Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

П. П. БЕЛИНСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ

ЛЕММА 1. Пусть кольцо $r \leqslant |z| \leqslant 1$ отображается квазиконформно на кольцо $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \ln \frac{r}{\rho} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r \leqslant |z| \leqslant 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z, \tag{1}$$

где $d\sigma_z$ — элемент площади плоскости z.

Доказательство: Проведем в кольце $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$ разрез по радиусу от точки $w = \rho$ до точки $w = 1$. Ему в кольце $r \leqslant |z| \leqslant 1$ будет соответствовать некоторый разрез, соединяющий граничные окружности кольца. Переходя к плоскостям логарифмов $\zeta = \ln z$ и $\omega = \ln w$, $\zeta = x + iy$, $\omega = u + iv$, мы получим квазиконформное отображение криволинейного четырехугольника плоскости ζ на прямоугольник плоскости ω (рис. 1). Проведем в прямоугольнике ω вертикальную прямую с абсциссой u. Ей в плоскости ζ соответствует некоторая кривая Γ_u, концы которой сдвинуты друг относительно друга на $2\pi i$. Следовательно, обозначая через $L(u)$, длину Γ_u, будем иметь

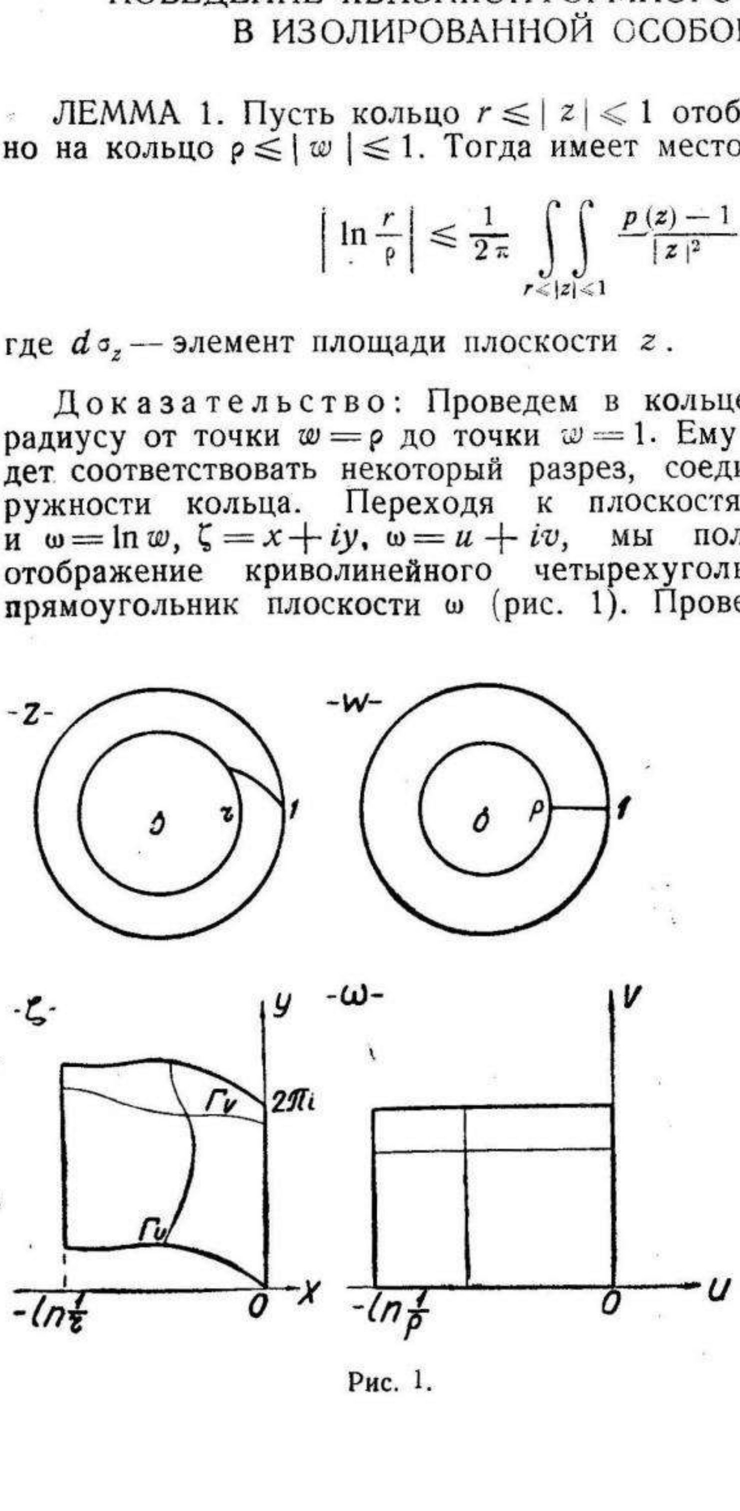

Рис. 1.

$$2\pi \leqslant L(u) = \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right| dv.$$

Возводя в квадрат, применяя неравенство Буняковского и замечая, что $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right|^2 \leqslant$ $\leqslant \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)$, получим

$$4\pi^2 \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right| dv \right)^2 \leqslant 2\pi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right|^2 dv \leqslant 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)\, dv$$

