Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXIX, 1954 Серия механико-математическая Выпуск 1 (6)

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

При решении задачи изгиба плиты с подкрепленным круговым отверстием существенное упрощение получается, если рассматривать подкрепляющее кольцо как упругий стержень, поведение которого описывается уравнениями малых деформаций тонких криволинейных стержней [1,2, 4]. В настоящей работе, являющейся продолжением работы [2], это показано применительно к изгибу бесконечной тонкой изотропной плиты, в круговое отверстие которой впаяно тонкое упругое кольцо из другого материала.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Плита изгибается известными усилиями на бесконечности. Вдоль осевой линии L радиуса $r=R$, подкрепляющего кольца, действуют заданные, как функции полярного угла Θ, внешние поперечные усилия $p_2(\Theta)$ и изгибающие моменты $m_2(\Theta)$, главный вектор и главный момент которых равны нулю.

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, через которые выражается прогиб $w(x, y)$ срединной плоскости плиты примем в виде:

$$\varphi_1(z)=\varphi^\circ(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{-k}\frac{R^k}{z^k},$$
$$\psi_1(z)=\psi^\circ(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{-k}\frac{R^k}{z^k}, \tag{1,1}$$

где $\varphi^\circ(z)$ и $\psi^\circ(z)$ — известные функции, соответствующие прогибу сплошной плиты, неослабленной отверстием. Вторые слагаемые в правых частях (1,1) соответствуют дополнительному прогибу, вызванному наличием отверстия и кольца.

Неизвестные коэффициенты α_{-k} и β_{-k} функций (1,1) являются, вообще говоря, комплексными числами. α_{-1} — вещественное число. Для определения этих коэффициентов воспользуемся условием сопряжения между плитой и кольцом по контуру L, т. е. при $r=R$ [2].

$$\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=-\frac{1}{2}[\gamma_1(\Theta)-i\gamma_2(\Theta)]e^{i\Theta}, \tag{1,2}$$

где $\gamma_1(\Theta)=-\partial w/\partial r$ — угол поворота радиального сечения кольца вокруг касательной к контуру L, $\gamma_2(\Theta)=\partial w/\partial s$ — угол поворота касательной к контуру L вокруг его нормали в данной точке, s — дуга контура L.

Функции $\gamma_1(\Theta)$ и $\gamma_2(\Theta)$ определяются из решения задачи о малых деформациях тонкого упругого кольца постоянного поперечного сечения. Они зависят от полной нагрузки (внутренней, со стороны плиты, и внешней), действующей на кольцо, и от жесткости кольца на изгиб и кручение:

$$A=E_1I_1,\ C=G_1I_k, \tag{1,3}$$

где E_1 и G_1 — модуль упругости и модуль сдвига материала кольца, I_1 — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно главной оси, лежащей в срединной плоскости; I_k — величина, имеющая для каждого вида поперечного сечения кольца специальное значение, известное из теории кручения.

Предположим, что функции $\varphi^\circ(z)$ и $\psi^\circ(z)$ в (1,1) имеют вид полиномов

$$\varphi^\circ(z)=\sum_{\kappa=1}^{m} B_k\frac{z^k}{R^k}, \qquad \psi^\circ(z)=\sum_{\kappa=0}^{m} A_k\frac{z^k}{R^k}, \tag{1,4}$$

где A_k и B_k — известные комплексные числа. B_1 — вещественное число.

Кроме того, предположим возможность разложения внешних усилий $p_2(\Theta)$ и $m_2(\Theta)$ в комлексные ряды Фурье в виде

$$m_2(\Theta)=\frac{D}{R}\sum_{-\infty}^{+\infty} M_k\sigma^k, \qquad p_2(\Theta)=\frac{D}{R^2}\sum_{-\infty}^{+\infty} P_k\sigma^k,$$

где $\sigma=e^{i\Theta}$, $D=Eh^3/_{12(1-\nu^2)}$ — жесткость плиты при изгибе, h, E, ν — толщина плиты, модуль упругости, коэффициент Пуассона. Тогда, обозначив

$$\delta_1=\frac{A}{RD}=\frac{E_1I_1}{RD}, \qquad \delta_2=\frac{C}{RD}=\frac{G_1I_k}{RD}, \tag{1,5}$$

можно записать правую часть (1,2) в виде

$$-\frac{1}{2}[\gamma_1(\Theta)-i\gamma_2(\Theta)]e^{i\Theta}=\sum_{-\infty}^{+\infty} g_k\sigma^k, \tag{1,6}$$

