Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

А. Н. КОСТОВСКИЙ

„О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ РАСТВОРОМ НОЖЕК"

В геометрии циркуля доказывается, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно решить и одним циркулем, то есть проведением одних только окружностей. При этом без оговорок допускается, что циркулем можно описывать окружности любого радиуса, встречающиеся в построении.

Всякая задача на построение циркулем и линейкой, всегда сводится к выполнению в определенном порядке следующих пяти основных операций:

I. Через две точки провести прямую или на данной прямой указать одну или несколько точек.

II. Около данной точки описать окружность данного радиуса, или на окружности, заданной центром и радиусом, указать одну или несколько точек.

III. Найти точку пересечения двух данных прямых.

IV. Найти точки пересечения данной прямой и данной окружности.

V. Найти точки пересечения двух данных окружностей.

Для того, чтобы доказать, что все задачи на построение, разрешимые с помощью циркуля и линейки, можно решить некоторым данным инструментом (или группой инструментов), достаточно показать, что все основные операции, приведенные выше, можно выполнить данным инструментом (или группой инструментов).

Цель настоящей работы — показать, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно решить и одним циркулем, имеющим ограниченный раствор ножек.

В частности, можно выполнить и все 5 вышеперечисленных операций.

Правда, нельзя одним циркулем начертить непрерывную прямую, заданную двумя точками, а также начертить окружность, если радиус последней окажется больше R [R — максимальный раствор ножек циркуля], но мы, как это будет видно ниже, сможем построить на прямой и окружности любое количество точек, причем как угодно плотно.

На рисунках мы будем проводить пунктирные прямые линии, для наглядности, это будут воображаемые прямые, а не действительно начерченные.

Условимся в дальнейшем фразу: „Из точки A, как из центра, радиусом BC описываем окружность (или дугу)" — заменять следующей: „Строим (A, BC)" или „Описываем (A, BC)".

Для выполнения основных операций одним цуркулем необходимо рассмотреть ряд задач. Рассмотрим только те задачи, которые необходимы для выполнения поставленной задачи. Заметим, что при изложении мы будем пользоваться методом инверсии.

ЗАДАЧА 1. Построить отрезок в „n“ раз больше данного отрезка ABR.

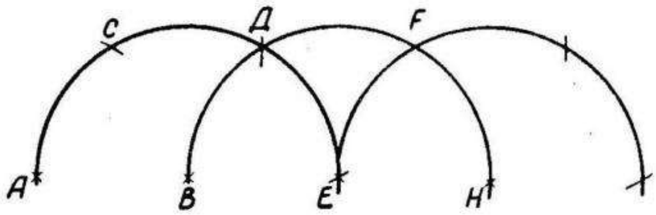

Рис. 1.

Строим окружность (B, AB) и откладываем хорды $AC = CД = ДE = AB$. Точка E диаметрально противоположна точке A окружности (B, AB), поэтому $AE = 2\,AB$. Аналогично строим точку H, получим $AH = 3\,AB$, и т. д. (Рис. 1).

ЗАДАЧА 2. Разделить отрезок AB на 2^n равных частей $(n = 1, 2, \ldots)$ или построить отрезок $BX = \frac{AB}{2^n}$,

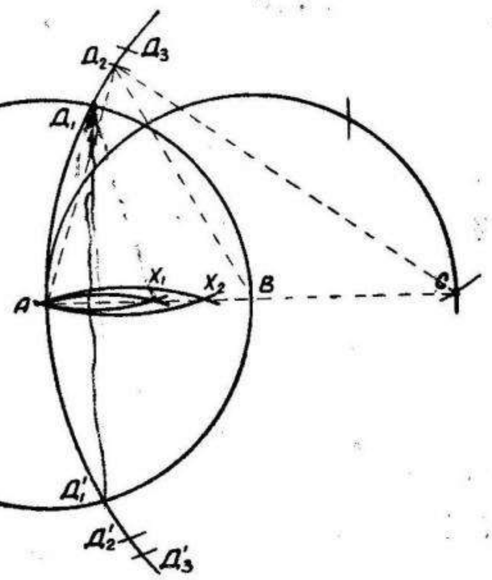

Рис. 2.

