Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

Г. Л. БУЙМОЛА

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРВИННИХ ПОМИЛОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

1) Розглянемо лише ті геометричні побудови, які можуть бути виконані за допомогою найбільш вживаних в рисуванні приладь: циркуля, лінійки та косинця.

Елементарні операції цими приладдями під час виконання побудови, як це прийнято в геометрографії, будемо позначати через: C_1, C_2, R_1, R_2, P, W, [1].

Елементами рисунку є точка і пряма, тому більшість задач на побудову зводиться саме до відшукання деякої точки або прямої, що є розв'язком задачі.

Графічно задану точку A' (уколом ніжки циркуля, слідом дотику олівця і т. ін.) будемо вважати за коло сталого (для даної побудови) радіуса ω_2.

Практично ω_2 — дуже мала величина, що за дослідами радянського вченого професора Каргіна [2] знаходиться в межах від 0,08 до 0,13 *мм*.

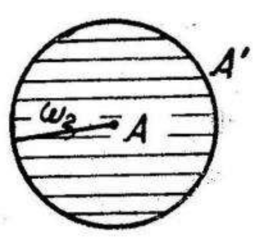

Рис. 1.

Центром цього кола вважається геометрична (евклідова) точка A, причому між евклідовими або геометричними точками A і графічно заданими точками A' існує взаємнооднозначна відповідність: кожній точці A' відповідає точка A і навпаки. Коротко: $A' \rightleftarrows A$ (рис. 1). Графічно задану точку ми будемо іноді для скорочення називати „точка". Якщо графічно задану точку ми позначаємо через A', то відповідну їй евклідову точку будемо позначати A і записувати $A'(A)$. Очевидно, „точку" A' можна задати рівнянням:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_2^2=0, \tag{1}$$

де α і β — координати центра кола (1), тобто евклідової точки A, а ω_2 — радіус цього кола, тобто радіус заданої графічно точки.

Графічно задану пряму a' (рис. 2) ми розглядаємо як смужку (слід олівця чи пера рейсфедера) шириною $2\omega_1$. Практично ω_1 є величина також мала і в межах одної побудови вважається сталою (якщо про це спеціально не зазначено).

Професор Каргін, провівши лабораторні дослідження величини ω_1 за допомогою мікроаналіза, встановив, що товщина прямої лінії, якою здебільшого користуються в практиці (тобто величина $2\omega_1$), знаходиться між 0,13 і 0,26 *мм*. Середня лінія цієї смужки є геометрична (евклідова) пряма a, що відповідає цій смужці a' (тобто графічно заданій прямій).

Отже, між a' і a так само встановлюється взаємнооднозначна відповідність: $a' \rightleftarrows a$. Графічно задану пряму (смужку a') ми також іноді будемо називати словом п р я м а, взятим в лапки: „пряма“ і записувати коротко $a'(a)$. Аналітично цю смужку можна, очевидно, задати як обгортку сімейства кіл $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_1=0$, центри яких лежать на даній геометричній прямій a, рівняння якої візьмемо в загальному виді

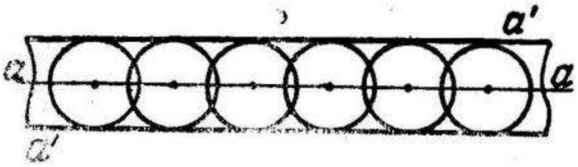

Рис. 2.

$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

тобто при умові: $A\alpha+B\beta+C=0$.

Рівняння цієї обгортки буде

$$Ax+By\mp\sqrt{A^2+B^2}\,\omega_1+C=0. \tag{3}$$

Воно являє собою дві прямі, паралельні даній прямій (2), що знаходяться на віддалі $\pm\omega_1$ від неї.

Наприклад, якщо „пряма“ a' проведена паралельно осі абсцис, то рівняння відповідної їй геометричної (евклідової) прямої a буде $y-h=0$, якщо через h позначимо ординату точки перетину прямої a з віссю ординат.