где (см. формулы (1,29) работы [2])

$$g_0=-\frac{m_{-1}}{2(\delta_1+\delta_2)},\quad g_1=-\frac{m_0}{2\delta_1},\quad g_2=-\frac{m_1}{2(\delta_1+\delta_2)},$$

$$g_{\kappa+1}=\frac{1}{2k(k+1)(k^2-1)}\left[(m_k-p_k)\frac{k}{\delta_1}-(k^2m_k-p_k)\frac{1}{\delta_2}\right], \tag{1,7}$$

$$\overline{g}_{-(\kappa-1)}=-\frac{1}{2k(k-1)(k^2-1)}\left[(m_k-p_k)\frac{k}{\delta_1}+(k^2m_k-p_k)\frac{1}{\delta_2}\right],$$

$$(k=2,\ 3,\ 4,\dots)$$

$$m_k=m'_\kappa-M_k,\ p_k=p'_\kappa-P_k,\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots) \tag{1,8}$$

$$\left.\begin{aligned} m'_0 &= -4(1+\nu)B_1 + 2(1-\nu)\alpha_{-1} \\ m'_1 &= -2[(3+\nu)B_2 - (1-\nu)\bar{\alpha}_{-2}] \\ m'_\kappa &= -(k+1)[2(1+\nu)+k(1-\nu)]B_{\kappa+1} - (1-\nu)(k-1)A_{\kappa-1} + \\ &+ (k-1)[2(1+\nu)-k(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + (1-\nu)(k+1)\bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} \\ &(k=2,\ 3,\ 4,\ldots) \end{aligned}\right\} \quad (1,9)$$

$$\left.\begin{aligned} p'_0 &= 0, \quad p'_1 = 2[(1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} - (3+\nu)B_2], \\ p'_\kappa &= k(k+1)[(k-1)(1-\nu) - (3+\nu)]B_{\kappa+1} + \\ &+ k(k-1)(1-\nu)A_{\kappa-1} - k(\kappa-1)[(\kappa+1)(1-\nu)+(3+\nu)]\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + \\ &+ \kappa(\kappa+1)(1-\nu)\bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} \\ &(\kappa=2,\ 3,\ 4,\ldots). \end{aligned}\right\} \quad (1,10)$$

Внося (1,1) и (1,6) в условие (1,2) с учетом (1,4), (1,7) — (1,10) и сравнивая коэффициенты при σ^0, σ^1, σ^2 в правой и левой частях (1,2), получаем:

$$\alpha_{-1} = \frac{4(1+\nu-\delta_1)B_1 + M_0}{2(1-\nu+\delta_1)},$$

$$\alpha_{-2} = \frac{2[(3+\nu)-(\delta_1+\delta_2)]\bar{B}_2 + M_{-1}}{2[(\delta_1+\delta_2)+(1-\nu)]}, \quad (1,11)$$

$$\beta_0 = -\bar{A}_0 - \frac{2(\delta_1+\delta_2-1-\nu)B_2}{\delta_1+\delta_2+1-\nu} - \frac{(1-\nu)M_1}{2(\delta_1+\delta_2+1-\nu)(\delta_1+\delta_2)} + \frac{M_{-1}}{2(\delta_1+\delta_2)},$$

Сравнивая же коэффициенты при $\sigma^{\kappa+1}$ и $\sigma^{-(\kappa-1)}$ $(\kappa=2,\ 3,\ 4,\ldots)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered} -(\kappa-1)\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + \bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} + B_{\kappa+1} = g_{\kappa+1}, \\ \bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + A_{\kappa-1} + (\kappa+1)B_{\kappa+1} = \bar{g}_{-(\kappa-1)}, \end{gathered} \quad (1,12)$$

где для значений $\kappa > m$ нужно считать $A_k = B_k = 0$.

Детерминант системы (1,12) имеет вид

$$\Delta^*_\kappa = -\frac{1}{(k^2-1)\delta_1\delta_2}\Delta_k \neq 0,$$

где

$$\Delta_k = (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2 + (1+\nu+2\kappa)(\delta_1+\delta_2) + (1-\nu)(3+\nu). \quad (1,13)$$

Таким образом, из (1,12) однозначно определяются неизвестные коэффициенты $\beta_{-(\kappa-1)}$ и $\alpha_{-(\kappa+1)}$ функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1,1), и поставленная задача полностью решена.