а) Строим $AC = 2\,AB$ (см. задачу 1) и описываем (C, AC) (рис. 2). В пересечении с (A, AB) получим точки $Д_1$ и $Д_1'$. Описываем $(Д_1, AB)$ и $(Д'_1, AB)$, получим в пересечении X_1, которая является серединой отрезка AB.

$$BX_1 = \frac{AB}{2}.$$

Строим дальше $AД_2 = AД_2' = BД_1$; окружности $(Д_2, BД_1)$ и $(Д_2', BД_1)$ пересекутся в точке X_2, лежащей на середине отрезка BX_1.

$$BX_2 = \frac{AB}{2^2}.$$

Если затем построить $AД_3 = AД_3' = BД_2$, то окружности $(Д_3, BД_2)$ и $(Д'_3, BД_2)$ пересекутся в точке X_3, причем

$$BX_3 = \frac{AB}{2^3}, \qquad \text{и т. д.}$$

Действительно, $\Delta AД_1C \sim \Delta AД_1X_1$, поэтому $\frac{AД_1}{AC} = \frac{AX_1}{AД_1}$. Положив $AB = AД_1 = a$, получим: $AX_1 = \frac{1}{2}\,AB = BX_1$.

Положим $AД_n = m_n$, где $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и $AB = a$. Точка B — является серединой отрезка AC, поэтому

$$2\,\overline{BД}_1^2 + 2\,\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AД}_1^2,$$

$$2\,m_1^2 + 2\,a^2 = 4\,a^2 + a^2, \qquad m_1^2 = \frac{1+2}{2}\,a^2.$$

Треугольники $(AX_2Д_2)$ и $(ACД_2)$ подобны, поэтому

$$AX_2 : AД_2 = AД_2 : AC; \qquad AД_2^2 = BД_1^2 = \frac{1+2}{2}a^2,$$

но $AC = 2a$, следовательно,

$$AX_2 = \frac{3}{4}a \text{ и } BX_2 = \frac{1}{4}a = \frac{AB}{2^2}.$$

Аналогично найдем:

$$m_2^2 = \frac{1+2+2^2}{2^2}a^2 \text{ и } BX_3 = \frac{AB}{2^3} \text{ и т. д.}$$

$$m^2{}_n = \frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{2^n}a^2 \text{ и } BX_n = \frac{AB}{2^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} m^2{}_n = a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{2^n} =$$

$$= a^2 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = 2a^2.$$

Следовательно,

$$AД_n = m_n < \sqrt{2}\,a. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно после этого, что построение а) можно выполнить циркулем при условии $AB \leqslant \frac{1}{2}R$.

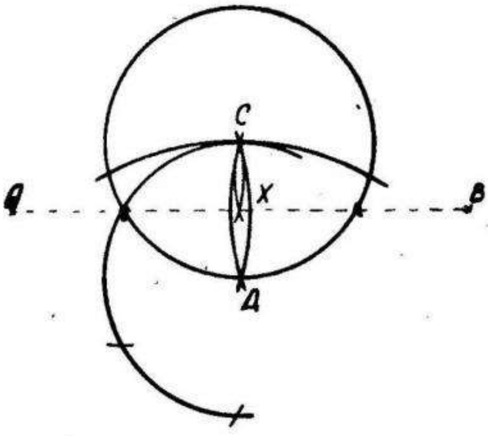

Рис. 3

б) Пусть теперь данный отрезок $AB < 2R$. Подбираем радиус d и строим окружности (A, d) и (B, d) так, чтобы расстояние между точками пересечения этих окружностей C и $Д$ было меньше $\frac{1}{2}R$, $CД \leqslant \frac{1}{2}R$ (рис. 3). Делим отрезок $CД$ пополам (см. случай a), получим точку X. Точка X делит отрезок AB пополам. Случай, когда $AB \geqslant 2R$, будет рассмотрен в задаче 4.

ЗАДАЧА 3. Первая основная операция. На данной прямой, заданной точками A и B, указать одну или несколько точек.

а) Строим (A, b) и (B, c), где b и c — произвольные отрезки. В пересечении окружностей получим две точки C и $Д$ симметричные относительно данной прямой. Произвольным радиусом d описываем (C, d) и $(Д, d)$, в пересечении получим искомые точки X и Y, лежащие на данной прямой.

Изменяя величину радиуса d и положения точек C и $Д$, можно на данной прямой построить любое количество точек.

