

В. Н. КОЖЕВНИКОВА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ИЗГИБАЕМОЙ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Наличие отверстий в элементах конструкций и машин является, как известно, причиной перераспределения напряжений, которое сопровождается значительной концентрацией последних.

Вопросу о влиянии проемов на напряженное состояние пластинки при деформации чистого изгиба посвящены работы Туци, исследовавшего круглое отверстие, Н. И. Мусхелишвили и А. С. Локшина, рассматривавших эллиптический проем, М. И. Наймана, изучавшего вырезы в виде эллипсов и криволинейных треугольника и квадрата, и Г. Н. Савина, который в своей работе „Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле“ рассмотрел отверстия в виде криволинейного правильного многоугольника и прямоугольника. Решение Г. Н. Савина иллюстрировано примерами. Для прямоугольного выреза приведен проем с отношением сторон, равным приблизительно трем (по принятому нами в дальнейшем обозначению это отношение надо считать равным $a:b \cong 1:3$, так как нейтральная плоскость параллельна большей стороне выреза). В указанной работе Г. Н. Савин рассмотрел, кроме чистого изгиба, и некоторые другие случаи неоднородно напряженного поля.

Нами исследуется перераспределение напряжений в бесконечной пластинке, изгибаемой в своей плоскости, вызванное криволинейным отверстием, по форме весьма близким к прямоугольнику (рис. 1). Рассматриваются вырезы с отношением средних линий $a:b \cong 1; 1,4; 1,5; 2,0; 2,5; 2,9; 4,35; 1:1,4; 1:1,5; 1:2,0; 1:2,5; 1:2,9; 1:4,35$. Средняя линия b совпадает с нейтральной плоскостью. В дальнейшем отношение средних линий $a:b$ будем для краткости называть отношением сторон отверстия.

Задача трактуется как плоская. Отверстие предполагается относительно малым и удаленным от наружных граней. Граничные условия на внутреннем контуре удовлетворяются точно, на наружном же, где влиянием отверстия пренебрегается, — лишь приближенно.

При решении используется метод Н. И. Мусхелишвили — Г. Н. Савина с применением конформного преобразования. Метод академика Н. И. Мусхелишвили, опубликованный в 1933 г., дает решение в явной форме, в то время как ранее решение искалось обычно полуобратным способом: задавались системой напряжений и проверяли, удовлетворяются ли при этом уравнения теории упругости. Особенно блестящее применение метод Мусхелишвили нашел в задачах о распределении напряжений в пластинках с отверстиями,

где он дал возможность исследовать влияние проемов различной формы, в частности, в виде квадрата и прямоугольника. Приоритет применения функции комплексного переменного к задачам теории упругости, впервые предложенного Г. В. Колосовым, и ряд удачных приложений этого метода к конкретным задачам принадлежат русским ученым.

По методу Мусхелишвили отыскание одной бигармонической функции напряжений заменяется нахождением двух аналитических функций. Решение задачи для бесконечной плоскости с прямоугольным вырезом (область переменной z) представляется затруднительным, и эта область отображается на внутренность круга единичного радиуса (область переменной ζ), для которой и отыскиваются функции напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$.

Отображающая функция заимствована нами у Г. Н. Савина. Эта функция выражается рядом

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n + \dots \right), \quad (1)$$

в котором Г. Н. Савин оставлял четыре члена, рассматривая, таким образом, не прямоугольник, а криволинейный контур, достаточно близкий к прямоугольнику. Для квадратного проема Г. Н. Савин удерживал два члена ряда (1). Экспериментальные работы, проведенные оптическим методом в Днепропетровском и Ленинградском государственных университетах, подтвердили теоретическое решение Г. Н. Савина.

При решении задачи о растяжении бесконечной пластинки Г. Н. Савин всегда брал отношение сторон отверстия большим единицы $a:b > 1$ и рассматривал две задачи для одного отношения $a:b$ — растяжение вдоль длинных и растяжение вдоль коротких сторон проема.

