Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

И. Г. СОКОЛОВ

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН РЯДА ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В последние десятилетия появилось большое число работ, посвященных изучению асимптотического выражения остаточных членов приближения тригонометрическими полиномами для различных классов функций.

Первой значительной работой такого рода была работа Колмогорова [4]. Колмогоровым было получено асимптотическое значение для остаточного члена ряда Фурье для класса дифференцируемых функций с ограниченной „r“ производной. Результат Колмогорова был обобщен Пинкевичем [6] на случай дробной (в смысле Вейля) производной. Затем следует отметить работы Ахиезера, Крейна и Фавара, дающих точное значение величины наилучших приближений для класса дифференцируемых функций. С. М. Никольским были получены наиболее полные результаты по изучению остаточных членов приближения для классов функций [см., например, 5].

В настоящей работе используется результат Ахиезера и Крейна [2] для получения не асимптотического значения остаточного члена ряда Фурье, а оценки сверху. При этом используется известное неравенство Бернштейна:

$$\| x - U_n(x) \| \leqslant (1 + L_n)\, E_n(x),$$

где U_n — линейный оператор, переводящий $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной метрикой), такой, что $U_n(T_n) = T_n$ (для любого тригонометрического поленома T_n порядка не выше n); $E_n(x)$ — наилучшее приближение „x“ тригонометрическими полиномами T_n.

L_n есть норма оператора U_n, называемая обычно константой Лебега метода приближения U_n. В этой работе изучено поведение констант Лебега сумм Фурье как для конечных n, так и для больших значений n.

§ 1. Константы Лебега приближения суммами Фурье имеют вид (1).

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin (n + \frac{1}{2})\, t|}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt. \tag{1}$$

Легко получить формулу для вычисления L_n при конечных значениях „n“.

Из (1) получаем:

$$L_n = \frac{2}{\pi}\left\{ \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \int\limits_{\frac{(m-1)\pi}{2n+1}}^{\frac{m\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + (-1)^n \int\limits_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \right\}.$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{2km}{2n+1}\pi}{k}.$$

Меняя порядок суммирования и используя формулу

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sin\frac{2k\pi}{2n+1} m = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{2n+1},$$

получаем

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{2n+1}}{k}. \tag{2}$$

Используя эту формулу, легко вычислить значения L_n. Получаем следующую таблицу:

Таблица констант Лебега*

n	1	2	3	4	5
L_n	1,43599	1,64218	1,77832	1,88008	1,96464
n	6	7	8	9	10
L_n	2,05132	2,08998	2,13702	2,18275	2,22213

§ 2. Для вычисления L_n для больших значений „n" воспользуемся формулой Szëgo (1):

$$L_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\nu(2n+1)-1}}{4\nu^2 - 1}. \tag{3}$$

Будем исходить из известного соотношения [3]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}, \tag{4}$$

* Таблица вычислена студентом ЛГУ Ю. Д. Зинько.

где „C“ — Эйлерова константа, и

$$A_k = \frac{1}{k}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(k-1-x)\,dx \tag{5}$$

Из формулы (5) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \left[\frac{1}{2}C + \ln 2\right] + \frac{1}{2}\ln n +$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{\infty} A_k\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+k-1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln n + \left(\frac{1}{2}C + \ln 2\right) + R_n, \tag{6}$$

где

$$R_n = \frac{1}{24(n+1)(2n+1)} + R^1{}_n.$$

$$R'_n = \frac{1}{2n}\sum_{\kappa=3}^{\infty} A_k\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}\right) -$$

$$- \left.\frac{1}{(2n+1)\ldots(2n+k-1)}\right]. \tag{7}$$

Для A_k легко получаем оценку

$$A_k < \frac{1}{12}(k-1)! \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем

$$0 < R'_n < \frac{1}{24n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} =$$

$$= \frac{1}{24n}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{12n(n^2-1)}. \tag{9}$$

Из (3), (6) и (7) получаем

$$L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1) + \frac{8}{\pi^2}\ln 2 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln\nu}{4\nu^2-1} +$$

$$+\frac{4}{\pi^2}C + \frac{2}{3\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{[\nu(2n+1)+1][2\nu(2n+1)+1][4\nu^2-1]} +$$

$$+\frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{R'_\nu(2n+1)}{4\nu^2-1}. \tag{10}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{[\nu(2n+1)+1]\cdot[2\nu(2n+1)+1]}=\frac{2}{1+2\nu(2n+1)}-\frac{1}{1+\nu(2n+1)}=$$

$$=\frac{2}{2\nu(2n+1)}\ \frac{1}{1+\frac{1}{2\nu(2n+1)}}-\frac{1}{\nu(2n+1)}\ \frac{1}{1+\nu(2n+1)}=$$

$$=\left[-\frac{2}{[2\nu(2n+1)]^2}+\frac{1}{[\nu(2n+1)]^2}\right]+\left[\frac{2}{[2\nu(2n+1)]^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[\nu(2n+1)]^3}\right]+\ldots=\frac{1}{2\nu^2(2n+1)^2}+R_{n;\,\nu},$$