или

$$2\pi \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)\, dv.$$

Интегрируя полученное неравенство по u в пределах от $-\ln\frac{1}{\rho}$ до 0, получим

$$2\pi \ln\frac{1}{\rho} \leqslant \int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)\, du dv = \iint_{\zeta} p(\zeta)\, dx dy =$$

$$= \iint_{r \leqslant |z| \leqslant 1} \frac{p(z)}{|z|^2}\, d\sigma_z .$$

Вычитая из обеих сторон последнего неравенства равенство

$$2\pi \ln\frac{1}{r} = \iint_{r \leqslant |z| \leqslant 1} \frac{d\sigma_z}{|z|^2}$$ и деля на 2π, получаем

$$\ln\frac{r}{\rho} \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leqslant |z| \leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z. \tag{2}$$

Аналогично, проводя в плоскости ω горизонтальные сечения прямоугольника с ординатой v, мы получим в плоскости ζ прообраз этого сечения — кривую Γ_v с длиной $L(v)$. Имеем

$$\ln\frac{1}{r} \leqslant L(v) = \int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right| du ,$$

откуда

$$\left(\ln\frac{1}{r} \right)^2 \leqslant \left(\int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right| du \right)^2 \leqslant \ln\frac{1}{\rho} \int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right|^2 du \leqslant \ln\frac{1}{\rho} \int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)\, du .$$

Интегрируя полученное неравенство по v в пределах прямоугольника, получим

$$2\pi \left(\ln\frac{1}{r} \right)^2 \leqslant \ln\frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \int_{-\ln\frac{1}{\rho}}^{0} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} d(\omega)\, du dv = \ln\frac{1}{\rho} \iint_{r \leqslant |z| \leqslant 1} \frac{p(z)}{|z|^2} d\sigma_z .$$

Вычитая из обеих частей $2\pi \ln\frac{1}{r} \ln\frac{1}{\rho} = \ln\frac{1}{\rho} \iint\limits_{r<|z|<1} \frac{d\sigma_z}{|z|^2}$,

получим

$$2\pi \ln\frac{1}{r}\left(\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{\rho}\right) \leqslant \ln\frac{1}{\rho} \iint\limits_{r\leqslant|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z$$

или

$$\ln\frac{\rho}{r} \leqslant \frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln\frac{1}{r}} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r\leqslant|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z . \tag{3}$$

При $r > \rho$ доказательство леммы следует из (2), а при $r < \rho$ — из (3), так как в этом случае $\dfrac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln\frac{1}{r}} < 1$.

Введем теперь следующие обозначения.

Пусть двусвязная область D плоскости z, ограниченная континуумом, содержащим точку $z=0$, и окружностью $|z|=1$, отображается гомеоморфно на кольцо $\rho \leqslant |w| \leqslant 1$, причем $w(1)=1$.

Назовем угловым смещением точки величину $\delta(w) = \delta(z) = \arg w - \arg z$, причем берется та ветвь аргумента, которая получается при непрерывном переходе от точки $z=1$ и соответственно ее образ в плоскости w, $(\arg 1 = 0)$. Таким образом, определенное угловое смещение очевидно представляет однозначную функцию. Обозначим через $\underline{\delta_i}(\overline{\delta}_i) = \min(\max)|\delta(z)|$, когда точка пробегает внутреннюю границу. Соответственно $\underline{\delta}_e$ и $\overline{\delta}_e$ — для внешней границы.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть двусвязная область D, ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2, лежащими соответственно в кольцах $\frac{r^*}{1+\varepsilon} \leqslant |z| \leqslant r^*(1+\varepsilon)$, $\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant |z| \leqslant 1+\varepsilon$, отображается квазиконформно на кольцо $\rho^* \leqslant |w| \leqslant 1$ и $w(1)=1$. Тогда справедливо неравенство

$$\delta = \underline{\delta_i} - \overline{\delta_e} \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z + \left(1 + \frac{\ln\frac{1}{r^*}}{\ln\frac{1}{\rho^*}}\right) 2\varepsilon . \tag{4}$$

Доказательство. Если $\delta_i \neq 0$, то, очевидно, $\delta(z)$ сохраняет знак на внутренней границе. Пусть для определенности $\delta(z) > 0$. Проведем в кольце $\rho^* \leqslant |w| \leqslant 1$ разрез по спирали $\rho = e^{-\varphi}$. Ему в области D соответствует некоторый разрез, соединяющий границы области. Переходя к плоскостям логарифмов $\zeta = \ln z$ и $\omega = \ln w$, получим квазиконформное отображение криволинейного четырехугольника плоскости ζ на параллелограмм плоскости ω с острым углом, равным $\frac{\pi}{4}$ (рис. 2).

Проведем в параллелограмме сечение по отрезку прямой $v = v_0 - u$. Концы его имеют координаты $(0, v_0)$ и $\left(-\ln\frac{1}{\rho^*},\ v_0 - \ln\frac{1}{\rho^*}\right)$. Этому сечению в плоскости ζ соответствует кривая Γ_{v_0}. Разность между абсциссами концов Γ_{v_0} не менше $\ln\frac{1}{r^*} - 2\varepsilon$, а разность между ординатами не менее, чем на δ больше разности ординат отрезка $v = v_0 - u(\gamma_{v_0})$, т. е. больше $\ln\frac{1}{\rho^*} + \delta$.

