Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

И. А. ПРУСОВ

ВЛИЯНИЕ ПРУЖИНЫ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

В данной задаче рассматривается влияние жесткости пружины, вставленной между канатом и концевым грузом, на динамические напряжения в канате постоянного поперечного сечения в том случае, когда концевому грузу, висящему на канате и пружине, внезапно сообщена скорость v_0. Весом пружины и упругостью подъемного сосуда пренебрегается.

Рис. 1.

Разделяя перемещение на динамическую и статическую часть, из дифференциального уравнения продольных колебаний каната для динамических перемещений имеем волновое уравнение [1]

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Явное выражение для $U(x, t)$ найдем, подчинив решение уравнения (1), взятое в произвольных функциях, следующим начальным и граничным условиям:

$$U(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

$$U_1(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad (l \leqslant x \leqslant l+a) \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l+a} = v_0 \ (4); \quad U(x,t)\big|_{x=0} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{x=l+a} + ka\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l+a} = 0 \tag{6}$$

$$E_k \omega_{ж} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = ka\frac{\partial U_1(x,l)}{\partial x}\Big|_{x=l} \tag{7}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l} = \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l}, \tag{8}$$

где

$U(x, t)$ — динамическая часть перемещения вдоль оси OX поперечного сечения каната в сечении x,
$U_1(x, t)$ — динамическая часть перемещения в сечении x пружины;

Q — вес концевого груза;
p — вес каната;
g — ускорение силы тяжести

$$c^2 = \frac{E_k \omega_{ж} g}{q} = \frac{E_k}{\rho_k};$$

E_k — модуль упругости каната;
ρ_k — плотность единицы длины каната;
q — вес единицы длины каната;
$\omega_{ж}$ — площадь сечения всех проволок каната;
l — длина каната;
k — жесткость пружины;
a — длина пружины.

Как известно [1] функция перемещения любого поперечного сечения каната, находящегося на расстоянии x от его закрепленного конца, удовлетворяющая уравнению (1) и граничному условию (5), выражается через одну произвольную функцию и имеет вид

$$U(x, t) = f(ct - x) - f(ct + x). \tag{9}$$

Перемещение в сечении x пружины можно представить в виде суммы, составленной из перемещения нижнего конца каната и удлинения пружины на участке $x - l$, то есть

$$U_1(x, t) = f(ct - l) - f(ct + l) + \frac{x - l}{ak} S(t), \tag{10}$$

где $S(t)$ — сила, растягивающая пружину и действующая на нее со стороны концевого груза.

Подставив в граничные условия (6) и (7) значения перемещений из (9) и (10) и затем исключив $S(t)$, получим основное уравнение

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = -rmlf'''(z - 2l) + \\ + mlf''(z - 2l) - f'(z - 2l), \tag{11}$$

в котором введены обозначения

$$f(z) = f(ct + l),\ f(z - 2l) = f(ct - l),\ r = \frac{E_k \omega_{ж}}{k},\ m = \frac{Q}{p}. \tag{12}$$

Из уравнений (2) и (9), принимая во внимание обозначения (12), найдем

$$f'(z) = 0 \quad (-l \leqslant z \leqslant l). \tag{13}$$

Условия (3) и (8), как легко видеть, выполняются.

Уравнение (11) дает возможность определить значение функции $f(z)$ в любом последующем интервале изменения ее аргумента z, если известно ее значение в предыдущем интервале. Для определения $f(z)$ в интервале $l \leqslant z \leqslant 3l$, учитывая, что на основании (13) $f'(z - 2l) = 0$, имеем дифференциальное уравнение

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = 0. \tag{14}$$

Решение этого уравнения берем в виде*

$$f'(z) = A_2 e^{\lambda_1(z-l)} + B_1 e^{\lambda_2(z-l)}, \tag{15}$$

где $\lambda_1 = -\frac{1-\varkappa}{2r}$ и $\lambda_2 = -\frac{1+\varkappa}{2r}$ — корни характеристического уравнения

$$rml\lambda^2 + ml\lambda + 1 = 0 \tag{16}$$

$$\varkappa = +\sqrt{1 - \frac{4r}{ml}},$$

принимающие для реальных шахтных канатов и практически возможных пружин действительные значения. Произвольные постоянные A_1 и B_1 определим из условий