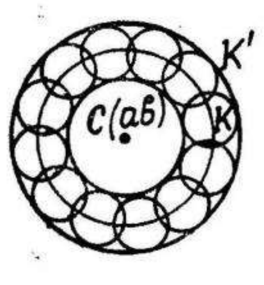

Рис. 3.

Використовуючи формулу (3), ми знайдемо рівняння обгортки, або, інакше кажучи, рівняння „прямої a'. Воно буде: $y=h\pm\omega_1$.

Так само, якщо пряма a має рівняння $2x-3y+2=0$, то „пряма“ a' матиме рівняння $2x-3y\mp\sqrt{13}\,\omega_1+2=0$; вираз $R=\mp\sqrt{A^2+B^2}\,\omega_1$ назвемо *поправкою на реалізацію* прямої a.

Графічно задане коло k' (за допомогою циркуля) ми можемо розглядати також як певну смужку, обмежену обгорткою сімейства кіл, центри яких знаходяться на відповідному геометричному (евклідовому) колі k (рис. 3.). Нехай геометричне коло k, рівняння якого в декартових координатах є

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0, \tag{4}$$

однозначно відповідає смужці k', що утворюється обгорткою сімейства кіл $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_1^2=0$, центри яких (α, β) знаходяться на колі (4); тобто при умові $(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2-R^2=0$. Рівняння згаданої обгортки можна тоді записати у вигляді

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(R\pm\omega_1)^2=0. \tag{5}$$

Кільцева смужка, обмежена цією обгорткою (5), і є графічно задане коло. Рівняння (5) ми умовно приймаємо за рівняння графічно заданого „кола“ k'. Аналогічно ми могли б записати довільно задану графічно криву (смужку), відшукуючи обгортку сімейства кіл $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_1^2=0$, центри яких знаходяться на відповідній геометричній кривій $F(xy)=0$, що є середньою лінією цієї смужки.

2) Різними „точками" ми будемо називати такі „точки" A' і B', задані відповідно рівняннями

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_2^2=0,$$
$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-\omega_2^2=0,$$

для яких існує хоч одна з нерівностей $\alpha\neq\alpha_1$, $\beta\neq\beta_1$. Практично ми відрізняємо дві „точки" A' і B' тоді, коли віддаль між їх відповідними точками A і B (центрами відповідних кіл, що зображають „точки" A' і B') не менша деякої граничної величини

$$2\omega_1=\sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}; \qquad (6)$$

тобто, якщо вони не містяться в середині деякого кола K, радіус якого не перевищує величини $w_0=\omega_1+\omega_2$ (6) і центр якого знаходиться в точці $x_0=\frac{\alpha_1+\alpha}{2}$, $y_0=\frac{\beta_1+\beta}{2}$ (рис. 4). Тут ми зустрічаємось з основною *первинною помилкою* побудування, що є наслідком неудосконалення нашого сприймання. Ця основна первинна помилка може бути схарактеризована згаданим колом k радіуса ω_0. *Величину* $AB\leqslant 2\omega_1$ *будемо називати основною первинною помилкою I-го роду*. Дві „точки", для яких $AB\leqslant 2\omega_1$, назвемо *відносно інцидентними* „точками". Коло k радіуса $\omega_0\leqslant\omega_1+\omega_2$ назвемо *одиничним колом помилок* або колом відносної інцидентності двох „точок".

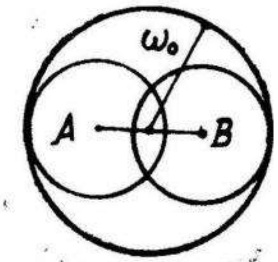

Рис. 4.

Нерівність

$$\sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}\leqslant 2\omega_1 \qquad (7)$$

буде умовою відносної інцидентності двох точок. Очевидно, що:

1) Коли $\omega_1\to 0$, то одиничне коло помилок вироджується в „точку". Дві „точки" A' і B' зливаються, стають *абсолютно інцидентними* (тобто їх відповідні точки A і B також зливаються).