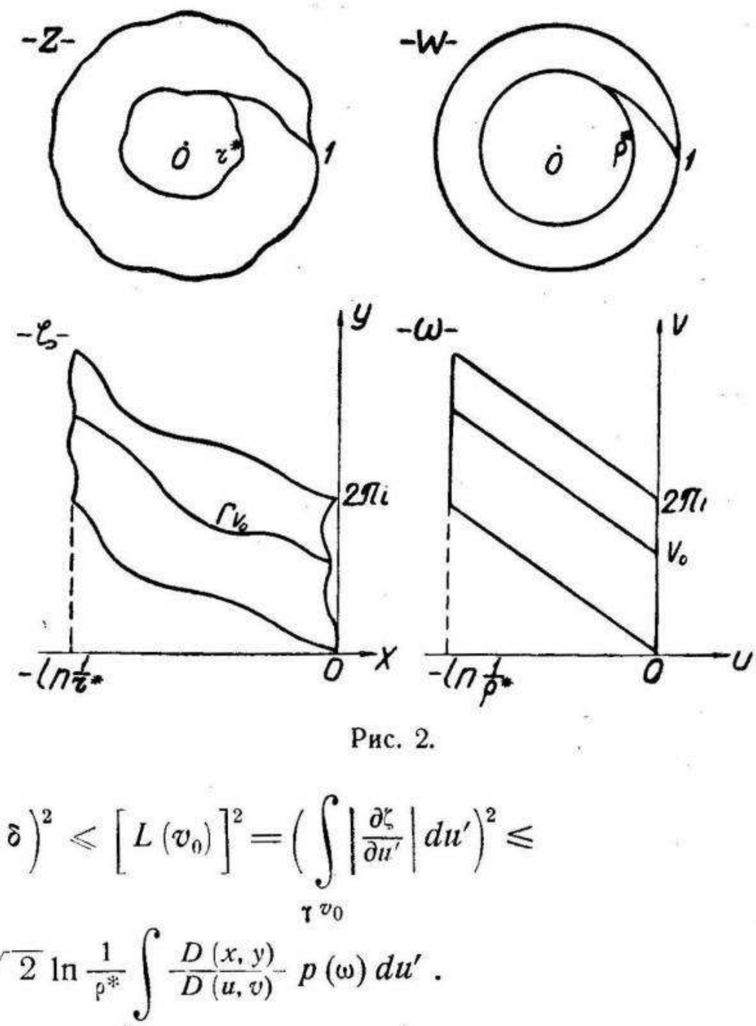

Рис. 2.

Поэтому, обозначая через $L(v_0)$ длину Γ_{v_0}, будем иметь

$$L(v_0) \geqslant \sqrt{\left(\ln\frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln\frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2}.$$

Перейдя в плоскости ω к новой системе координат u' и v', получаемой из старой поворотом осей $-\frac{\pi}{4}$, будем иметь из предыдущего

$$\left(\ln\frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln\frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2 \leqslant \left[L(v_0)\right]^2 = \left(\int\limits_{\gamma_{v_0}} \left|\frac{\partial\zeta}{\partial u'}\right| du'\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\ln\frac{1}{\rho^*}\int\limits_{\gamma_{v_0}} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, p(\omega)\, du'.$$

Интегрируя полученное неравенство по v' в пределах параллелограмма, получим

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left\{\left(\ln\frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln\frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2 \leqslant \sqrt{2}\ln\frac{1}{\rho^*}\int\int \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)\, du'\, dv'\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\ln\frac{1}{\rho^*}\iint\limits_{D} \frac{p(z)}{|z|^2}\, d\sigma_z.$$

Или, деля на $2\pi\sqrt{2}\ln\frac{1}{\rho^*}$ и вычитая неравенство

$$\ln\frac{1}{r^*}+2\varepsilon \geqslant \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{d\sigma_z}{|z|^2},$$

будем иметь

$$\frac{\left(\ln\frac{1}{r^*}-2\varepsilon\right)^2+\left(\ln\frac{1}{\rho^*}+\delta\right)^2}{2\ln\frac{1}{\rho^*}}-\ln\frac{1}{r^*}-2\varepsilon \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{p(z)-1}{|z|^2}\,d\sigma_z.$$

Отсюда, раскрывая скобки и отбрасывая неотрицательный член

$$\frac{\left(\ln\frac{1}{r^*}-\ln\frac{1}{\rho^*}\right)^2+4\varepsilon^2+\delta^2}{2\ln\frac{1}{\rho^*}},$$ получаем

$$\delta-\frac{\ln\frac{1}{r^*}}{\ln\frac{1}{\rho^*}}\cdot 2\varepsilon-2\varepsilon<\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{p(z)-1}{|z|^2}\,d\sigma_z,$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 3. Пусть функция $w=f(z)$ отображает квазиконформно круг $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, причем $w(0)=0$ и $\iint (p(z)-1)\,d\sigma_z\leqslant\varepsilon$. Тогда

$$|z|-\lambda'(\varepsilon)\leqslant|w(z)|\leqslant|z|+\lambda'(\varepsilon), \tag{5}$$

где $\lambda'(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda'(\varepsilon)=0$.

Доказательство. Мы будем опираться на одну теорему Грётша [3], которую мы здесь только сформулируем: при конформном отображении кольца $r^*\leqslant|\zeta|\leqslant 1$ на двусвязную область, ограниченную окружностью $|z|=1$ и континуумом, содержащим точку $z=0$, ближайшее расстояние между границами области достигается тогда и только тогда, когда внутренняя граница области есть отрезок радиуса.