Мы сохраняем в отображающей функции шесть членов ряда для прямоугольного проема и три — для квадратного. Расположение изгибающих пар остается неизменным и рассматриваются отношения $a:b > 1$ и $a:b < 1$. В отображающих функциях для сопряженных значений $a:b$ абсолютная величина коэффициентов c_i одинакова, лишь знаки меняются на обратные через один коэффициент. Например, для отношений $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ отображающие функции имеют следующий вид:

$$a:b \approx 2$$

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + 0,3090 \zeta - 0,1508 \zeta^3 - 0,0279 \zeta^5 + \right. \\ \left. + 0,0084 \zeta^7 + 0,0091 \zeta^9 \right)$$

$$a:b \approx 1:2$$

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} - 0,3090 \zeta - 0,1508 \zeta^3 + 0,0279 \zeta^5 + \right.$$

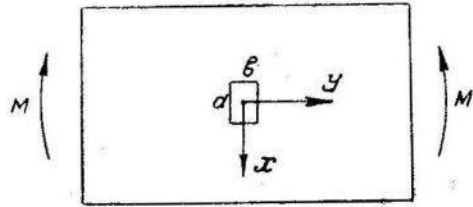


Рис. 1.

$$+ 0,0084 \zeta^7 - 0,0091 \zeta^9).$$

При отображении получается контур, весьма близкий к прямоугольнику. Например, при отношении сторон $a:b \cong 2$ наибольшее расхождение между измерением контура по той или иной оси симметрии и любым другим, ему параллельным, составляет 1,4% от длины стороны прямоугольника; радиус кривизны в вершинах углов равен $R = 0,035 \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$. Контур представлен на рис. 2.

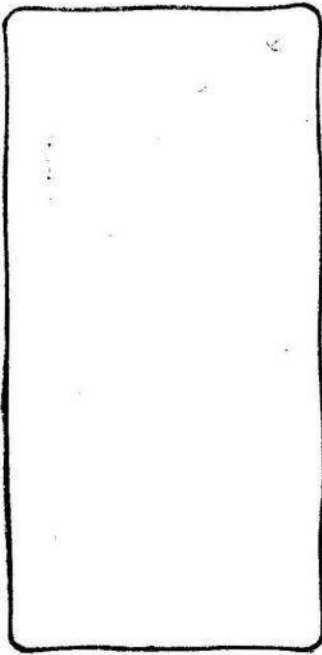


Рис. 2.

Нами найдены обе функции напряжений для изгиба пластинки с прямоугольным отверстием с указанными выше отношениями сторон. Эти функции имеют следующий вид:

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} + B_0 + B_2 \zeta^2 + B_4 \zeta^4 + B_6 \zeta^6 + B_8 \zeta^8 + B_{10} \zeta^{10} \right), \quad (2)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{NA^2}{8} \left(\zeta^2 + B_0 + B_2 \zeta^{-2} + B_4 \zeta^{-4} + B_6 \zeta^{-6} + B_8 \zeta^{-8} + B_{10} \zeta^{-10} - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) \right), \quad (3)$$

где $N = \frac{M}{J}$; M — изгибающий момент, J — момент инерции поперечного сечения пластины, A — постоянная, характеризующая размеры отверстия,

B_i — вещественные коэффициенты.

В качестве примера приведем функции напряжений с числовыми значениями коэффициентов B_i для отношения сторон проема $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$

$$a:b \approx 2$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} + 0,6180 - 1,4415 \zeta^2 + 0,3110 \zeta^4 + 0,0309 \zeta^6 - 0,0224 \zeta^8 - 0,0182 \zeta^{10} \right),$$

$$\psi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(-\zeta^2 - 0,6180 + 1,4415 \zeta^{-2} - 0,3110 \zeta^{-4} - 0,0309 \zeta^{-6} + 0,0224 \zeta^{-8} + 0,0182 \zeta^{-10} \right) - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta),$$

$$a:b \approx 1:2$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} - 0,6180 - 0,4711 \zeta^2 + 0,3102 \zeta^4 - 0,0486 \zeta^6 - \right.$$

$$-0,0224\zeta^8 + 0,0182\zeta^{10}),$$

$$\psi(\zeta) = \frac{NA^2}{8}(-\zeta^2 + 0,6180 + 0,4711\zeta^{-2} - 0,3102\zeta^{-4} + 0,0486\zeta^{-6} +$$

$$+ 0,0224\zeta^{-8} - 0,0182\zeta^{-10}) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta).$$

Между функциями напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ существует зависимость

$$\psi(\zeta) = -\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta). \quad (4)$$

Эта зависимость не случайна: при растяжении и сдвиге имеет место аналогичное соотношение

$$\psi(\zeta) = \pm \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta). \quad (4a)$$

Зависимость (4—4a) между функциями напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, насколько нам известно, нигде не отмечена. Пользуясь равенством (4—4a), можно определить функцию $\psi(\zeta)$ быстрее, чем это делается обычно.