Тоді виконується умова:

$$\sqrt{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}=0. \qquad (8)$$

2) Кожне одиничне коло помилок містить нескінченну множину звичайних (геометричних) точок.

3) У „площині" рисунку існує нескінченна множина відносно інцидентних „точок", а значить і одиничних кіл помилок.

4) Дві відносно інцидентні „точки" несуть на собі *основну первинну помилку* I-го роду.

„Точку" A', яку ми задаємо аналітично рівнянням

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_2^2=0$ і пряму a', рівняння якої є

$$Ax+By+C\mp\sqrt{A^2+B^2}\,\omega_1=0,$$

ми будемо називати *абсолютно інцидентними* в тому випадкові, якщо інцидентні *відповідні* їм звичайні точка (A) і пряма (a) евклідової площини. Тобто, якщо виконується умова

$$A\alpha+B\beta+C=0. \qquad (9)$$

Практично „точка" і „пряма" не розрізняються одна від одної, якщо

$$\frac{A\alpha + B\beta + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leqslant \omega_0, (\text{де } \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \neq 0). \tag{10}$$

Тому:

1) „Точку" і „пряму" назвемо *відносно інцидентними* (або практично інцидентними), якщо віддаль центра „точки" від середньої лінії „прямої" $\leqslant \omega_0$ $(\omega_0 \neq 0)$, тобто, якщо виконується умова (10).

2) Смужку, обмежену двома паралельними прямими, що являють собою обгортку сімейства кіл радіуса ω_0 з центром на прямій a, будемо називати *одиничною смугою помилок* або *смугою відносної інцидентності* „точки" і „прямої". Якщо рівняння прямої a є

$$Ax + By + C = 0,$$

то рівняння згаданної обгортки кіл $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_0^2 = 0$ буде

$$Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2}\,\omega_0 = 0. \tag{11}$$

Ця смуга помилок характеризується одиничним колом радіуса ω_0, а значить несе на собі основну первинну помилку 1-го роду.

Очевидно, що:

а) Кожній „прямій" відповідає тільки одна одинична смуга помилок.

б) Якщо $\omega_0 \to 0$, то „точка" і „пряма" в границі стають *абсолютно інцидентними.*

Поняття відносної інцидентності „точки" та „кола" або „точки" та будь-якої графічно заданої кривої, а також абсолютної їх інцидентності можуть бути введені аналогічно.

Дві „прямі"

$$\begin{aligned} Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2}\,\omega_1 = 0,\\ A_1x + B_1y + C_1 \mp \sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\omega_1 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

будемо називати *відносно інцидентними „прямими"*, якщо виконується умова $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$, тобто, якщо паралельні відповідні їм евклідові прямі і *віддаль між останніми не перевищує* $2\omega_1$. Такі прямі також характеризуються певною смугою помилок, яку в цьому випадку назвемо смугою *інцидентності двох прямих*, що належить до первинних помилок побудови.

Дві різні „неінцидентні" „прямі" або перетинаються, або паралельні між собою.

Якщо дві „прямі" перетинаються, то вони визначають „точку", точність позначення якої на рисунку характеризується „площею помилок". Остання належить також до основних первинних помилок геометричної побудови. Її форма і величина залежать в основному лише від кута α, під яким перетинаються відповідні геометричні прямі.

Якщо позначити указану площу помилок через Т, то ця залежність виразиться такою формулою:

$$T = \frac{4\omega_0^2}{\sin d}. \tag{13}$$

В граничних випадках ця площа помилок може розтягнутися (вироднтись) в *„смугу* інцидентності двох прямих“, якщо прямі паралельні, або прийняти форму квадрата з стороною, рівною $2\omega_0$, якщо прямі взаємноперпендикулярні.

Будемо називати дві „прямі“ (12) „паралельними“, якщо умова $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$ виконується, але віддаль між відповідними евклідовими прямими більша за $2\omega_1$.

Помилка, що виникає при побудові двох „паралельних“ прямих, належатиме вже до складніших аба *вторинних* помилок побудови.