В частности, когда подкрепляющее кольцо свободно от внешних усилий, функции (1,1) имеют вид

$$\varphi_1(z) = \varphi^\circ(z) + \sum_{\kappa=0}^{m} \beta_{-\kappa}\frac{R^k}{z^k},$$

$$\psi_1(z) = \psi^\circ(z) + \sum_{\kappa=1}^{m+2} \alpha_{-\kappa} \frac{R^k}{z^k}, \tag{1,14}$$

где

$$\alpha_{-1} = \frac{2(1+\nu-\delta_1)B_1}{1-\nu+\delta_1}, \qquad \alpha_{-2} = \frac{(3+\nu-\delta_1-\delta_2)\overline{B}_2}{1-\nu+\delta_1+\delta_2},$$

$$\beta_0 = -\overline{A}_0 + \frac{2(1+\nu-\delta_1-\delta_2)\overline{B}_2}{1-\nu+\delta_1+\delta_2},$$

$$\alpha_{-(\kappa+1)} = \frac{\overline{A}_{\kappa-1}(k-1)}{\Delta_k}[(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2] +$$

$$+\frac{\overline{B}_{\kappa+1}}{\Delta_k}\{\kappa^2(1-\nu)^2 + 8(1+\nu) - [\kappa^2(3+\nu) - 8(\kappa^2-1)]\delta_1 - \kappa^2(3+\nu)\delta_2 -$$

$$-\kappa^2(\kappa^2-1)\delta_1\delta_2\}, \tag{1,15}$$

$$\beta_{-(\kappa-1)} = \frac{\overline{A}_{\kappa-1}}{\Delta_k}[(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2] +$$

$$+\frac{(k+1)\overline{B}_{\kappa+1}}{\Delta_k}[(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_3]$$

$$(\kappa = 2, 3, \ldots, m+1)$$

§ 2. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Прямоугольная неограниченная изотропная плита с подкрепленным круговым отверстием скручивается крутящими моментами H, равномерно распределенными по ее краям. Функции (1,4) для этого случая имеют вид:

$$\varphi^\circ(z) = 0, \qquad \psi^\circ(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D} \cdot \frac{z}{R}. \tag{2,1}$$

Следовательно, согласно (1,14) и (1,15) функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ для плиты с подкрепленным отверстием будут:

$$\varphi_1(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D}\beta_{-1} \cdot \frac{R}{z} \tag{2,2}$$

$$\psi_1(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D}\left[\frac{z}{R} + \alpha_{-3}\frac{R^3}{z_3}\right],$$

где

$$\beta_{-1} = -\frac{(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - 3\delta_1\delta_2}{(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2}, \tag{2,3}$$

$$\alpha_{-3} = -\frac{(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - 3\delta_1\delta_2}{(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2}.$$

Для полного устранения концентрации напряжений в плите, очевидно, достаточно выполнение условий

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_{-3} = 0. \tag{2,4}$$

Решая уравнения (2,4) относительно δ_1 и δ_2, находим

$$\delta_1 = 1 - \nu, \quad \delta_2 = 1 - \nu. \tag{2,5}$$

Относительные жесткости (2,5) представляют собой жесткости такого кольца, при подкреплении с которым расчетные напряжения в плите достигают минимального значения. Назовем такое кольцо оптимальным кольцом, а соответствующие ему жесткости δ_1 и δ_2 — оптимальными жесткостями. Подбор оптимального кольца по найденным оптимальным жесткостям можно осуществить следующим образом. Сначала выбирают форму сечения кольца. Для данной формы сечения составляют таблицу величин $\frac{\delta_2}{\delta_1} = I_k/2(1+\nu)I_1$ в зависимости от отношения некоторых двух характерных его размеров h_1 и b. Затем из полученной таблицы находят величину h_1/b, соответствующую отношению оптимальных жесткостей $\delta_2^{(\text{опт})}/\delta_1^{(\text{опт})}$, и, наконец, выбрав материал кольца, определяют размеры его сечения с помощью формулы

$$\delta_1 = \frac{E_1 I_1}{RD}. \tag{2,6}$$

Проиллюстрируем вышеизложенную схему примером подбора сечения для случая (2,5). Пусть подкрепляющее кольцо имеет прямоугольное сечение. Обозначив через h_1 высоту и через b ширину, представим величины I_1 и I_k прямоугольника в виде:

$$I_1 = \varepsilon_1 b^4, \quad I_k = \varepsilon_k b^4. \tag{2,7}$$

В зависимости от отношения h_1/b строим следующую таблицу при $\nu = 0,3$ [3].

h_1/b	0,5	0,6	1,0	1,1	1,5
ε_k	0,0287	0,0451	0,140	0,169	0,294
ε_1	0,0104	0.0180	0,083	0,111	0,281
δ_2/δ_1	1,059	0,965	0,649	0,588	0,402