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l+a} = v_0, \quad \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{\substack{t=+0\\ x=l+a}} = 0, \tag{17}$$

выражающих, что в начальный момент времени скорость концевого груза равна v_o, а его ускорение равно нулю. Из этих условий, принимая во внимание, что на основании (9), (7) и (10)

$$U_1(x,t) = f(ct-l) - f(ct+l) - \frac{x-l}{a} r[f'(ct-l) + f'(ct+l)], \tag{18}$$

получим:

$$f'(-l+o) - f'(l+o) - r[f''(-l+o) + f''(l+o)] = \frac{v_0}{c},$$

$$f''(-l+o) - f''(l+o) - r[f'''(-l+o) + f'''(l+o)] = O.$$

Так как из (13) и (15) следует, что

$$f'(-l+o) = f''(-l+o) = f'''(-l+o) = O,$$

$$f'(l+o) = A_1 + B_1,\ f''(l+o) = A_1\lambda_1 + B_1\lambda_2,\ f'''(l+o) = = A_1\lambda_1^2 + B_1\lambda_2^2, \tag{19}$$

то для определения A_1 и B_1 имеем систему уравнений

$$A_1(r\lambda_1 + 1) + B_1(r\lambda_2 + 1) = -\frac{v_0}{c},$$

$$A_1(r\lambda_1 + 1)\lambda_1 + B_1(r\lambda_2 + 1)\lambda_2 = 0,$$

из которой найдем

$$A_1 = -\frac{v_0}{c\varkappa}, \quad B_1 = \frac{v_0}{c\varkappa}. \tag{20}$$

Таким образом, для аргумента z, изменяющегося в интервале $l \leqslant z \leqslant 3l$,

$$f'(z) = \frac{v_0}{c\varkappa}\left[-e^{\lambda_1(z-l)} + e^{\lambda_2(z-l)}\right]. \tag{21}$$

---

* Так как мы ставим своей целью определение напряжений, зависящих от $f'(z)$ и не интересуемся перемещениями, то все уравнения, получающиеся из основного, будем интегрировать, находя $f'(z)$.

Для функции $f'(z)$, определяемой в интервале $3l \leqslant z \leqslant 5l$ из основного уравнения (11) и соотношения (21), имеем дифференциальное уравнение

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) =$$
$$= -\frac{v_0}{c\varkappa}\left[-rml\lambda_1^2 + ml\lambda_1 - 1\right] e^{\lambda_1(z-3l)} +$$
$$+ \frac{v_0}{c\varkappa}\left[-rml\lambda_2^2 + ml\lambda_2 - 1\right] e^{\lambda_2(z-3l)}.$$

Принимая во внимание, что λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (16), из последнего уравнения получим:

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = -\frac{2v_0ml\lambda_1}{c\varkappa} e^{\lambda_1(r-3l)} +$$
$$+ \frac{2v_0ml\lambda_2}{c\varkappa} e^{\lambda_2(z-3l)}. \tag{22}$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$f'(z) = A_1 e^{\lambda_1(z-l)} + \left[a_1(z-3l) + a_2\right] e^{\lambda_1(z-3l)} +$$
$$+ B_1 e^{\lambda_2(z-l)} + \left[b_1(z-3l) + b_2\right] e^{\lambda_2(z-3l)}. \tag{23}$$

Требуя, чтобы оно удовлетворяло уравнению (22), найдем:

$$a_1 = -\frac{2v_0\lambda_1}{c\varkappa^2}, \quad b_1 = -\frac{2v_0\lambda_2}{c\varkappa^2}. \tag{24}$$

Произвольные постоянные a_2 и b_2 определим из уравнений

$$\left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}-0\\ x=l+a}} = \left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}+0\\ x=l+a}},$$
$$\left.\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}-0\\ x=l+a}} = \left.\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}+0\\ x=l+a}}, \tag{25}$$

физически выражающих условия непрерывности скорости и ускорения концевого груза Q в момент времени $t = \frac{2l}{c}$.