3) Розглянемо тепер помилки, що виникають в побудові при основних елементарних операціях рисування R_1, R_2, C_1, C_2. Їх також слід віднести до основних первинних помилок геометричної побудови.

Величина помилки, що виникає при операції R_1, тобто при прикладанні лінійки до даної „точки“ A', так само, як і при операції C_1 (встановлення ніжки циркуля в точку даної „прямої“ a) буде дорівнювати довжині перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої a. Позначимо максимальну величину цієї помилки через ω_{max}. Тоді

$$0 \leqslant \omega_{max} \leqslant \omega_0 \qquad (14)$$

При відхиленні „прямої“ від „точки“ на більшу величину ми вже помітимо, що „точка“ не лежить на „прямій“ або, що „пряма“ не проходить через „точку“. Значення ω_{max} залежить від гостроти зору людини, що працює над рисунком, від освітлення, приладь та величини самих „точок“ і „прямих“ і ряду інших суб'єктивних чи об'єктивних причин (навик в роботі, якість паперу і т. п.). Можна припустити, що для одної і тої ж гостроти зору при незмінному освітленні всі „точки“ наколенні (задані на рисунку у вигляді укола ніжки циркуля) з однаковою точністю і що помилка ω_{max} для кожної такої точки при проведенні „лінії“ через неї буде *сталою* в межах даної побудови.

Величину ω_{max} називатимемо далі *помилкою прикладання лінійки* до заданої „точки“ або помилкою *встановлення* ніжки циркуля в довільну точку заданої „прямої“.

Розглянемо тепер первинну помилку, що виникає внаслідок проведення операцій $2R_1$ та R_2, тобто при прикладанні лінійки до двох графічно заданих „точок“ A' та B' в полі рисунку та при проведенні „прямої“ через них.

Графічно задані „точки“ A' та B' згідно з (1) можна аналітично записати так:

$$(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - \omega_2^2 = 0 \qquad (\text{„точка“ } A'),$$

$$(x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 - \omega_2^2 = 0 \qquad (\text{„точка“ } B').$$

Тоді всяка „пряма“ $Ax + By + C \mp \sqrt{A^2+B^2}\,\omega_1 = 0$ буде відносно інцидентна цим „точкам“, якщо віддаль d_1 точки A від відповідної цій прямій геометричної прямої $Ax + By + C = 0$ і віддаль d_2 точки B від тої ж прямої не перевищує ω_0 як свого максимума. Тобто якщо для випадку графічно заданих „точок“ і „прямих“ виконується умова (10). Найбільш невигідне положення „прямої“ тоді, коли віддалі ці будуть різних знаків і досягатимуть свого максимума $[\omega_0]$. Таких положень

„прямої", очевидно, може бути два: A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 5). В цих випадках ми робимо *„помилку в напрямку прямої"* (відхилення від ідеального її положення AB), що вимірюється кутом φ_{max}, рівним половині кута між граничними прямими A_1A_2 і B_1B_2.

Позначивши довжину AB через $2l$, дістанемо:

$$\sin\varphi_{max} = \frac{AB_1}{AS} = \frac{\omega_{max}}{l}.$$

Для малих кутів φ виразимо первинну помилку φ_{max} в напрямку „прямої" наближеним рівнянням:

$$\varphi_{max} = \frac{\omega_{max}}{l}. \tag{15}$$

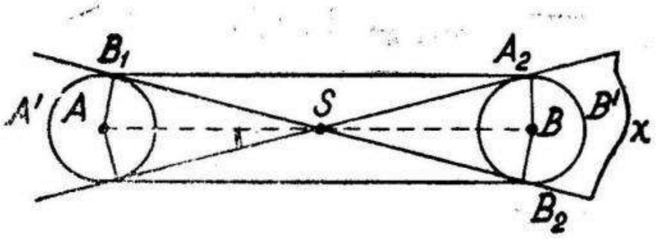

Рис. 5

Отже, *первинна помилка в напрямку прямої*, що виникає внаслідок операцій $2R_1$ або K_2, є обернено пропорціональна до половини віддалі між точками A і B і прямо пропорціональна до *помилки прикладання лінійки* ω_{max}.