Имея функции напряжений, можно вычислить напряжения на гранях выреза и в области, причем для нахождения контурных напряжений достаточно знать одну функцию $\varphi(\zeta)$.

Характер распределения напряжений по контуру рассмотрим на частных примерах при отношении сторон прямоугольного выреза $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$.

Нами приняты в дальнейшем следующие обозначения:

x, y — декартовы координаты на плоскости z ; начало координат расположено в центре отверстия;

ρ, θ — полярные координаты на плоскости ζ ;

θ_0 — полярный угол на плоскости ζ , соответствующий вершине угла прямоугольного выреза на плоскости z ;

ρ, θ — криволинейная ортогональная система координат на плоскости z ;

$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ — напряжения в пластинке, отнесенные к координатам ρ, θ ;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — напряжения в пластинке, отнесенные к декартовым координатам x, y ;

σ_y^c — напряжение в сплошной пластинке.

Значения напряжений σ_θ на гранях вырезов $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ приведены в таблицах 1 и 2. В первой графе даны значения полярного угла θ на плоскости ζ ; во второй и третьей — декартовы координаты x и y соответствующей точки на плоскости z ; наконец в четвертой — значение контурного напряжения σ_θ в долях NA .

По данным вычислений построены эпюры распределения контурных напряжений σ_θ , представленные на рис. 3 и 4. Пунктирной линией очерчены эпюры распределения напряжений в сплошной балке. Кривые

напряжений оборваны в сжатой зоне, где они образуют петлю; в точках, симметричных относительно нейтральной плоскости, напряжения отличаются лишь знаком.

Таблица 1 и рис. 3 соответствуют прямоугольному вырезу с отношением сторон $a:b \approx 2$

Таблица 1

Напряжения σ_θ на гранях прямоугольного отверстия
с отношением сторон $a:b \approx 2$

θ°	x	y	σ_θ в долях NA	θ°	x	y	σ_θ в долях NA
	в долях A				в долях A		
I	II	III	IV	I	II	III	IV
0°	1,148	0,000	1,67	38°	1,128	—0,570	1,08
10°	1,144	—0,199	1,55	39°	1,122	—0,572	0,33
20°	1,145	—0,390	1,66	40°	1,114	—0,573	—0,20
25°	1,149	—0,466	2,06	41°	1,106	—0,575	—0,52
30°	1,151	—0,523	3,09	45°	1,064	—0,575	—0,91
32°	1,149	—0,540	3,71	50°	0,991	—0,570	—0,86
33°			3,97	60°	0,786	—0,567	—0,72
34°	1,145	—0,553	4,02	70°	0,546	—0,573	—0,54
35°	1,142	—0,558	3,74	80°	0,283	—0,571	—0,27
36°	1,139	—0,563	3,04	90°	0,000	—0,567	0,00
37°	1,134	—0,567	2,06				

Как видно из таблицы 1 и рис. 3, на среднем участке грани, параллельной нейтральной плоскости, напряжения σ_θ мало изменяют свою величину, превышая примерно в 1,5 раза напряжения σ_y^c в сплошной пластинке (коэффициент концентрации $k = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c} = 1,47$). Длина

этого участка составляет около 70% от полной длины стороны. Далее следует сначала, на небольшом участке, постепенное, а затем резкое повышение напряжений, которые вблизи вершины угла при $\theta = 34^\circ$ (вершине угла соответствует полярный угол $\theta_0 = 36^\circ$) достигают своего наибольшего значения 4,02 NA с коэффициентом концентрации

$k_{\max} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c} = 3,50$. Затем напряжения круто падают и меняют знак,

переходя через нуль вблизи углового закругления. Наибольшее по абсолютной величине напряжение обратного знака составляет 80% от напряжения в сплошной пластине. На остальном протяжении сторон, перпендикулярных нейтральной плоскости, напряжения изменяются почти по прямой линии до своего нулевого значения на нейтральной оси. Таким образом, на этом участке эпюра аналогична эпюре в сплошной пластине, но знак напряжений обратный.

Интересно провести сравнение между напряжениями на гранях рассматриваемого выреза и выреза в виде эллипса с тем же отношением осей и аналогично расположенного. Распределение напряжений по контуру такого начертания, данное Н а й м а н о м, представлено на рис. 3а. Максимальное контурное напряжение соответствует точке, лежащей на большой оси эллипса. Оно приблизительно в два раза превышает напряжения в соответствующей точке прямоугольного выреза и лишь на 18% ниже наибольшего напряжения в углах прямоугольника.