Очевидно, что это построение возможно выполнить при условии: $AB < 2R$.

б) Если отрезок $AB \geqslant 2R$, то построение производится следующим образом:

Строим (B, R) и (A, d), где $d \leqslant R$ (рис. 4). Берем на дуге (A, d) точку C так, чтобы она лежала „приблизительно“ на прямой AB. Строим отрезок $AД = mAC$, причём m берем таким, чтобы точка $Д$ находилась в круге (B, R). Изменяя положение точки C на дуге (A, d), а если нужно, то и радиус d, всегда можно добиться того, что точка $Д$ будет лежать в круге (B, R)*.

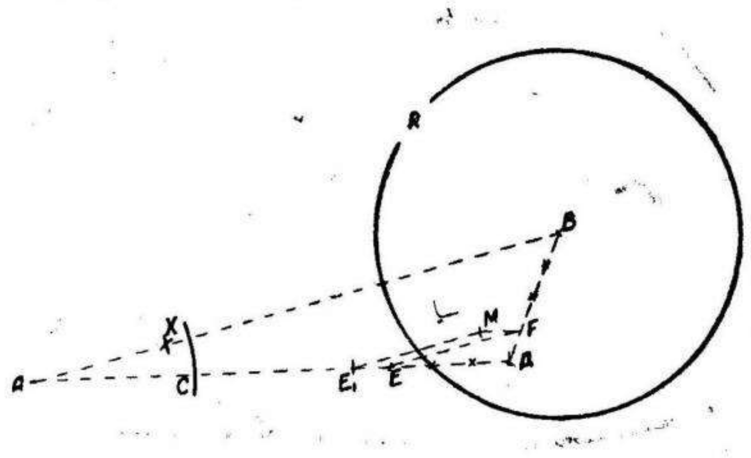

Рис. 4.

Пусть $AC = E_1Д = \frac{AД}{m}$. Возьмем число n целое, такое, что $2^{n-1} < m \leqslant 2^n$. На отрезке $ДB$ строим отрезок $ДF = \frac{1}{2^n}\, ДB$ (см. задачу 2). Делим отрезок $ДE_1$ на 2^n равных частей (см. задачу 2) и берем $ДE = \frac{m}{2^n}\, ДE_1$.

Строим (E_1EF) и (F, EE_1), получим точку M. Фигура ME_1EF — параллелограмм. Описываем (A, E_1M) и $(C, ДM)$, получим точку X. Точка X лежит на прямой AB.

Действительно,

$$\frac{AД}{ДE} = \frac{m \cdot AC}{\frac{m}{2^n} \cdot AC} = 2^n, \quad \frac{BД}{ДF} = 2^n, \text{ поэтому } \triangle AДB \sim \triangle ДEF.$$

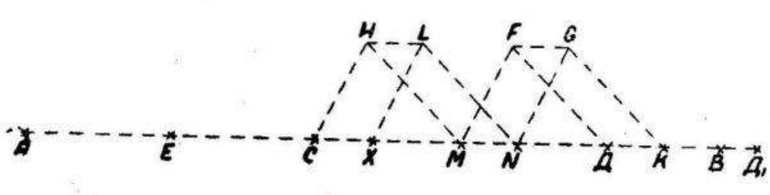

Рис. 5.

Следовательно, $\angle ДEF = \angle ДAB$, но $E_1M \parallel EF$, отсюда $\angle ДE_1M = \angle ДAB$. Точка X лежит на прямой AB.

Дальнейшее построение точек сводится к предыдущему случаю a).

Если $m = 2^n$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$, то построение упрощается, точка E совпадает с точкой E_1 и деление отрезка $E_1Д$ отпадает; точка M совпадает с точкой F и параллелограмм EE_1MF преобразуется в прямую E_1F. Поэтому, изменяя величину радиуса d, следует добиваться того, чтобы $m = 2^n$.

ЗАДАЧА 4. Разделить отрезок $AB \geqslant 2R$ на две равные части. Строим точку E на прямой AB (см. задачу 3). $AE \leqslant R$ (рис. 5). Строим отрезок $AД = m \cdot AE$ (см. задачу 1). Число m взято так, чтобы $AД \leqslant$

---

* Вместо окружности (B, R) лучше брать окружность $(B, \frac{1}{2}R)$ и $AC \leqslant \frac{1}{2}R$, тогда при делении отрезка $BД$ и $ДE_1$ на 2^n равных частей не придется применять случай б) задачи 2.