Практично величину φ_{max} ми можемо наближено визначити так: прикладаючи кілька разів лінійку до точок A і B, не будемо проводити прямої, а кожного разу по обидві сторони від A і B відзначатимемо рискою її положення, причому як можна далі від середини S відрізка AB, наприклад, на віддалі від середини S, рівній $50l$. Потім визначимо крайні риски. Сполучаючи їх відповідно, дістанемо подвійний кут φ_{max}.

Знаючи φ_{max} за формулою (15), можна обчислити первинну помилку прикладання лінійки:

$$\omega_{max} = l\varphi_{max}. \tag{16}$$

„Прямі" A_1A_2, B_1B_2, B_1A_2 і A_1B_2 виділяють область площини рисунку, яку ми позначимо через χ (рис. 5). В цій області може проходити безліч „прямих" відносно інцидентним „точкам" A' і B'. Область χ ми назвемо *одиничною областю помилок*, або одиничною областю відхилень нарисованих „прямих", і віднесемо її також до основних первинних помилок побудови. Ця первинна помилка також характеризує точність проведення „прямої" через дві графічно задані „точки" (т.т. операцію $2R_1$ та R_2).

Елементарна операція C_2 — рисування кола — також вводить помилку в геометричну побудову. Величина цієї помилки залежить від багатьох причин; вкажемо на такі з них:

1) ніжка циркуля, що встановлюється в центр кола — „точку" O, — заглиблюється в товщу паперу на деяку глибину γ', від чого радіус кола r зменшується на деяку величину $\delta r = r - r'$, де $r' = \sqrt{r^2 - \gamma^2}$.

2) Сточування графіта олівця під час рисування, від чого радіус кола ще більше вкорочується. Якщо не брати до уваги інших причин, то й вказані приводять до неточності побудування кола.

3) Якщо A — початкова точка кола, що ми маємо нарисувати з

довільного центра O, то кінцева його точка вже не попаде якраз в цю початкову точку. Відхилення, що може мати тут місце, характеризується основною первинною помилкою $2\omega_1$. Якщо згадане відхилення в „точці" зіткнення дуг кола перебільшує цю величину, то помилка в побудуванні кола вже буде практично помітною.

4) При побудові будь-яких кутів ми зустрічаємось з характерною для цієї побудови помилкою. Справа в тому, що для того, щоб пара „променів" h' і k', які виходят з одної „точки O', визначали (практично) кут $(h' k')$, необхідно, щоб вони мали лише одну спільну „точку" O' (вершок кута) і не були відносно інцидентними між собою.

Кут $(h' k')$ буде практично помітним, коли його величина буде більшою за $\frac{2\omega_1}{r}$, де $2\omega_1$ — величина дуги кола радіуса r, центр якого знаходиться в точці O' — вершині кута і являє собою за величиною основну первинну помилку 1-го роду.

Кут $\alpha = \frac{2\omega_1}{r}$ ми назвемо *одиничним кутом помилок* або *одиничною кутовою помилкою,* яку слід віднести до *первинних помилок* геометричної побудови.

Якщо $r \to \infty$, то $\alpha \to 0$. Кут вироджується в смугу відносної інцидентності двох „прямих" або просто в „пряму". Якщо $r \to 0$, то про кут не доводиться говорити, оскільки практично ми маємо справу в цьому випадку з точкою так само, як у випадку $r \to 2\omega_1$ ми маємо справу з графічно заданою „точкою".

Отже, $2\omega_1 \leq r < \infty$, оскільки побудову проводять на обмеженій частині „площини" (аркуш паперу). Звідси також можна зробити висновок, що для збільшення точності побудови і виміру кута слід брати радіус допоміжного кола r, на якому відраховується дуга, як можна більшим.

5) Розглянемо тепер таку задачу:

Оцінити точність проведення дотичної з графічно заданої „точки" до графічно заданого „кола" радіуса R.