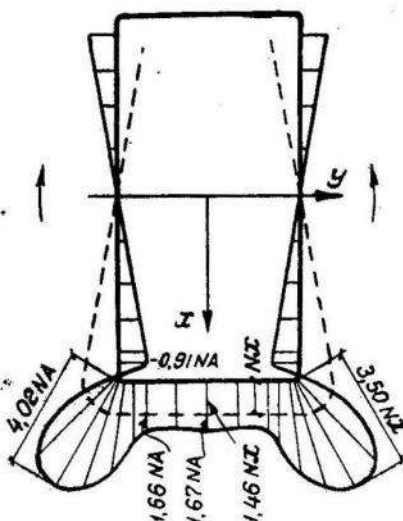


Рис. 3.

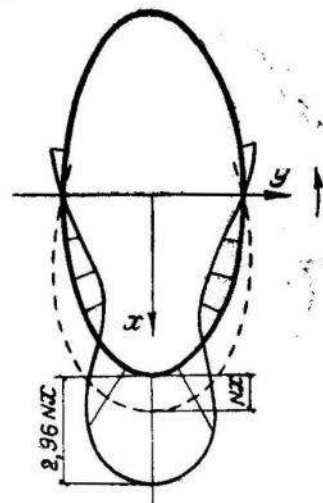


Рис. 3а.

Сплошная линия — эпюра напряжений σ_θ по контуру отверстия. Пунктирная линия — эпюра напряжений σ_{xy} в тех же точках сплошной пластинки

Таблица 2 и рис. 4 (верхний) соответствуют изгибу пластинки с вырезом при отношении сторон $a:b=1:2$.

Таблица 2

Напряжения σ_θ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:2$

θ°	x	y	σ_θ в долях NA	θ°	x	y	σ_θ в долях NA
	в долях A				в долях A		
I	II	III	IV	I	II	III	IV
0°	0,567	0,000	0,61	54°	0,563	— 1,139	0,91
10°	0,571	— 0,282	0,64	55°	0,558	— 1,142	0,50
20°	0,573	— 0,546	0,66	56°	0,553	— 1,145	0,07
30°	0,567	— 0,786	0,63	58°	0,540	— 1,149	0,28
40°	0,570	— 0,991	0,72	60°	0,523	— 1,151	0,47
45°	0,575	— 1,064	0,94	65°	0,466	— 1,149	0,43
49°	0,575	— 1,106	1,27	70°	0,390	— 1,145	0,35
50°	0,573	— 1,114	1,37	80°	0,199	— 1,144	0,19
51°	0,572	— 1,122	1,41	90°	0,000	— 1,148	0,00
52°	0,570	— 1,128	1,39				
53°	0,567	— 1,134	1,22				

Общий характер эпюры тот же, что и в предыдущем случае. Наиболее опасная точка с напряжением $\sigma_\theta = 1,41 NA$ с коэффициентом

концентрации $k_{\max} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{cy}} = 2,5$ расположена в пределах угло-

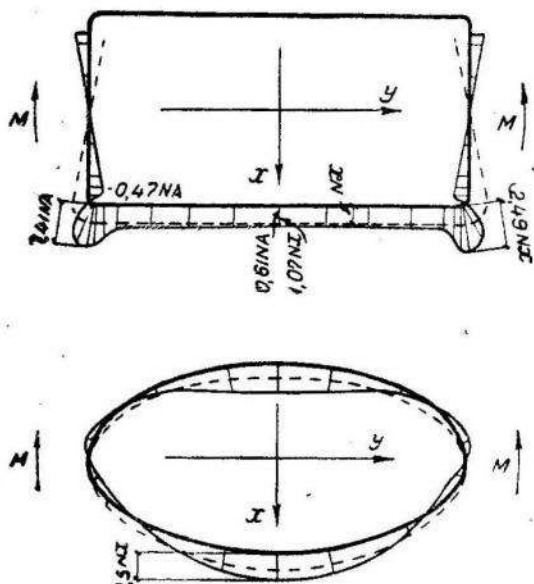


Рис. 4

Сплошная линия — эпюра напряжений σ_θ по контуру отверстия; пунктирная линия — эпюра напряжений σ_{cy} в тех же точках сплошной пластинки.

плоскости ζ , отвечающее вершине угла прямоугольника на плоскости ζ ; в графах третьей и четвертой даны значения θ_m полярного угла θ и $k_{\max}$, соответствующие наибольшему значению контурного напряжения σ_θ ; наконец в графе пятой — значение коэффициента концентрации k при $\theta = 0$.