Пусть $r=\varphi(r^*)$ длина радиального разреза экстремальной области теоремы Грётша. Геометрически ясно, что $\varphi(r^*)$ монотонна и непрерывна. Обозначим $\zeta=F(z,r)$ функцию, отображающую круг $|z|\leqslant 1$ с разрезом от 0 до $re^{i\psi}$ на кольцо $r^*\leqslant|\zeta|\leqslant 1$. При каждом r, $\frac{dF}{dz}$ не ограничена в круге с разрезом, ибо на концах разреза $F(z,r)$ ведет себя как $\sqrt{z}$. Но если мы ограничимся теми z, для которых $|\zeta|\geqslant r^*+\delta$, где $\delta=\delta(\varepsilon)$ величина бесконечно малая вместе с ε, которую мы выберем позже, то будем иметь $\max\limits_z\left|\frac{dF}{dz}\right|=M(r,\delta)$. Так как при $r\to 0$ $M(r,\delta)\to 1$ и при $r\to\varphi(1-\delta)$ *

---

* $\varphi(1-\delta)$ — максимальное значение r, при котором множество точек z, по которым мы берем max не пусто.

$$M(r, \delta) \to \max_{|z|=1} \left| \frac{dF(z, \varphi(1-\delta))}{d\sigma} \right|,$$

то для указанных точек z имеем

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| \leqslant \max_{0 \leqslant r \leqslant \varphi(1-\delta)} M(r, \delta) = M(\delta).$$

Прообраз круга $|\zeta| = r^* + \delta$ в отображении $z = F(z, r)$, $r = \varphi(r^*)$ обозначим $\Gamma_{\delta,r}$, а точку пересечения $\Gamma_{\delta,r}$ с продолжением разреза $(0, re^{i\varphi})$ назовем вершиной $\Gamma_{\delta,r}$. Вершина $\Gamma_{\delta,r}$ наиболее удаленная от нуля точка $\Gamma_{\delta,r}$ и при $0 \leqslant r \leqslant \varphi(1-\delta)$ ее расстояние до нуля пробегает все значения от δ до 1.

Приступим теперь к доказательству правой части неравенства (5). Пусть сначала $|z| \geqslant \delta$. Проведем через точку z кривую $\Gamma_{\delta,r}$ так, чтобы ее вершина совпадала бы с z (см. рис. 3), и отобразим круг $|z| \leqslant 1$ с разрезом от 0 до $e^{i\varphi} \cdot r$ функцией $F(z, r)$ на кольцо $r^* \leqslant |\zeta| \leqslant 1$. Здесь $\varphi = \arg z$, а r определяется тем условием, что вершина $\Gamma_{\delta,r}$ проходит через z. Отображая еще двусвязную область D плоскости w, соответствующую кругу $|z| \leqslant 1$ с вырезом по $\Gamma_{\delta,r}$, в отображении $w = f(z)$ конформно на кольцо $\rho^* \leqslant |\omega| \leqslant 1$ будем иметь в силу (1)

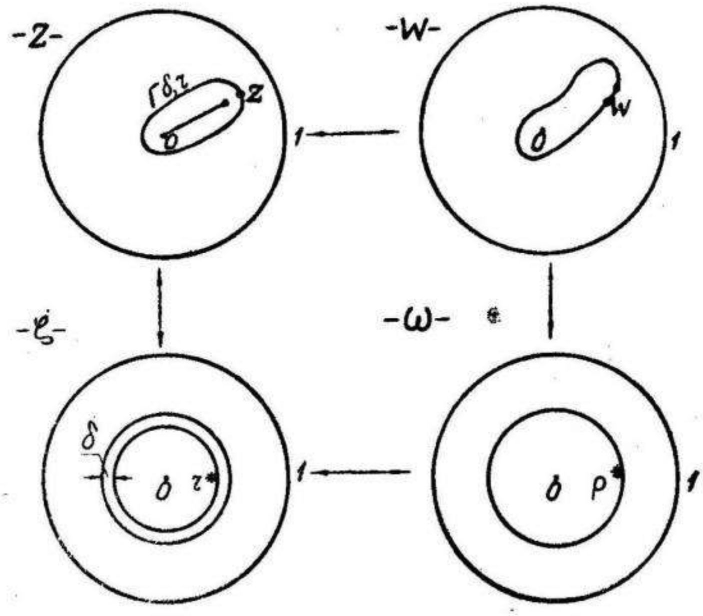

Рис. 3

$$\ln \frac{\rho^*}{r^* + \delta} \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r^*+\delta \leqslant |\zeta| \leqslant 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta \leqslant \frac{1}{2\pi\delta^2} \iint\limits_{r^*+\delta \leqslant |\zeta| \leqslant 1} (p(\zeta) - 1)\, d\sigma_\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta^2} \iint\limits_{\substack{|z| \leqslant 1 \\ z - \text{вне } \Gamma_{\delta,r}}} (p(z) - 1) \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| d\sigma_z \leqslant \frac{M^2(\delta)}{2\pi\delta^2} \cdot \varepsilon = \mu(\delta) \cdot \varepsilon.$$