Нехай графічно задано в площині рисунку коло у вигляді кільцевої смужки шириною $2\omega_1$, центр цього кола „точка" $C'(C)$ і „точка" $A'(A)$, з якої треба провести дотичну до кола $k'(k)$ (рис. 6)*.

Для розв'язку задачі прикладемо лінійку до точки так, щоб олівець (чи перо), яким рисуємо дотичну, попав приблизно в центр „точки" A' і щоб проведена „пряма" по лінійці „дотикалася" „кола" k'.

При цьому ми робимо помилку в прикладенні лінійки як до „точки" A', так і до „точки" дуги „кола" k'.

Найбільш сприятливий випадок у побудові був би той, коли б евклідова пряма a проходила з одного боку якраз через евклідову точку A (a і A — абсолютно інцидентні) і з другого боку дотикалась евклідового кола k в деякій точці B. Але і тоді, з огляду на те, що графічна „точка" являє собою кружочок радіуса ω_2, а проведене коло — смужку, ширина якої $2\omega_1$, — ми матимемо площу MNP, в середині якої десь міститься точка дотику.

Нам необхідно визначити цю точку, указати ту область, в якій вона знаходиться, оцінити точність проведеної побудови, вказати на те максимальне відхилення, яке може бути допущене в геометричній

---

* Тут k' — графічно задане коло, k — відповідне йому евклідове коло так само як і C і A — евклідові точки, яким відповідають „точки" C' і A'.

побудові, тобто вказати границі цього відхилення, перейшовши які геометричну побудову слід вважати зовсім не точною і яку недопустимо практично використовувати, оскільки вона матиме уже значні неточності, знехтувати якими ніяк не можна.

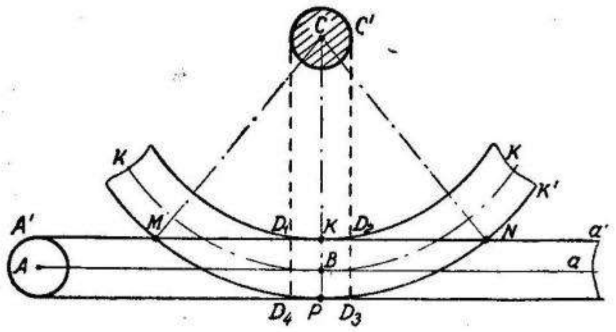

Рис. 6.

В розглядуваному випадку ми можемо визначити точку дотику, провівши через центр кола — „точку" C' — перпендикуляр до „прямої" a'. Для найпростішого випадку ми тут припустимо, що проведення перпендикуляра не внесло відхилення в побудову. „Точка" дотику $B \rightleftarrows B'$ знаходиться в середині квадрата $D_1D_2D_3D_4$, який являє собою *одиничну площу помилок* першого типу [3]. За граничну помилку слід прийняти площу всього сегмента MPN, за межі якої не вийде точка дотику в указаній побудові, враховуючи навіть і ті відхилення (помилки), які внесе в побудову проведення перпендикуляра $C'B'$. Обчислимо цю помилку. Позначивши площу сектора MCP через S *сек.*, кут MCP — через α, а шукану площу сегмента MNP — через S_x, будемо мати:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{S_{сек}}{\pi (R+\omega_0)^2}$$

звідки

$$S_{сек} = \frac{\alpha}{2}(R+\omega_0)^2.$$

Очевидно, що площа сектора

$$MCN = \alpha (R+\omega_0)^2,$$

площа

$$\triangle MCK = \frac{1}{2} MK . CK = \frac{1}{2}\sqrt{(R+\omega_0)^2-(R-\omega_0)^2}(R-\omega_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4R\omega_0}\,(R-\omega_0) = \sqrt{R\omega_0}\,(R-\omega_0),$$