где

$$R_{n;\,\nu}<\frac{3}{4}\frac{1}{\nu^3(2n+1)^3}.$$

Отюда

$$\frac{2}{3\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{[\nu(2n+1)+1]\ [2\nu(2n+1)+1]\ (4\nu^2-1)}=$$

$$=\left(\frac{2}{3\pi^2}-\frac{1}{18}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}+R''_n, \tag{11}$$

где

$$R''_n<\frac{1}{2\pi^2}\ \frac{1}{(2n+1)^3}\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right).$$

Из (9) имеем

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{R'_{\nu(2n+1)}}{4\nu^2-1}<\frac{4}{3\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(2n+1)\ [\nu^2(2n+1)^2-1]\ (4\nu^2-1)}<$$

$$<\frac{4{,}04}{3\pi^2}\ \frac{1}{(2n+1)^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2(4\nu^2-1)}=\frac{4{,}04}{3\pi^2}\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{1}{(2n+1)^3}. \tag{12}$$

Таким образом, из (10), (11) и (12) получаем

$$L_n=\frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1)+\frac{4}{\pi^2}(C+2\ln 2)+$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln\nu}{4\nu^2-1}+\left(\frac{2}{3\pi^2}-\frac{1}{18}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}+R_n''', \tag{13}$$

где

$$R'''_n<\frac{1}{\pi^2}\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)\left[\frac{1}{2}+\frac{4{,}04}{3}\right]\frac{1}{(2n+1)^3}<\frac{0{,}1}{(2n+1)^3}.$$

Вычисляя значения констант, получим формулу, дающую возможность вычислить n при $n\geqslant 10$.

$$L_n=0{,}40526\ln(2n+1)+0{,}98818+$$

$$+\frac{0{,}0120}{(2n+1)^2}+R'''_n. \tag{13a}$$

§ 3. Для оценки остатка ряда Фурье используем неравенство Бернштейна

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leqslant (1 + L_n) E_n(f), \tag{14}$$

где $S_n(f; x)$ — n-сумма Фурье функции $f(x)$, $E_n(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами n порядка, L_n — константа Лебега.

Рассмотрим класс W_r 2π-периодических функций, имеющих почти всюду производную „r“ порядка, удовлетворяющей там, где она существует, неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M.$$

Обозначим далее

$$H_n^{(r)} = \sup_{f \subset W_r} E_n(f), \tag{15}$$

где верхняя грань распространена по всем функциям класса W_r.

Ахиезером и Крейном было доказано точное равенство

$$H_n^{(r)} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(n+1)^r} K_r M, \tag{16}$$

где

$$K_r = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{17}$$

Константы K_r легко вычисляются через числа Бернулли (B_n) и Эйлера (E_n)

$$K_{2n-1} = \frac{(2^{2n}-1)}{(2n)!} \pi^{2n} |B_{2n}|,$$

$$K_{2n} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!} |E_{2n}|. \tag{18}$$

В частности,

$$K_0 = \frac{\pi}{4}; \quad K_1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Таблица констант: $\frac{4}{\pi} K_r$

r	1	2	3	4	5
$\frac{4}{\pi} K_r$	1,5530	1,2324	1,2919	1,2683	1,2750

r	6	7	8	9	10
$\frac{4}{\pi} K_r$	1,2731	1,2735	1,2732	1,2732	1,2732

Беря в неравенстве (14) верхнюю грань по классу W_r, получаем, используя (16),

$$\mathrm{E}_n(W_r) = \sup_{f \subset W_r} |f(x) - S_n(f; x)| \leqslant (1 + L_n) H_n^{(r)}. \tag{19}$$

С другой стороны, имеем очевидное неравенство:

$$\mathrm{E}_n(W_r) \geqslant H^{(r)}{}_n. \tag{20}$$

Таким образом, оценка (19) дает достаточно хороший результат при достаточно больших „r“ и не очень больших „n“.

Используя приведенные таблицы, легко найти верхнюю грань оценки (19) для $n \leqslant 10$.

Для больших значений „n“ следует использовать асимптотическое выражение L_n, даваемое формулой (13а).

При больших „n“ оценка (19) дает достаточную для практики точность.

Колмогоровым (4) было показано, что

$$\mathrm{E}_n(W_r) \geqslant M \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (19) и принимая во внимание формулу (13), видим, что главные члены оценок сверху и снизу отмечаются лишь множителем $K_r \frac{4}{\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд — Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.

2. Ахиезер Н. И. — Лекции по теории апроксимации. ОГИЗ, 1947.

3. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. — Таблицы интегралов и тед. ГТТИ, 1951.

4. Колмогоров А. Н. — Annals of Mathematics vol. 36, № 2, 1935.

5. Никольский С. М. — Приближение периодических функций многочленами. Труды института им. Стеклова, 1945.

6. Пинкевич Б. Т. — Изв. АН СССР. Сер. матем., IV, № 6, 1940,