Выберем теперь закон убывания $\delta = \delta(\varepsilon)$ таким, чтобы $\mu(\delta) \cdot \varepsilon \to 0$, что, очевидно, возможно при любой функции $\mu(\delta)$. Тогда, в силу выбора r, $|z| > r = \varphi(r^*)$. С другой стороны, в силу теоремы Грётша

$$|w| = f|(z)| \leqslant \varphi(\rho^*) \leqslant \varphi\left((r^* + \delta)\, e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon} \right).$$

Отсюда

$$|w(z)| - |z| \leqslant \varphi\left((r^* + \delta)\, e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon} \right) - \varphi(r^*). \qquad (6)$$

Считая $\mu(\delta)\cdot\varepsilon$ настолько малым, что $e^{\mu(\delta)\cdot\varepsilon}<1+2\mu(\delta)\cdot\varepsilon$, оценим разность аргументов функции φ в правой части неравенства (6)

$$(r^*+\delta)e^{\mu(\delta)\cdot\varepsilon}-r^*\leqslant(r^*+\delta)(1+2\mu(\delta)\cdot\varepsilon)-r^*=\delta+$$
$$+2\mu(\delta)\cdot\varepsilon+r^*2\mu(\delta)\cdot\varepsilon\leqslant\delta+4\mu(\delta)\cdot\varepsilon.$$

В силу непрерывности функции φ на замкнутом отрезке $[0,1]$ правая часть (6) является бесконечно малой вместе с $\delta+4\mu(\delta)\cdot\varepsilon$ независимо от r^* и, стало быть, от z (для $|z|\geqslant\delta$). Таким образом, правая часть (5) доказана для $|z|\geqslant\delta$. Для $|z|\leqslant\delta$ имеем в силу гомеоморфности и условия $w(0)=0$

$$|w(z)|\leqslant\max_{|z|=\delta}|w(z)|\leqslant\delta(\varepsilon)+\lambda_1(\varepsilon)=\lambda_2(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lambda_2(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\delta(\varepsilon)+\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lambda(\varepsilon)$, что полностью доказывает правую часть неравенства (5).

При дальнейшем доказательстве мы для простоты выражений будем считать ε бесконечно малым.

Докажем сначала, что для любого $r, 0<r<1$ найдется такая точка z, $|z|=r$, что

$$|w(z)|\geqslant|z|-\sqrt[4]{\varepsilon}=|z|-o(1). \tag{7}$$

Доказывать, очевидно, нужно только для $|z|\geqslant\sqrt[4]{\varepsilon}$. Для этого отобразим образ кольца $r\leqslant|z|\leqslant1$ в плоскости w (область D) на кольцо $\rho\leqslant|\omega|\leqslant1$. В силу (1) и условия $|z|\geqslant\sqrt[4]{\varepsilon}$ имеем

$$\ln\frac{r}{\rho}\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r\leqslant|z|\leqslant1}\frac{p(z)-1}{|z|^2}\,d\sigma_z\leqslant\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}}\iint\limits_{|z|\leqslant1}(p(z)-1)\,d\sigma_z\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi},$$

откуда

$$\rho\geqslant re^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi}}\approx r\left(1-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi}\right)>r-\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Так как модуль области D равен модулю кольца $\rho\leqslant|\omega|\leqslant1$, то в силу принципа двусвязной области внутренняя граница D должна иметь точки, лежащие по разные стороны от окружности $w=\rho$. Иными словами, найдется точка $w(z)$, $|z|=r$, для которой $|w(z)|\geqslant\rho>r-\sqrt[4]{\varepsilon}$, что и доказывает неравенство (7).

Допустим теперь, что левая часть неравенства (5) не верна. Тогда найдется функция $w=f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы со сколь угодно малым $\iint(p(z)-1)\,d\sigma_z$, и такая, что в некоторой точке $\tilde z$, $0<w(\tilde z)\leqslant|\tilde z|-\lambda$. В силу доказанного образ окружности $|z|=|\tilde z|$ не выйдет за пределы окружности $w=(\tilde z)+0(1)$, и на окружности $|z|=\frac{1}{2}|z|$ найдется такая точка z, что $|w(z_1)=|z_1|+0(1)$. Рассматривая отображение в круге $|z|\leqslant|\tilde z|$ и переходя к плоскостям $\zeta=$

$=\frac{z}{|\tilde{z}|}$ и $\omega=\frac{w}{|\tilde{z}|}$ (заметим, что $|\tilde{z}|>\lambda$), мы получим отображение круга $|\zeta|\leqslant 1$ на область G, граница которой находится в круге $|\omega|\leqslant 1+$ $+o(1)$ с граничной точкой $\tilde{\omega}, |\tilde{\omega}|\leqslant \frac{|\tilde{z}|-\lambda}{\tilde{z}}=1-\frac{\lambda}{|\tilde{z}|}\leqslant 1-\lambda$ и внутренней точкой $\omega_1=\omega(\zeta_1), =\frac{1}{2}, |\omega_1|=\frac{1}{2}+o(1)$. Произведем добавочное конформное отображение области G на единичный круг $|t|\leqslant 1$, причем $t(0)=0,\ t(\omega_1)=t_1$.