а площа

$$\triangle MCN = 2\sqrt{R\omega_0}\,(R-\omega_0).$$

Шукана площа сегмента

$$S_x = \alpha (R+\omega_0)^2 - 2\sqrt{R\omega_0}\,(R-\omega_0).$$

Коли α достатньо мале, то можна замінити α через $\sin \alpha$, тоді:

$$S_x = \sin\alpha\,(R+\omega_0)^2 - 2\sqrt{R\omega_0}(R-\omega_0) = \frac{2\sqrt{R\omega_0}}{R+\omega^0}(R+\omega_0)^2 -$$

$$-2\,R\omega_0(R-\omega_0) = 2\sqrt{R\omega_0}\,(R+\omega_0) - 2\sqrt{R\omega_0}\,(R-\omega_0) =$$

$$= 4\sqrt{R\omega_0}\cdot\omega_0. \qquad (17)$$

Для оцінки точності побудови дотичної складемо коефіцієнт точності:

$$K_t = \frac{4\omega_0^2}{4\sqrt{R\omega_0}\cdot\omega_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{R\omega_0}} = \sqrt{\frac{\omega_0}{R}}. \tag{18}$$

Коефіцієнт точності K_t показує, що чим більший радіус кола k, тим менша буде точність побудови дотичної. Площа сегмента $MNP = 4\sqrt{R\omega_0}\omega_0$ характеризує точність цієї побудови, тому її можна віднести до первинних помилок побудови дотичної. Ми розглянули найбільш сприятливий випадок, що може трапитись при проведенні дотичної, а саме той, коли пряма a дотикається кола k в деякій точці B. Тобто, коли помилка в *напрямку прямої* a дорівнює нулеві.

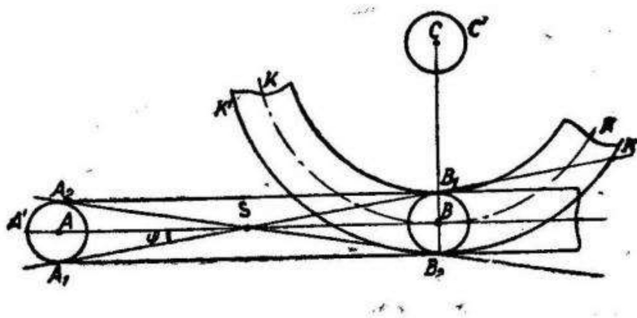

Рис. 7.

Помилка в напрямку прямої буде також дорівнювати нулеві, коли пряма a займе положення A_1B_2 абоA_2B_1 (рис. 7).

Пряма a може зайняти найбільш несприятливе положення, наприклад, A_1B_1 або A_2B_2. Тут помилка в напрямку прямої a буде характеризуватися кутом

$$\varphi_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{l}. \tag{15'}$$

Оцінимо тепер точність проведення дотичної і нормалі до кола в цьому випадку.

Нормаллю до кола в деякій його точці буде радіус заданого кола k (центр якого знаходиться в даній точці C), що сполучає центр і точку дотику.

Отже, для побудови нормалі до кола нам необхідно провести через точку C перпендикуляр до дотичної AB.

При вживанні косинця (угольника) ми зустрічаємось з помилкою прикладання його в „точці" C кожного разу, коли проводимо перпендикуляр до граничних прямих A_1B_1 і A_2B_2. Розглядаючи чотирикутник $D_1D_2D_3D_4$ (рис. 8), площа якого при невеликих значеннях кута $\varphi_{\max}$ наближається до одиничної площі помилок $4\omega_0^2$, ми можемо обчислити площу помилок побудови нормалі до заданого кола. З рисунку 8 знаходимо:

$$1)\ \measuredangle S_1 = \measuredangle S,$$

$$2)\ \triangle SP_1P_2 = \triangle S_1C_1C_2,$$

$$3)\ \triangle S_1BE \sim \triangle S_1C_1C_2,$$

звідки:

$$\frac{BE}{CC_2} = \frac{S_1B}{S_1C} \text{ або } \frac{BE}{\omega_{\max}} = \frac{R+l}{l}$$

і, отже,

$$BE = \frac{R+l}{l}\,\omega_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{l}(R+l).$$

$$2BE = E_1E, \text{ тому } EE_1 = \frac{2\omega_{max}}{l}(R+l).$$

Замінимо ω_{max} на ω_0. Тоді $E_1E = \frac{2\omega_0}{l}(R+l)$.