Подставив в уравнения (25) значение U_1 из (18), получим следующую систему уравнений:

$$f'(l+o) - f'(3l+o) - r[f''(l+o) + f''(3l+o)] =$$
$$= f'(l-o) - f'(3l-o) - r[f''(l-o) + f''(3l-o)], \tag{26}$$
$$f''(l+o) - f''(3l+o) - r[f'''(l+o) + f'''(3l+o) =$$
$$= f''(l-o) - f''(3l-o) - r[f'''(l-o) + f'''(3l-o)],$$

из которой после подстановки соответствующих значений производных функции $f(z)$ из соотношений (13), (21) и (23) найдем:

$$a_2 = A_1\left(\frac{2}{\varkappa^2} - 1\right), \quad b_2 = -A_1\left(\frac{2}{\varkappa^2} - 1\right). \tag{27}$$

Таким образом, функция $f'(z)$ для аргумента z, изменяющегося в интервале $3l \leqslant z \leqslant 5l$, найдена. Ее значение может быть использовано для определения функции $f'(z)$ в следующем интервале и т. д.

При этом всякий раз при определении произвольных постоянных интегрирования следует исходить из условия непрерывности скорости и ускорения концевого груза. Так, например, для отыскания функции $f'(z)$ в интервале $(2n-1)l \leqslant z \leqslant (2n+1)l$ эти условия запишутся в виде:

$$\left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{t=\frac{2ln}{c}-0 \\ x=l+a}} = \left.\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{t=\frac{2ln}{c}+0 \\ x=l+a}}, \quad \left.\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\right|_{\substack{t=\frac{2ln}{c}-0 \\ x=l+a}} =$$

$$= \left.\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2}\right|_{\substack{t=\frac{2ln}{c}+0 \\ x=l+a}}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Поступая таким образом, для z, изменяющегося в интервале $5l \leqslant z \leqslant 7l$, найдем:

$$\begin{gathered} f'(z) = A_1 e^{\lambda_1(z-l)} + [a_1(z-3l) + a_2]\, e^{\lambda_1(z-3l)} + \\ + [a_3(z-5l)^2 + a_4(z-5l) + a_5]\, e^{\lambda_1(z-5l)} + B_1 e^{\lambda_2(z-l)} + \\ + [b_1(z-3l) + b_2]\, e^{\lambda_2(z-3l)} + [b_3(z-5l)^2 + \\ + b_4(z-5l) + b_5]\, e^{\lambda_2(z-5l)}, \end{gathered} \tag{28}$$

где

$$a_3 = \frac{2\lambda_1^2}{\varkappa^2} A_1, \quad b_3 = \frac{2\lambda_2^2}{\varkappa^2} B_1, \quad a_4 = \frac{2\lambda_1(3-2\varkappa)(1+\varkappa)}{\varkappa^3} A_1,$$

$$b_4 = -\frac{2\lambda_2(3+2\varkappa)(1-\varkappa)}{\varkappa^3} B_1, \quad a_5 = (\varkappa^4 - 6\varkappa^2 + 6)\frac{A_1}{\varkappa^4}, \quad b_5 =$$

$$= (\varkappa^4 - 6\varkappa^2 + 6)\frac{B_1}{\varkappa^4}. \tag{29}$$

Как известно, напряжения через перемещения выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = E_k \frac{\partial U}{\partial x} = -E_k[f'(ct-x) + f'(ct+x)]. \tag{30}$$

Так, для верхнего конца каната, принимая во внимание (13), (21), (23), (24), (28) и (29), получим следующие выражения для динамических напряжений.