$\leqslant AB$, и $ДВ < R$. Если при этом m будет нечетным, то строим еще $ДД_1 = AE$, очевидно $АД_1 > AB$, а $ВД_1 < R$.

Пусть C — середина отрезка $АД$ (или $АД_1$, если m — нечетное). Делим отрезок $ВД$ (или $ВД_1$) точкой K пополам (см. задачу 2). Находим сумму отрезков AC и $ДK$ (или разность их, если m — нечетное), получим точку X. Точка X есть середина отрезка AB.

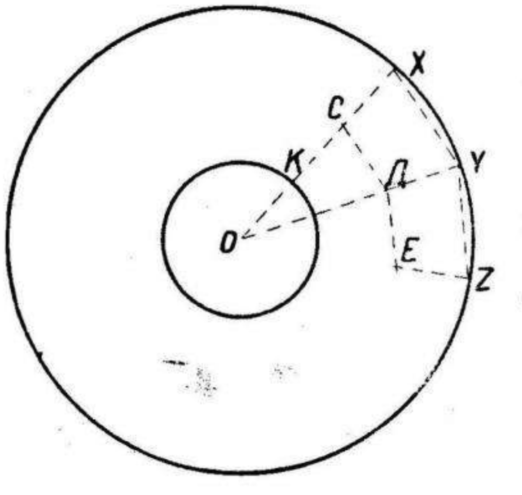

Рис. 6.

Построение отрезка $AX = AC + ДK$ (или $AX = AC - KД_1$) можно произвести следующим образом*: берем точку F вне прямой так, чтобы $ДF \leqslant R$ и $MF \leqslant R$ (где точка M — предпоследняя точка, получившаяся при построении отрезка $АД$, т. е. $ДМ = AE$). Строим параллелограмм $КДFG$, затем параллелограмм $MFGN$ и т. д., пока не дойдем до точки C и не построим искомой точки X.

Если $AX \geqslant 2R$, то делим его аналогично точкой Y пополам. Построим отрезок $\frac{1}{4}AB$, если $AX < 2R$, то делим его пополам обычным способом (см. задачу 2).

ЗАДАЧА 5. Вторая основная операция. На окружности, заданной центром O и радиусом AB, указать одну или несколько точек.

Если $AB \leqslant R$, то построение циркулем выполняется непосредственно.

Пусть $AB > R$. Строим отрезок $a = \frac{AB}{2^n}$ (см. задачи 2 и 4), причем n берем так, чтобы $a \leqslant R$. Описываем (O, a) (рис. 6), берем на этой окружности произвольно точку K и строим отрезок $OX = 2^n a$ (см. задачу 1). Точка X лежит на данной окружности. Изменяя положение точки K на (O, a), построим любое количество точек на данной окружности (O, AB).

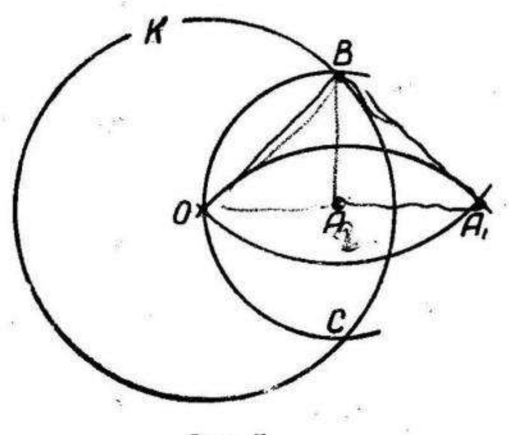

Рис. 7.

Если на окружности уже построено две точки X и Y, причем $XY < R$, то построение следующих точек, лежащих на данной окружности, можно производить следующим образом: строим (Y, YC) и $(Д, ДC)$, получим точку E, строим (Y, YA) и $(E, ДY)$, получим точку Z. Точка Z лежит на данной окружности.