Так как в нашем случае, согласно (2,5), $\delta_2^{(\text{опт})}/\delta_1^{(\text{опт})} = 1$, то из таблицы находим соответствующее значение h_1/b, равное приблизительно 0,56. Заменяя теперь R на R_2 (предположение о возможности такой замены лежит в основе данного метода [2]), представляем (2,6) в виде:

$$\delta_1 = \frac{E_1}{E} \cdot \frac{bh_1^3}{R_2 h^3}(1 - \nu^2) = \frac{E_1}{E}\left(\frac{b}{h}\right)^4 \cdot \frac{0{,}56^3}{\rho}(1 - \nu^2) = 1 - \nu, \tag{2,8}$$

где R_2 — заданный радиус отверстия в плите и $\rho = R_2/h$ — известная величина.

Допустим теперь, что материал плиты и кольца одинаков. Тогда из (2,8) при $E = E_1$ находим, что $b = 1{,}44h\sqrt[4]{\rho}$. По заданному ρ определяем, таким образом, b, а затем и h_1 по формуле $h_1 = 0{,}56b = 0{,}81h\sqrt[4]{\rho}$.

Следовательно, искомые размеры кольца определены через известную толщину h плиты.

§ 3. ОДНОСТОРОННИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Прямоугольная неограниченная изотропная плита с подкрепленным круговым отверстием изгибается моментами $M_x = M$, равномерно распределенными по двум ее противоположным сторонам. Функции (1,4) для этого случая имеют вид:

$$\varphi^\circ(z) = -\frac{MR}{8D}\cdot\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{z}{R}, \quad \psi^\circ(z) = -\frac{MR}{4D}\cdot\frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{z}{R}. \tag{3,1}$$

Следовательно, согласно (1,14) и (1,15), функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут

$$\varphi_1(z) = -\frac{MR}{8D}\left[\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{z}{R} + \beta_{-1}\cdot\frac{R}{z}\right],$$

$$\psi_1(z) = -\frac{MR}{8D}\left[\frac{2}{1-\nu}\cdot\frac{z}{R} + \alpha_{-1}\cdot\frac{R}{z} + \alpha_{-3}\frac{R^3}{z^3}\right], \tag{3,2}$$

где

$$\alpha_{-1} = \frac{2(1+\nu-\delta_1)}{(1+\nu)(1-\nu+\delta_1)},$$

$$\beta_{-1} = \frac{2[(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - 3\delta_1\delta_2]}{(1-\nu)[(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2]}, \tag{3,3}$$

$$\alpha_{-3} = \frac{2[(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - 3\delta_1\delta_2]}{(1-\nu)[(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2]}.$$

Добиться полного устранения концентрации напряжений в плите в этом случае невозможно, ибо для этого необходимо, чтобы все три коэффициента (3,3) равнялись нулю, но тогда мы получаем три уравнения для определения двух неизвестных оптимальных жесткостей δ_1 и δ_2. Следовательно, оптимальное кольцо постоянной жесткости в данном случае не существует*.

Однако простота формул (3,3) позволяет легко подобрать такие жесткости кольца, которые значительно снижают концентрацию напряжений около отверстия в плите.

Заметим сначала, что при $\nu = 0$ уравнения

$$\alpha_{-1} = 0, \quad \beta_{-1} = 0, \quad \alpha_{-3} = 0$$

удовлетворяются при $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Отсюда заключаем, что если $\nu > 0$, то, взяв для δ_1 и δ_2 значения, близкие к единице, получим и для коэффициента концентрации напряжений значение, не намного отличающееся от единицы. Действительно, если взять, например, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}85$ (при $\nu = 0{,}3$), получим, что $\alpha_{-1} = 0{,}4467$, $\alpha_{-3} = -0{,}1033$, $\beta_{-1} = -0{,}1033$, и максимальный изгибающий момент на контуре $r = R$ равен $1{,}029\ M$.

---

* Подкрепление кольцами переменной жесткости рассматривается в другой нашей статье [5].

Следовательно, кольцо с жесткостями $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}85$ почти полностью устраняет концентрацию напряжений около отверстия в плите, т. е. практически оно является оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. — Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
2. Флейшман Н. П. — Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплен тонким упругим кольцом. Ученые записки ЛГУ, том XXII. Серия физико-математическая, в. 5. 1953.
3. Геккелер И. В. — Статика упругого тела. ОНТИ ГТТИ, 1934. стр. 24—30.
4. Шереметьев М. П. — Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. мат. журнал, т. V, № 1, 1953.
5. Флейшман Н. П. — О подкреплении края криволинейных отверстий тонких плит. Доповіді АН СССР, № 4, 1954.