$$\sigma_0^{(din)} = 0 \quad (0 \leqslant ct \leqslant l);$$

$$\sigma_0^{(din)} = \frac{2E_k v_0}{c\varkappa}\left[e^{\lambda_1(ct-l)} - e^{\lambda_2(ct-l)}\right] \ (l \leqslant ct \leqslant 3l);$$

$$\sigma_0^{(din)} = \frac{2E_k v_0}{c\varkappa}\left\{e^{\lambda_1(ct-l)} + \left[\frac{2\lambda_1}{\varkappa}(ct-3l) + \frac{2}{\varkappa^2} - 1\right] e^{\lambda_1(ct-3l)}\right\} -$$

$$-\frac{2E_k v_0}{c\varkappa}\left\{e^{\lambda_2(ct-l)}+\left[-\frac{2\lambda_2}{\varkappa}(ct-3l)+\frac{2}{\varkappa^2}-1\right]e^{\lambda_2(ct-3l)}\right\}(3l\leqslant ct\leqslant 5l);$$

$$\sigma_0^{(din)}=\frac{2E_k v_0}{c\varkappa}\left\{e^{\lambda_1(ct-l)}+\left[\frac{2\lambda_1}{\varkappa}(ct-3l)+\frac{2}{\varkappa^2}-1\right]e^{\lambda_1(ct-3l)}+\right.$$

$$+\left[\frac{2\lambda_1^2}{\varkappa^2}(ct-5l)^2+\frac{2(1+\varkappa)(3-2\varkappa)}{\varkappa^3}\lambda_1(ct-5l)+1+\right.$$

$$\left.+\frac{6(1-\varkappa^2)}{\varkappa^4}\right]e^{\lambda_1(ct-5l)}\Bigg\}-\frac{2E_k v_0}{c\varkappa}\left\{e^{\lambda_2(ct-l)}+\left[-\frac{2\lambda_2}{\varkappa}(ct-3l)+\frac{2}{\varkappa^2}-1\right]e^{\lambda_2(ct-3l)}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{2\lambda_2^2}{\varkappa^2}(ct-5l)^2-\frac{2(1-\varkappa)(3+2\varkappa)}{\varkappa^3}\lambda_2(ct-5l)+1+\frac{6(1-\varkappa^2)}{\varkappa^4}\right]e^{\lambda_2(ct-5l)}\right\}$$

$$(5l\leqslant ct\leqslant 7l).$$

Эти формулы можно представить в более удобной для расчетов форме, если, как это следует из соотношений

$$\lambda_1=-\frac{1-\varkappa}{2r},\quad \lambda_2=-\frac{1+\varkappa}{2r},\quad \varkappa=\sqrt{1-\frac{4r}{ml}},\quad \alpha=\frac{1}{m},$$

принять во внимание, что

$$\lambda_1 l=-\frac{2\alpha}{1+\varkappa},\quad \lambda_2 l=-\frac{2\alpha}{1-\varkappa}.$$

Из выражения для корней характеристического уравнения легко видеть, что, если $r=\frac{E_k\omega_{ж}}{k}$ — отношение жесткости каната к жесткости пружины весьма мало или равно нулю (в этом случае пружину можно считать абсолютно жесткой), то

$$\lambda_1=\frac{-1+\varkappa}{2r}\approx\frac{-1+\left(1-\frac{2r}{ml}\right)}{2r}=-\frac{1}{ml}=\lambda.$$

Корень $\lambda_2\approx-\frac{1}{r}+ml$ стремится к минус бесконечности при r, стремящемся к нулю. Следовательно, приведенные выше формулы для динамических напряжений при $\varkappa\to 1$ тождественно совпадают с соответствующими формулами [1], когда между канатом и концевым грузом пружина отсутствует.