Тогда величина $|t_1|-|\omega_1|$ будет зависеть от области, однако с точностью до бесконечно малых, зависящих от ε, $|t_1|-|\omega_1|>\eta(\lambda)$*. Или $|t_1|=|t(\zeta_0)|=\frac{1}{2}+\eta(\lambda)+o(1)$. Это, однако, противоречит уже доказанному, ибо для функции $t=t(\zeta)$

$$\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}(p(\zeta)-1)\,d\sigma_з=\frac{1}{|\tilde{z}|^2}\iint\limits_{|z|\leqslant|\tilde{z}|}(p(z)-1)\,d\sigma_z\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\iint\limits_{|z|\leqslant 1}(p(z)-1)\,d\sigma_z\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

и $|t_1|$ не может превышать $|\zeta_1|$ на фиксированную величину.

Таким образом, лемма полностью доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функция $w=f(z)$ отображает квазиконформно круг $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, причем $w(0)=0,\ w(1)=1$ и

$$\iint\limits_{z}(p(z)-1)\,d\sigma_z\leqslant\varepsilon .$$

Тогда

$$|w(\varepsilon)-z|\leqslant\lambda(\varepsilon), \tag{8}$$

где $\lambda(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon)=0$.

Доказательство. Продолжим отображение $w=f(z)$ на круг $|\leqslant 2$, полагая для $1<|z|\leqslant 2$ $f(z)=\frac{1}{\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right)}$ (симметрия относительно единичных окружностей $|z|=1$ и $|w|=1$. Дополненная, таким образом, функция отображает круг $|z|\leqslant 2$ на область D, граница которой в силу (5) заключена в кольце $\frac{1}{\frac{1}{2}+\lambda'(\varepsilon)}\leqslant|w|\leqslant\frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda'(\varepsilon)}$. Произведем преобразования $\zeta=\frac{1}{2}z$ и $\omega_1=\frac{1}{2}w$ и отобразим затем конформно область D_1, получаемую из D в плоскости ω_1 на круг $|\omega|\leqslant$ $\leqslant 1$, $\omega(0)=0$, $\omega'(0)>0$. Тогда, в силу близости области D_1 к единичному кругу, $|\omega_1-\omega|=o(1)$ для $|\omega_1|\leqslant 1$ вместе с $\lambda'(\varepsilon)$**. И так как $|w(z)-z|=2|\omega_1-\zeta|\leqslant 2|\omega_1-\omega|+2|\omega-\zeta|$, то для доказательства леммы достаточно установить ее для функции $\omega(\zeta)$

* Можно показать, что $\min|t_1|-|\omega_1|$ при заданных ограничениях на g достигается в том случае, когда g есть круг с разрезом от $1-\lambda$ до 1 при $\omega=-\frac{1}{2}$.

** Опираясь на одну из лемм, приводимых в статье [4], можно показать, что $|\omega_1-\omega|=O(\lambda'(\varepsilon))$ для $|\omega_1|\leqslant r<1$.

при $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}$. Назовем неэвклидовым расстоянием между точками единичного круга $\rho(\zeta_1, \zeta_2)$ их обычное расстояние, получаемое при линейном преобразовании круга, переводящим одну из точек в начало. Тогда $|\rho(\omega_1, \omega_2) - \rho(\zeta_1, \zeta_2)| \leqslant \lambda'\left(\frac{81}{4}\varepsilon\right)$, где $|\zeta_1| \leqslant \frac{1}{2}$. Чтобы в этом убедиться, нужно преобразовать круги $|\zeta| \leqslant 1$, $|\omega| \leqslant 1$ линейно сами в себя так, чтобы точки ζ_1 и ω_1 перешли бы в начало. Учитывая, что растяжение в круге $|\zeta| \leqslant 1$, $\left|\frac{d\zeta'}{d\zeta}\right| \leqslant 9$, будем иметь

$$\iint\limits_{|\zeta'| \leqslant 1} (p(\zeta') - 1)\, d\sigma_{\zeta'} \leqslant 9 \iint\limits_{|\zeta| \leqslant 1} (p(\zeta) - 1)\, d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant 9 \cdot \frac{9}{4} \iint\limits_{|z| \leqslant 1} (p(z) - 1)\, d\sigma_z \leqslant \frac{81}{4}\varepsilon,$$

откуда, в силу определения $\rho(\zeta_1, \zeta_2)$ и неравенства (5), получаем

$$|\rho(\omega_1, \omega_2) - \rho(\zeta_1, \zeta_2)| \leqslant \lambda'\left(\frac{81}{4} \cdot \varepsilon\right).$$

Утверждение леммы следует из того достаточно очевидного факта, что если расстояние между точками может измениться только на бесконечно малую величину $0(1)$ и, кроме того, фиксированы по крайней мере две „базисные" точки $\omega(0) = 0$, $\omega(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 0(1)$, то все отображение бесконечно близко к тождественному. Мы его более подробно приводить не будем, укажем лишь, что, пользуясь одной леммой Варшавского [4], можно показать, что $\lambda(\varepsilon) \leqslant k\lambda'\left(\frac{81}{4}\varepsilon\right)$. Лемма полностью доказана. Для дальнейшего нам нужна будет.

ЛЕММА 5.* Пусть функция $w = f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение для $0 < |z| \leqslant 1$ и пусть

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{0 < |z| \leqslant r} (p(z) - 1)\, dz = 0.$$

Тогда как прямое, так и обратное отображение будут квазиконформными в точке $z = 0$, причем $p(0) = 1$, то есть бесконечно малый круг переходит в круг с сохранением на нем угловых расстояний.