Справедливость построения следует из того, что

$$OX = 2^n a = 2^n \frac{AB}{2^n} = AB.$$

ЗАДАЧА 6. Построить точку, инверсную данной точке A, от-

* Построение суммы и разности отрезков можно выполнить иначе (см. Адлер „Теория геометрических построений“. Одесса, 1924. Гл. 3, § 17).

носительно окружности инверсии (O, k), где $k \leqslant R$. Требуется на прямой OA построить точку A_1 так, чтобы $OA_1 \cdot OA = k^2$.

а) Строим (A, OA) (рис. 7), в пересечении с окружностью инверсии (O, k) получим точки B и C. Описываем (B, k) и (C, k), получим A_1. Точка A_1 — искомая.

Действительно, $\triangle AOB \sim \triangle OBA_1$, поэтому $\frac{BO}{AO} = \frac{A_1O}{BO}$,

$$\overline{AO} \cdot \overline{A_1O} = \overline{BO^2} = k^2.$$

Построение возможно, если $\frac{k}{2} < OA \leqslant R$.

б) Если $OA \leqslant \frac{k}{2}$, то строим $OA_1 = m \cdot OA > \frac{1}{2} \cdot k$. Строим точку A'_1, инверсную точке A_1 (см. случай *а*). Строим отрезок $OA_2 = m \cdot OA'_1$. Точка A_2 — искомая.

Действительно, $\overline{OA}_2 = m \cdot \overline{OA}'_1 = m \cdot \frac{k^2}{OA_1} = m \frac{k^2}{m \cdot OA} = \frac{k^2}{OA}$.

в) Пусть теперь $OA > R$. Строим отрезок $OA_1 = \frac{1}{2^n} OA$ (см. задачу 4) так, чтобы $OA_1 < R$. Находим точку A, инверсную точке A_1 (случай *а*). Строим отрезок $OA_2 = \frac{1}{2^n} OA$ (см. задачу 2). Точка A_2 инверсная точке A относительно окружности инверсии (O, k).

Действительно, $\overline{OA}_1' \cdot \overline{OA}_1 = k^2$ или

$$2^n \cdot \overline{OA_2} \cdot \frac{\overline{OA}}{2^n} = \overline{OA} \cdot \overline{OA_2} = \overline{k^2}.$$

ЗАДАЧА 7. Построить току C, симметричную данной точке C_1, относительно данной прямой AB.

а) Описывая (A, AC) и (B, BC), в пересечении получим искомую точку C_1.

Построение возможно, если $AC \leqslant R$ и $BC \leqslant R$.

б) Пусть теперь $AC > R$ и $BC > R$ или пусть имеет место одно из неравенств.

Находим на данной прямой точки A и B (рис. 8), расстояние между которыми меньше $2R$ (см. задачу 3). Берем в плоскости произвольно точку F, $(CF \leqslant R)$ и строим отрезок $CД = m \cdot CF$ (см. задачу 1). При этом m и точку F выбираем так, чтобы $AД \leqslant R$, $AE \leqslant R$, $BД \leqslant R$ и $BE \leqslant R$, где E — точка на прямой CF и $CE = (m-1)CF$.

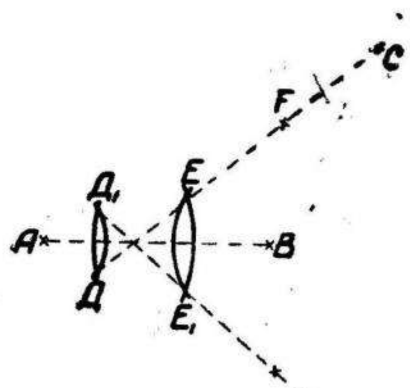

Рис. 8.

Строим точку $Д_1$, симметричную точке $Д$, и точку E_1, симметричную точке E относительно прямой AB. Строим отрезок $Д_1C_1 = m\,Д_1E_1$. Точка C_1 — искомая. Справедливость построения очевидна из симметрии фигуры построения относительно данной прямой.

ЗАДАЧА 8. Построить окружность, инверсную данной прямой AB относительно окружности инверсии (O, k), где $k \leqslant R$.

Окружность, инверсная данной прямой AB, проходит через полюс инверсии O, поэтому необходимо построить только центр искомой окружности, лежащей на перпендикуляре, опущенном из полюса инверсии на данную прямую.