Для заданного веса концевого груза Q и заданных характеристик каната (E_k, $\omega_{ж}$, q), если пружина работает на сжатие и полностью сжимается на L *см* от статически приложенного груза, в n раз большего веса концевого груза, как это следует из введенных выше обозначений, величину $\varkappa$ можно записать в виде:

$$\varkappa=\sqrt{1-\frac{4E_k\omega_{ж}q}{Q^2}\cdot\frac{L}{n}}.$$

Например, для каната с данными

$$E_k=1{,}21\cdot 10^6\,\frac{кг}{см^2},\quad \omega_{ж}=2{,}29\,см^2,\quad q=2{,}08\,\frac{кг}{м},\quad Q=3300\ кг.$$

$$\varkappa = \sqrt{1 - 0{,}0212\frac{L}{n}}$$

и при $n = 4$, $L \leqslant 68$ *см* $\varkappa$ изменяется в пределах $08 \leqslant \varkappa \leqslant 1$.

Из приведенной таблицы, составленной для $\varkappa = 09$ и различных значений отношения веса каната к весу концевого груза, следует:

1. Влияние жесткости пружины на максимальные динамические напряжения в канате тем большее, чем меньше отношение веса каната к весу концевого груза, т. е. чем короче длина каната;

2. Применением пружины можно значительно понизить максимальные динамические напряжения в канатах (особенно в коротких), возникающие из-за внезапного сообщения скорости концевому грузу.

Значения $\eta = \dfrac{\sigma_0^{(din)}}{E_k \dfrac{v_0}{c}}$ для различных значений $\alpha = \dfrac{P}{Q}$ ($\varkappa = 0{,}9$)

$\frac{ct}{l}$ \ $\alpha = \frac{P}{Q}$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,5
1 − 0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1 + 0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,5	1,291	1,699	1,787	1,693	1,614	1,459	1,312	1,182	1 064	1,009
2,0	1,699	1,760	1,614	1,312	1,182	0,957	0,776	0,628	0,509	0,458
2,5	1,787	1,614	1,384	1,009	0,862	0,628	0,458	0,334	0,244	0,208
3 − 0	1,760	1,459	1,182	0,776	0,628	0,412	0,271	0,178	0,112	0,095
3 + 0	1,760	1,459	1,182	0,776	0,628	0,412	0,271	0,178	0,112	−0,095
3,5	1,527	2,005	2,221	1,918	1,620	1,034	0,553	0,172	−0,122	−0,245
4,0	2,308	2,553	2,024	0,849	0,411	−0,207	−0,580	−0,791	−0,893	−0,915
4,5	2,759	2,299	1,306	0,065	−0,305	−0,724	−0,878	−0,889	−0,826	−0,781
5 − 0	2,840	1,721	0,706	−0,404	−0,663	−0,861	−0,836	−0,722	−0,588	−0,520
5 + 0	2,840	1,721	0,706	−0,404	−0,663	−0,861	−0,836	−0,722	−0,588	−0,520
5,5	2,462	0,879	0,487	0,430	0,281	−0,161	−0,537	−0,791	−0,952	−0,980
6,0	2,099	1,673	0,996	−0,636	−1,096	−1,455	−1,374	−1,114	−0,805	−0,626
6,5	2,446	1,605	0,061	−1,475	−1,608	−1,352	−0,819	−0,305	0,046	0,274
7 − 0	2,762	0,905	−0,781	−1,641	−1,455	−0,779	−0,117	0,341	0,594	0,669
η_{max}	3,074	2,553	2,340	2,009	1,888	1,788	1,788	1,788	1,788	1,788
$\frac{ct}{l}$	5,133	4,000	3,650	3,400	3,320	1,200	1,160	1,133	1,114	1,107
↓	41	31	32	36	38	34	27	22	19	17

$$\frac{\eta_{max}/_{\varkappa=1} - \eta_{max}/_{\varkappa=0,9}}{\eta_{max}/_{\varkappa=0,9}} \cdot 100\%.$$

Работа выполнена под руководством действительного члена АН УССР Г. Н. Савина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. — Динамическая теория расчета шахтных подъемных канатов. Изд. АН УССР, Киев, 1949.