Доказательство. Покажем, что отображение $w = f(z)$ гомеоморфно в точке $z = 0$. Для этого достаточно, в силу ограниченности $f(z)$, показать, что модуль двусвязной области D, являющейся образом кольца $0 < |z| \leqslant 1$, бесконечен. Заметим, что в силу условий теоремы

$$\lim_{m \to \infty} e^{-2m} \iint\limits_{|z| \leqslant e^{-m}} (p(z) - 1)\, d\sigma_z = 0,$$

---

* Лемма 5 есть обобщение леммы 5 работы М. А. Лаврентьева [1]. Метод доказательства взят из этой работы.

поэтому существует

$$\max_{m=1,2,\dots} \frac{1}{2\pi} e^{-2m} \iint\limits_{|z| \leqslant e^{-m+1}} (p(z)-1)\, d\sigma_z = a.$$

Рассмотрим теперь кольцо $e^{-n} \leqslant |z| \leqslant 1$. Обозначая через $\mu(n)$ модуль его образа в плоскости, будем иметь согласно неравенству (3)

$$n-\mu(n) \leqslant \frac{\mu(n)}{n} \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(p(z)-1)}{|z|^2}\, d\sigma_z = \frac{\mu(n)}{2\pi n} \sum_{m=1}^{n} \iint\limits_{e^{-m} \leqslant |z| \leqslant e^{-m+1}} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2\pi} e^{-2m} \iint\limits_{e^{-m} \leqslant |z| \leqslant e^{-m+1}} (p(z)-1)\, d\sigma_z \leqslant \frac{\mu}{n}\, n \cdot a = \mu(n) \cdot a$$

или

$$\mu(n) \geqslant \frac{1}{1+a} \cdot n.$$

Таким образом, отображение в окрестности нуля непрерывно * и, дополненное по непрерывности, гомеоморфно. Будем для простоты считать $f(0)=0$.

Рассмотрим в плоскости z бесконечно малое кольцо фиксированной ширины, например, кольцо $\frac{\rho}{2} \leqslant |z| \leqslant \rho$, ρ будем считать бесконечно малым. Покажем, что каковы бы ни были точки z_1 и z_2 кольца, имеет место неравенство

$$\left| \frac{z_2}{z_1} - \frac{w_2}{w_1} \right| \leqslant \eta(\rho), \tag{9}$$

где $\eta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Тем самым, очевидно, лемма будет полностью доказана.

Покажем, что каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для достаточно малого ρ, $\left| \frac{z_2}{z_1} - \frac{w_2}{w_1} \right| < \varepsilon$. С этой целью рассмотрим отображение в круге $|z| \leqslant m\rho$, где $m = m(\varepsilon) > 1$ мы определим далее. Рассмотрим вспомогательные плоскости $\zeta = \frac{z}{m\rho}$ и $\omega = F(w)$, где $F(w)$ отображает конформно D_ρ — образ круга $|z| \leqslant m\rho$ на единичный круг, причем точке $\zeta = 1$ соответствует точка $\omega = 1$. Для функции $\omega = \omega(\zeta)$ величина $\iint (p(z)-1)\, d\sigma_z = \frac{1}{(m\rho)^2} \iint\limits_{|z| \leqslant m\rho} (p(z)-1)\, d\sigma_z$ — бесконечно малая вместе с ρ. Поэтому величина $\left| \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{w_2}{w_1} \right|$ — тоже бесконечно малая с ρ,

* Легко показать, что $f(z)$ не только непрерывна в точке $z = 0$, но и удовлетворяет в нуле условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с любым $\alpha < 1$. Доказательство можно провести, опираясь на экстремальные свойства конформных отображений двусвязных областей.

ибо $|\zeta_1| \geqslant \frac{1}{2m}$, а $|\zeta_2 - \omega_2|$ и $|\zeta_1 - \omega_1|$ малы согласно лемме 4. Теперь осталось заметить, $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$, а величина $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{w_2}{w_1}\right|$ может быть сделана сколь угодно мала при достаточно большом $m = m(\varepsilon)$ в силу известных свойств конформных отображений. Лемма полностью доказана. Докажем теперь следующую теорему:

ТЕОРЕМА: Пусть функция $w = f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение для $0 < |z| \leqslant 1$ и пусть

$$\iint\limits_{0<|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z = A < \infty .$$

Тогда существует $\lim\limits_{z\to 0} w = w_0$, и $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w - w_0}{z} = 0, \infty$ *.

Доказательство. Ввиду того, что интеграл $\iint\limits_{0<|z|} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z$ сходится, интеграл $\iint\limits_{0<|z|\leqslant r} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z$ мал вместе с r. Но $\frac{1}{r^2}\iint\limits_{0<|z|\leqslant r} (p(z) - 1)\, d\sigma_z < \iint\limits_{0<|z|>r} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z$ поэтому в силу леммы 5 существует $\lim\limits_{z\to 0} w = w_0$. Будем для простоты считать $w_0 = 0$. Докажем, что $\frac{1}{\mu} \leqslant \left|\frac{w}{z}\right| \leqslant \mu$. Так как в силу той же леммы бесконечно малый круг $|z| = r$ переходит в круг, то достаточно показать, что величина $\left|\mu(r) - \ln\frac{1}{r}\right| < M$, где $\mu(r)$ — модуль образа $r \leqslant |z| \leqslant 1$. Однако в силу леммы 1, $\left|\mu(r) - \ln\frac{1}{r}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r\leqslant|z|\leqslant 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z < \frac{A}{2\pi}$. Таким образом, если $\lim\limits_{z\to 0}\frac{w}{z}$ существует, то он отличен от нуля и бесконечности. В случае отображения на круг $|w| \leqslant 1$

$$e^{-\frac{A}{2\pi}} \leqslant \underline{\lim} \left|\frac{w}{z}\right| \leqslant \overline{\lim} \left|\frac{w}{z}\right| \leqslant e^{\frac{A}{2\pi}} .$$