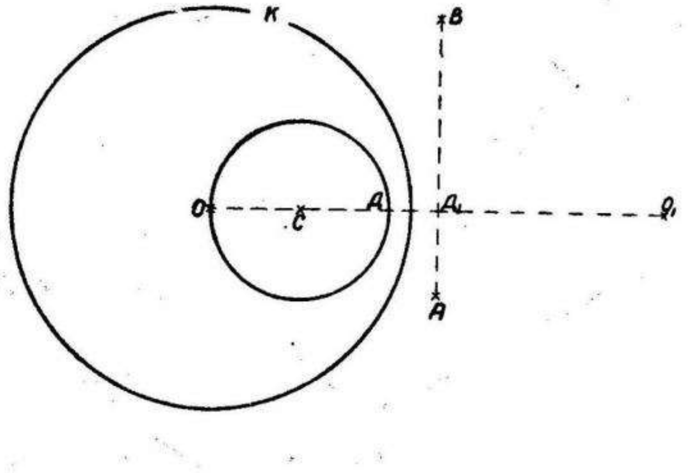

Рис. 9.

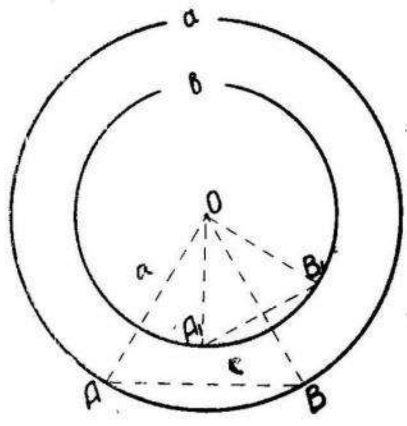

Рис. 10.

Строим точку O_1, симметричную точке O относительно прямой AB. (см. задачу 7). Находим точку C, инверсную точке O_1 относительно окружности инверсии (O, k) (рис. 9). Точка C — центр искомой окружности. Действительно:

$$\overline{OД} \cdot \overline{OД}_1 = \tfrac{1}{2}\,\overline{OД} \cdot 2\,\overline{OД} = \overline{OC} \cdot \overline{OO}_1 = k^2;\ \overline{OД}_1 \perp \overline{AB}.$$

ЗАДАЧА 9. К трем данным отрезкам a, b и c построить четвертый им пропорциональный.

Из произвольной точки O описываем (O, a) и (O, b). На окружности (O, a) откладываем хорду $AB = c$ и строим $AA_1 = BB_1$ (рис. 10). Тогда из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 следует:

$$a : b = c : \overline{A_1B_1}.$$

Если $c \geqslant 2a$, то строим отрезок $c_1 = \frac{1}{2^n}\,a < 2a$ и находим четвертый пропорциональный к отрезкам a, b и c_1. Увеличивая найденный отрезок в 2^n раз (см. задачу 1), получим искомый отрезок, который является четвертым пропорциональным к данным отрезкам a, b и c.

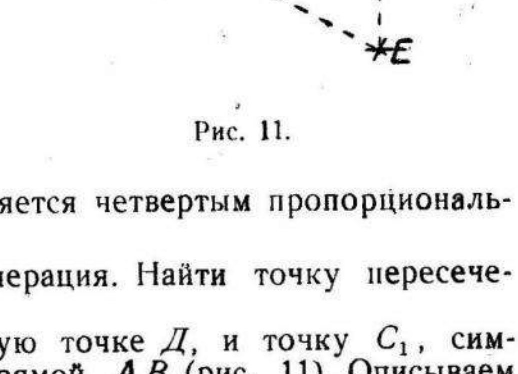

Рис. 11.

ЗАДАЧА 10. Третья основная операция. Найти точку пересечения двух данных прямых AB и $СД$.

а) Строим точку $Д_1$, симметричную точке $Д$, и точку C_1, симметричную точке C относительно прямой AB (рис. 11). Описываем $(C, СД)$ и $(Д_1, CC_1)$, в пересечении получим точку E. $CC_1Д_1E$ — параллелограмм. Строим четвертый пропорциональный отрезок d к отрезкам $ДЕ$, $ДД_1$ и $СЕ$ (см. задачу 9). Описываем $(Д, d)$ и $(Д_1, d)$, получим искомую точку X пересечения данных прямых.

