)\right]\frac{H(X,Y)-H(X_0,Y)}{|X-X_0|}\,dY\right| < \varepsilon\,(2A\varepsilon^{n-1}+$$

$$+\,2MAne_n + 2^nA + 2^nA\varepsilon^{n-1}),$$

откуда для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и достаточно большого N при $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{N}$ имеем

$$\left|\overset{(n)}{\int\limits_{U_\delta(X_0)}}\left[\rho(Y)-\rho(X_0)\right]\frac{H(X,Y)-H(X_0,Y)}{|X-X_0|}\,dY\right| < \varepsilon_0, \tag{14}$$

что завершает доказательство.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К КВАЗИКОНФОРМНЫМ ОТОБРАЖЕНИЯМ С ДВУМЯ ПАРАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

В работе Б. В. Шабата [2] доказывается следующая теорема:

Произвольное квазиконформное отображение $w=f(z)=u+iv$ области D с характеристиками $(p\Theta; p_1\Theta_1)_z \in \mathrm{Lip}\,\delta (0<\delta\leqslant 1)$ обладает внутри D частными производными u_x, u_y, v_x, v_y, удовлетворяющими условию $\mathrm{Lip}\,\delta$, если $\delta<1$, и условию $\mathrm{Lip}\,\delta'$, где δ' сколь угодно близко к 1, если $\delta=1$.

Нашей целью является доказательство дифференцируемости u, v при условии, что характеристики $(\alpha\beta\gamma; \alpha_1\beta_1\gamma_1)_z$,

$$\alpha = p\cos^2\Theta + \frac{1}{p}\sin^2\Theta, \beta = \left(p - \frac{1}{p}\right)\cos\Theta\,\sin^2\Theta, \gamma = p\,\sin^2\Theta + \frac{1}{p}\cos^2\Theta \quad (1)$$

(соответственно определяются α_1, β_1, γ_1,) непрерывны в D и удовлетворяют интегральному условию Липшица, т. е. имеют ограниченные внутри интегралы

$$I^{\alpha}(z_a) = \iint\limits_D \frac{|\alpha(z) - \alpha(z_0)|}{|z - z_0|^2}\, d\sigma_z, \ldots, \; I_{\gamma_1}(z_0) = \iint\limits_D \frac{|\gamma_1(z) - \gamma_1(z_0)|}{|z - z_0|^2}\, d\sigma_z. \quad (2)$$

Для этого заметим, что доказательство теоремы Шабата опирается у него на одну лемму о растяжении, утверждающую в условиях его теоремы равномерную ограниченность внутри D частных производных u_x, u_y, v_x, v_y, которые заведомо существуют почти всюду в D, и на приведенную выше лемму Хопфа, позволяющую тогда из интегрального представления квазиконформного отображения сделать заключение о его непрерывной дифференцируемости. Но доказательство леммы о растяжении полностью приходит при условии ограниченности интегралов (2), равно как и лемма Хопфа, в которой нужно положить $n = 2$ и вместо $\rho(X)$ брать соответственно $\alpha(z)$, $\beta(z), \ldots$ и т. д., откуда следует дифференцируемость u, v при указанных более общих условиях.

Изменяя доказательство леммы Шабата о растяжении, можно ее еще несколько усилить и соответственно получить более сильное утверждение о дифференцируемости u, v. Сейчас мы это рассмотрим. Начнем с двух лемм.

ЛЕММА 1. Пусть в области D задано непрерывное распределение характеристик $\alpha\,\beta\,\gamma$, для которых интегралы (2) ограничены внутри D. Пусть $t = l(z, z_0)$ — аффинное преобразование с характеристиками $\alpha_0 = \alpha(z_0)$, $\beta_0 = \beta(z_0)$ и $\gamma_0 = \gamma(z_0)$, где $z_0 \in D$ и $\varsigma = \varphi(t)$ функция, конформно отображающая область $D_t = l(D)$ на круг $|\varsigma| < 1$ так, что $\varphi(t_0) = 0$, где $t_0 = l(z_0, z_0)$. Тогда, если $p(\varsigma, z_0)$, $\Theta(\varsigma, z_0)$ — соответствующие преобразованные характеристики, то интеграл

$$I(z_0) = \iint\limits_{|\varsigma| < 1} \frac{p(\varsigma, z_0) - 1}{|\varsigma|^2}\, d\sigma_\varsigma \quad (3)$$

ограничен внутри D.