Покажем теперь, что для достаточно малых z_1 и z_2 или, что то же самое, для достаточно малых $w_1 = w(z_1)$ и $w_2 = w(z_2)$, величина $\left|\frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1}\right|$ будет меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Рас-

---

* Доказательство того, что существует $\lim \left|\frac{w - w_0}{z}\right|$ в несколько иной формулировке, было впервые получено при дополнительных ограничениях О. Тайхмюллером и без ограничения Виттихом [2].

смотрим сначала случай $\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \leqslant 1$. Тогда

$$\left|\frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1}\right| = \left|\frac{w_1}{z_1}\right| \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \left|\frac{w_2}{w_1} - \frac{z_2}{z_1}\right| \leqslant \mu \cdot \underset{\text{при } \rho \to 0}{\eta(\rho) \to 0},$$

ибо

$$\left|\frac{w_1}{z_1}\right| \leqslant \mu, \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \leqslant 1, \text{ а } \left|\frac{w_2}{w_1} - \frac{z_2}{z_1}\right| \leqslant \eta(\rho) \quad \text{по неравенству (9).}$$

Будем считать теперь $|z_2| > 2|z_1|$. В силу (9) и гомеоморфности $|w_2| > (2 - \eta(\rho))\, w_1$. Рассмотрим отображение в круге $|z| \leqslant |z_2|$ и перейдем к переменным $\zeta = \frac{z}{z_2}$ и $\omega = \frac{w}{w_2}$. Тогда величина $\left|\frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1}\right|$, которую нам нужно оценить перепишется в виде

$$\left|\frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1}\right| = \left|\frac{w_2}{z_2} - \frac{\omega_1\, w_2}{\zeta_1\, z_2}\right| = \left|\frac{w_2}{z_2}\right| \left|1 - \frac{\omega_1}{\zeta_1}\right|,$$

что ввиду ограниченности $\left|\frac{w_2}{z_2}\right|$ эквивалентно малости $\left|1 - \frac{\omega_1}{\zeta_1}\right|$. Кольцо $|\zeta_1| \leqslant |\zeta| \leqslant 1$, соответствующее кольцу $|z_1| \leqslant |z| \leqslant |z_2|$, в силу леммы 5 переходит почти в кольцо D, границы которого близки (в смысле отношения $\frac{\max w}{\min w}$) к окружностям $|\omega| = 1$ и $|\omega| = |\omega_1|$; поэтому в силу известных свойств двусвязных областей модуль D близок к величине $\lim \frac{1}{|\omega_1|}$. Модуль же D отличается от величины $\ln \frac{1}{|\zeta_1|}$ не более, чем на

$$\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta_1| < |\zeta| < 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z_1| < |z| < |z_2|} \frac{p(z) - 1}{|z|^2}\, d\sigma_z = O(1) \text{ вместе с } |z_2|.$$

Поэтому

$$\left|\ln \frac{1}{|\omega_1|} - \ln \frac{1}{|\zeta_1|}\right| = O(1)$$

или

$$\left|\frac{\omega_1}{\zeta_1}\right| = e^{O(1)} = 1 + O(1).$$

Остается показать, что $\arg \frac{\omega_1}{\zeta_1}$ тоже есть величина бесконечно малая. Для этого рассмотрим кольцо $|\omega_1| \leqslant |\omega| \leqslant 1$, которому в плоскости ζ будет соответствовать область, близкая к кольцевой, $\omega(1) = 1$. Рассмотрим $\min\limits_{|\omega| = \omega_1} \arg \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} = \delta$. По лемме 5 при $|\omega| = |\omega_1|$ $\arg \frac{\omega}{\zeta} - \delta = o(1)$, а по лемме 2

$$\delta \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta| < 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta + \left(1 + \frac{\ln \frac{1}{|\zeta_1|}}{\ln \frac{1}{|\omega_1|}}\right) O(1).$$

Интеграл в правой части мал как остаток сходящегося. Так как

$\dfrac{\ln \frac{1}{|\zeta_1|}}{\ln \frac{1}{|\omega_1|}} < K$ в силу $\left|\dfrac{\zeta_1}{\omega_1}\right| < \mu$ и $\dfrac{1}{|\zeta_1|} \geqslant 2$, то и второй член мал. Мы доказали, что отношение $\frac{\omega_1}{\zeta_1}$ близко к 1 по модулю и аргументу. Тем самым теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. — Об одном классе непрерывных отображений. Математич. сб. 42: 2, 1935, стр. 407 — 423.

2. Wittich H. — Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen Math. Z. 51: 6, 1949.

3. Grötzsch H. — Einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I. Ber. Sachs Acad. Wiss. 80, 1928.

4. Warschawsky S. E. — On the degree of variation in conformal mapping of variable regions Trans. Amer. Math. Soc. 69, 1950.