Действительно, точка E лежит на прямой $ДД_1$, $\triangle СДЕ \sim \triangle ДД_1X$, поэтому $\overline{ДЕ} : \overline{ДД_1} = \overline{СЕ} : \overline{Д_1X}$.

Построение возможно, если все окружности, описываемые в этом построении, будут иметь радиус, меньший R, но последнее условие всегда можно сделать, подобрав для этого точки A и B, C и $Д$, которыми задаются данные прямые (см. задачу 3).

б) Берем вблизи данных прямых окружность инверсии (O, k), $k \leqslant R$, которая не пересекает данных прямых. Строим окружности, инверсные данным прямым (см. задачу 8); пусть они пересекаются в точке E. Находим точку X, инверсную точке E относительно окружности инверсии (O, k). Точка X — искомая точка пересечения данных прямых.

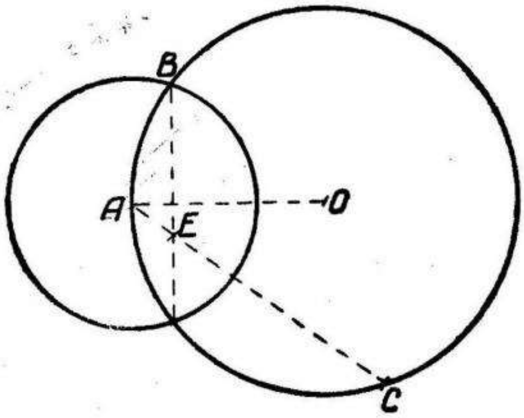

Рис. 12.

Действительно, точка E — является точкой пересечения окружностей, инверсных данным прямым, следовательно, точка X, как точка инверсная точке E, есть точка пересечения данных прямых.

ЗАДАЧА 11. Построить центр окружности, проходящей через три заданные точки A, B и C.

а) Находим точку O пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам отрезков AB и BC (см. задачу 10).

Если $AB \geqslant 2R$, то делим отрезок на 2^n равных частей (см. задачу 2 и 4), $\frac{1}{2^n}\,\overline{AB} < R$; берем два средних отрезка, например, $ДЕ$ и $ЕН$, восстанавливаем перпендикуляр к середине отрезка $ДН$.

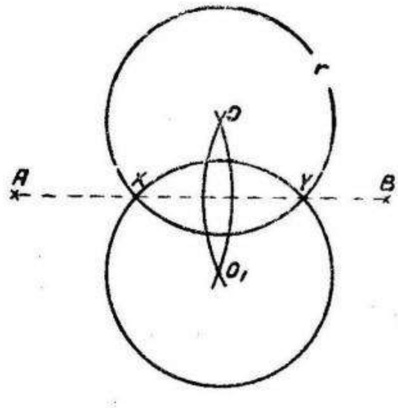

Рис. 13.

б) Если окажется, например, $AB \leqslant R$, то центр окружности можно найти следующим образом:

Берем (A, AB) за окружность инверсии и строим точку E, инверсную точке C (см. задачу 6), (рис. 12). Находим центр O окружности инверсной прямой BE (см. задачу 8). Точка O — центр искомой окружности, проходящей через три данные точки A, B и C.

Справедливость построения легко доказывается при помощи основных свойств инверсии.

ЗАДАЧА 12. Построить окружность, инверсную данной окружности (O', r) относительно окружности инверсии (O, k).

а) Берем на данной окружности произвольно три точки A, B и C (см. задачу 5). Находим точки A_1, B_1 и C_1, инверсные точкам A, B,

C относительно окружности инверсии (O, k) (см. задачу 6). Находим центр окружности, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1 (см. задачу 10). Построенная окружность является искомой окружностью.

б) Если радиус данной окружности меньше R, то построение можно выполнить следующим образом:

Берем данную окружность (O', r) за окружность инверсии и строим точку $Д$, инверсную точке O (см. задачу 6). Находим точку O_1, инверсную точке $Д$, но уже относительно окружности инверсии (O, k) (рис. 14). Точка O_1 — центр искомой окружности. Строим точку A_1, инверсную точке A, относительно окружности инверсии $(O, к)$. O_1A_1 — радиус искомой окружности.