Площа помилок T побудови нормалі до заданого кола буде дорівнювати

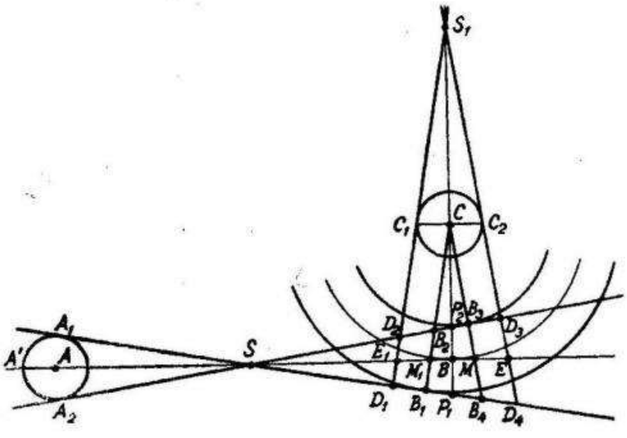

Рис. 8.

$$T = P_1P_2 \cdot EE_1 = 4\omega_0^2\left(\frac{R+l}{l}\right).$$

Якщо обчислити коефіцієнт точності побудови нормалі K_n, то ми дістанемо

$$K_n = \frac{t_2}{T} = \frac{4\omega_0^2}{4\omega_0^2\left(\frac{R+l}{l}\right)}.$$

Отже:

$$K_n = \frac{\;}{R+l}.$$

Якщо графічно побудована нормаль CB займає положення найвигідніше, тобто перпендикуляри CB_1 і CB_2 проходять якраз через точку C, то чотирикутник $D_1D_2D_3D_4$ зменшується до чотирикутника $B_1B_2B_3B_4$.

Розглядаючи площу цього чотирикутника, ми знайдемо площу, що характеризує точність побудови дотичної до кола, проведеної з будь-якої точки $A'(A)$, без відзначення на колі точки дотику. Позначаючи цю площу через T_1, знайдемо $T_1 = MM_1 \cdot P_1P_2 = MM_1 \cdot 2\omega_0$. Щоб визначити величину MM_1, розглянемо $\triangle BES_1 \sim \triangle MBC$, звідки $\frac{BE}{BM} = \frac{BS_1}{BC}$ або $\frac{BE}{BM} = \frac{R+l}{R}$, звідки $BM = \frac{R \cdot BE}{R+l}$. Підставляючи $BE = \frac{\omega_0}{l}(R+l)$, знаходимо

$$BM = \frac{R\omega_0}{l} \text{ і } MM_1 = \frac{2R\omega_0}{l}; \text{ отже, } T_1 = \frac{2R\omega_0}{l} \cdot 2\omega_0 = \frac{4R\omega_0^2}{l}$$

і коефіцієнт точності цієї побудови K_t буде

$$K_t = \frac{4\omega_0^2}{T_1} = \frac{l}{R},$$

тобто коефіцієнт точності K_t прямо пропорціональний половині віддалі між точками A' і B' і обернено пропорціональний радіусу кола.

РЕЗЮМЕ

Автор изучает первичные ошибки, которые возникают в геометрических построениях при простейших геометрических операциях, если рассматривать точки и прямые в плоскости чертежа, как некоторые пятна и полосы.

Введенные понятия первичных ошибок автор применяет к вычис-

лению областей погрешности, возникающих при построении касательной и нормали к графически заданной окружности.

Вычисляются коэффициенты точности этих построений.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. Одесса, 1910.

2. Каргин Д. И. О точности графических расчетов. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Выпуск 150, 1929.

3. Буймола Г. Л. Коефіцієнт точності геометричних побудов. Наукові записки Львів. держ. університету ім. Ів. Франка, том V, 1947.