Доказательство. При аффинном преобразовании $t = l(z, z_0)$ характеристики $\alpha\,\beta\,\gamma$ преобразуются аффинно с равномерно ограниченными для $z_0 \in D_1$, $\overline{D}_1 \subset D$, коэффициентами. Легко доказать, что

$$|p(z) - p(z_0)| < |\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|,$$

откуда заключаем, что

$$p(\varsigma, z_0) - 1 < \text{const}\,\{|\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|\}, \quad (4)$$

где постоянная зависит вообще от выбора D_1. Точно так же для $z_0 \in D_1$ найдем, что

$$\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta|^2} < \text{const}\ \frac{d\sigma_z}{|z-z_0|^2}, \tag{5}$$

а из (4) и (5) следует равномерная ограниченнось интеграла (3) в D_1 вместе с интегралами (2).

ЛЕММА 2*. Пусть функция $w = f(z)$ отображает кольцо $r < |z| < 1$ на кольцо $\rho < |w| < 1$ квазиконформно с характеристиками $(p\Theta, p_1\Theta_1)_z$. Тогда

$$\left|\ln \frac{\rho}{r}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r<|z|<1} \frac{pp_1 - 1}{|z|^2} d\sigma_z. \tag{6}$$

Доказательство. Перейдем к плоскостям $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{z}$ и $\omega = \tau + ih = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{w}$. Тогда будем иметь дело с квазиконформным отображением $\omega = \varphi(\zeta)$ прямоугольника $R_\zeta : 0 < \xi < M = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, $0 < \eta < 1$ на прямоугольник $R_\omega : 0 < \tau < M^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$, $0 < h < 1$ и (6) примет вид

$$\left|M^* - M\right| \leqslant \iint\limits_{R_\zeta} (pp_1 - 1) d\sigma_\zeta. \tag{7}$$

Площадь R_ω равна M^*, поэтому, если $J(\zeta)$ — якобиан отображения $\omega = \varphi(\zeta)$ и

$$\Lambda(\zeta) = \overline{\lim_{\Delta\zeta \to 0}} \left| \frac{\varphi(\zeta + \Delta\zeta) - \varphi(\zeta)}{\Delta\zeta} \right|,$$

то $J \geqslant \frac{\Lambda^2}{pp_1}$ и

$$M^* = \iint\limits_{R_\zeta} J d\xi d\eta \geqslant \int\limits_0^M d\xi \int\limits_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta = \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^M \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\xi.$$

Так как $\int\limits_0^1 \Lambda d\eta \geqslant 1$, то по неравенству Буняковского

$$\int\limits_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta \cdot \int\limits_0^1 pp_1 d\eta \geqslant \left(\int\limits_0^1 \Lambda d\eta \right)^2 \geqslant 1,$$

поэтому

$$M^* \geqslant \int\limits_0^M \frac{d\xi}{\int\limits_0^1 pp_1 d\eta},$$

* Приводим ее в формулировке П. П. Белинского (см. его статью в этом же сборнике) с некоторым отличием в доказательстве.

следовательно,

$$M - M^* \leqslant \int\limits_0^M \frac{\int\limits_0^1 pp_1 d\eta - 1}{\int\limits_0^1 pp_1 d\eta} d\xi < \iint\limits_{R_\zeta} (pp_1 - 1) d\sigma_\zeta .$$

Аналогично, используя неравенство $\int\limits_0^M \Lambda d\xi \geqslant M^*$, найдем, что

$$M^* \leqslant \iint\limits_{R_\zeta} pp_1 d\sigma_\zeta ,$$

откуда

$$M^* - M \leqslant \iint\limits_{R_\zeta} (pp_1 - 1)\, d\sigma_\zeta$$

и (7) доказано.

ЛЕММА О РАСТЯЖЕНИИ. Пусть функция $w = f(z) = u + iv$ производит квазиконформное отображение области D с непрерывными характеристиками $(\alpha\ \beta\ \gamma;\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)_z$ на область Δ и интегралы (2) ограничены внутри D. Тогда в точках дифференцируемости u, v максимальное растяжение

$$\Lambda_{w/z}(z) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \tag{8}$$

и минимальное растяжение

$$\lambda_{w/z}(z) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \tag{9}$$

в каждой области D_1, $\overline{D}_1 \subset D$ ограничены сверху и снизу положительными постоянными.