Действительно, если OE — общая касательная окружности данной и окружности ей инверсной, и $ДE \perp OO'$, то

$$\triangle OO_1E_1 \sim \triangle OДE, \text{ а } \triangle OO'E \sim \triangle ДEO'.$$

Отсюда следует:

$$\frac{OO_1}{OE_1} = \frac{OE}{OД} \text{ и } \frac{OO'}{EO'} = \frac{EO'}{ДO'} \text{ или } \overline{OO}_1 \cdot \overline{OД} = \overline{OE} \cdot \overline{OE}_1 = k^2,$$

так как точка E_1 инверсная точке E относительно окружности (O, k). $\overline{OO'} \cdot \overline{ДO'} = (\overline{EO'})^2 = r^2$, то есть точка O_1 (центр искомой окружности) инверсная точке $Д$ относительно окружности инверсии $(O, к)$, а точка $Д$ инверсная точке O относительно окружности (O, r).

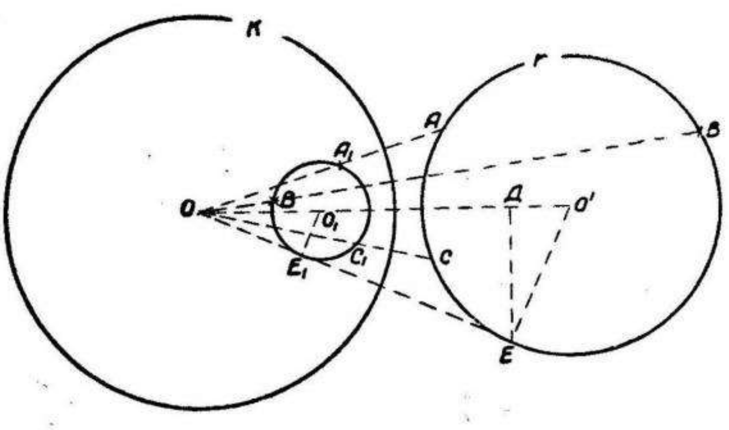

Рис. 14.

ЗАДАЧА 13. Четвертая основная операция. Найти точку пересечения данной прямой AB и данной окружности (O, r).

а) Строим точку O_1, симметричную точке O, относительно прямой AB (см. задачу 7). Описываем (O_1, r), в пересечении с данной окружностью получим искомые точки X и Y (рис. 13).

Построение возможно, если $r \leqslant R$ и прямая не проходит через центр данной окружности.

б) Пусть теперь $r > R$ или прямая проходит через центр окружности. Берем (O, k), $k \leqslant R$ за окружность инверсии и находим окружности, инверсные данной прямой и данной окружности (см. задачи 8 и 12). Пусть построенные окружности пересекаются в точках X_1 Y_1. Находим точки X и Y, инверсные точкам X_1 и Y_1 относительно окружности инверсии (O, k). Точки X и Y являются искомыми точками пересечения данной прямой и данной окружности.

Справедливость последнего построения легко доказать при помощи основных свойств инверсии.

ЗАДАЧА 14. Пятая основная операция. Найти точки пересечения двух данных окружностей (O, OA) и (O_1, O_1B).

а) Если $OA \leqslant R$ и $O_1B \leqslant R$, то задача циркулем выполняется непосредственно.

б) Пусть, например, $OA \leqslant R$, а $O_1B > R$. Берем (O, OA) за окружность инверсии и строим окружность (O_2, O_2O), инверсную окружности (O_1, O_1B). В пересечении окружностей (O, OA) и (O_2, O_2C) получим искомые точки X и Y.

Действительно, окружность (O, OA) сама себе инверсна.

в) Пусть $OA > R$ и $O_1B > R$. Берем (O, k), $k \leqslant R$ за окружность инверсии и строим окружности, инверсные данным (см. задачу 12), в пересечении последних получим точки X_1 и Y_1. Находим точки X и Y, инверсные точкам X_1 и Y_1, относительно окружности инверсии (O, k). Точки X и Y — искомые точки пересечения данных окружностей. Справедливость построения легко доказать при помощи основных свойств инверсии.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующий вывод.

Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, сводятся к выполнению пяти основных операций, расположенных в определенном порядке.

Все основные операции можно выполнить одним циркулем с ограниченным раствором ножек, поэтому *все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно построить и одним циркулем с ограниченным раствором ножек.*