Доказательство. Рассмотрим в области D_1, $\overline{D_1} \subset D$ произвольную точку z_0 дифференцируемости u, v и отобразим D и Δ сперва аффинно, с характеристиками $\alpha(z_0)$, $\beta(z_0)$, $\gamma(z_0)$ соответственно $\alpha_1(z_0)$, $\beta_1(z_0)$, $\gamma_1(z_0)$, а затем конформно соответственно на круги $|\zeta| < 1$ и $|\omega| < 1$ так, что $\zeta(z_0) = 0$ и $\omega(w_0) = 0$, где $w_0 = f(z_0)$. Тогда мы получим квазиконформное отображение $\omega(\zeta) = \chi(\zeta, z_0)$, $\omega(0) = 0$ с равномерно ограниченными в D_1 интегралами

$$I(z_0) = \iint\limits_{|\zeta| < 1} \frac{p(\zeta, z_0) - 1}{(\zeta)^2} d\sigma_\zeta, \quad I_1(z_0) = \iint\limits_{|\zeta| < 1} \frac{p_1(\zeta, z_0) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta \tag{10}$$

(ограниченность первого интеграла (10) следует из леммы 1, второго — доказывается аналогично). Кроме того, существует производная $\omega'(0)$.

Рассматривая все указанные отображения, нетрудно получить соотношения

$$\Lambda_{w/z}(z_0) < \text{const}\, |\omega'(0)|, \ \lambda_{w/z}(z_0) > \text{const}\, |\omega'(0)|, \tag{11}$$

где постоянные зависят вообще от D_1. Таким образом, все сводится к оценке $|\omega'(0)|$.

Так как при отображении $\omega(\varsigma)$ бесконечно малый круг $|\varsigma|<r$ переходит в бесконечно-малый круг с центром в $\omega=0$, то образ γ_r окружности $|\varsigma|=r$ можно заключить в кольцо $\rho'\leqslant|\omega|\leqslant\rho''$ так, что $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\rho''}{\rho'}=1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r\to 0}\frac{\rho'}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\rho''}{r}=\lim_{\varsigma\to 0}\left|\frac{\omega(\varsigma)}{\varsigma}\right|=|\omega'(0)|.$$

Заметив это, отобразим конформно двусвязную область, заключенную между $|\omega|=1$ и γ_r, на кольцо $\rho\leqslant|з|\leqslant 1$ в плоскости $з$. Тогда $\rho'\leqslant\rho\leqslant\rho''$, следовательно, $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\rho}{r}=|\omega'(0)|$ и, кроме того, для отображения $з=з(\varsigma, z_0)$ удовлетворяются условия леммы 2. В самом деле, конформное отображение $з(\omega)$ не изменяет характеристик $p(\varsigma, z_0)$ и $p_1(\varsigma, z_0)$ в кольце $r<|\varsigma|<1$, затем

$$pp_1-1<p_1(p-1)+p(p_1-1)<\mathrm{const}[(p-1)+(p_1-1)],$$

следовательно,

$$\iint\limits_{r<|\varsigma|<1}\frac{pp_1-1}{|\varsigma|^2}\,d\sigma_\varsigma<\mathrm{const}[I(z_0)+I_1(z_0)]<K, \tag{12}$$

где K зависит от D_1. На основании леммы 2 имеем

$$\left|\ln\frac{\rho}{r}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<|\varsigma|<1}\frac{pp_1-1}{|\varsigma|^2}\,d\sigma_\varsigma,$$

откуда, совершая предельный переход и учитывая (12), получаем

$$|\ln|\omega'(0)||<K_1,$$

следовательно,

$$e^{-K_1}<|\omega'(0)|<e^{K_1} \tag{13}$$

и из (11) следует лемма о растяжении.

На основании всего изложенного, приходим к следующей теореме.

Пусть функция $f(z)=u+iv$ производит квазиконформное отображение области D с непрерывными характеристиками $(\alpha\beta\gamma;\ \alpha_1\beta_1\gamma_1)_z$ на область Δ. Тогда, если интегралы (2) ограничены внутри D, то функции u, v дифференцируемы в D и якобиан J внутри D ограничен сверху и снизу положительными постоянными.

Примечание. Заметим, что в точках $z_0\in D$ равномерной сходимости интегралов (2) можно утверждать непрерывность частных производных u_x, u_y, v_x, v_y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopf E. Über den funktionalen, insbesondere den analitischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr., 34, 1931, 194—232.

1. Шабат Б. В. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных. Матем. сб. 17(59), № 2, 1945, 193—210.