Из таблицы 3 можно сделать следующие выводы:

1. Точки с наибольшей концентрацией контурных напряжений расположены в пределах углового закругления вблизи вершины угла.
2. Максимальный коэффициент концентрации $k_{\max}$ зависит от отношения сторон $a:b$ прямоугольника и увеличивается вместе с этим отношением. Однако изменение $k_{\max}$ сравнительно невелико:

при $a:b = 4,35$	$k_{\max} = 3,80$
$a:b = 1,0$	$k_{\max} = 2,67$
$a:b = 1:4,35$	$k_{\max} = 2,24$

3. Коэффициент концентрации напряжений k в середине сторон, параллельных нейтральной плоскости, также растет при увеличении отношения сторон выреза $a:b$. При уменьшении отношения $a:b$ этот коэффициент стремится к единице.

4. В горном деле при определении напряжений на гранях выра-

го закругления. Для эллипса с отношением осей 2:1, ориентированного так же, как рассматриваемый контур, распределение напряжений представлено на рис. 4 внизу. Максимальное напряжение в 1,4 раза больше напряжения в соответствующей точке прямоугольного выреза и в 1,7 раза меньше напряжения в углах последнего.

Для пластинок с прямоугольными проемами с другим отношением сторон $a:b$ характер распределения напряжений по контуру отверстия при изгибе такой же, как в двух приведенных эпюрах ($a:b = 2$ и $1:2$). В таблице 3 даны значения наибольших коэффициентов концентрации $k_{\max}$ и коэффициентов концентрации k при $\theta = 0$ (посередине грани, параллельной нейтральной плоскости). В графе первой таблицы 3 приведено отношение сторон $a:b$ проема; в графе второй — значение полярного угла θ_0 на

Таблица 3

Наибольшие коэффициенты концентрации контурных напряжений $k_{\max}$ и коэффициенты концентрации k посередине грани, параллельной нейтральной плоскости, для отверстий с различным отношением сторон

$a : b$	θ_0	При наибольшем значении σ_θ			При $\theta = 0$ k	$a : b$	θ_0	При наибольшем значении σ_θ			При $\theta = 0$ k
		$k_{\max}$	θ_m					$k_{\max}$	θ_m		
I	II	III	IV		V	I	II	III	IV		V
4,35	27°	3,80	25°		1,47	1 : 1,42	49°30'	2,53	47°		1,16
2,93	31°30'	3,53	29°		1,47	1 : 1,52	50°24'	2,49	47°		1,14
2,52	33°18'	3,51	31°		1,47	1 : 2,02	54°	2,49	51°		1,07
2,02	36°	3,50	34°		1,46	1 : 2,52	56°42'	2,41	54°		1,04
1,52	39°36'	3,25	37°		1,40	1 : 2,93	58°30'	2,31	55°		1,02
1,42	40°30'	3,16	37°		1,38	1 : 4,35	63°	2,24	59°		
1,00	45°	2,67	42°		1,27						

боток и в гидротехническом строительстве при нахождении контурных напряжений в отверстиях плотин обычно пренебрегают значением изгиба и учитывают лишь осевое сжатие. Вычисленные нами коэффициенты концентрации показывают, что при достаточном удалении проемов от дневной поверхности или вершины плотины, что обычно имеет место, удельное значение чистого изгиба мало сравнительно с равномерной деформацией и указанное выше пренебрежение может быть в этих случаях оправдано.

Напряжения в области вычислены нами в табличной форме только для пластинок с прямоугольным отверстием с отношением сторон $a:b=2$ и $a:b=1:2$ и притом лишь для двух сечений, совпадающих с осями симметрии проема. Результаты вычислений приведены в таблицах 4 и 5. По данным вычислений построены кривые распределения напряжений в области по указанным сечениям, представленные на рис. 5 и 6. Пунктирной линией начерчены эпюры в сплошных балках.

Таблица 4 и рис. 5 соответствуют отношению сторон $a:b=2$. По сечению $K-K$, нормальному к нейтральной плоскости, на расстоянии от нее, равном высоте отверстия a , напряжения $\sigma_0 = \sigma_y$ только на 1 % выше напряжений σ_y^c в сплошной пластинке $\frac{\sigma_0}{\sigma_y^c} = 1,01$. До-

полнительное же нормальное напряжение $\sigma_p = \sigma_x$ в этой точке составляет около 3% от σ^c . В нейтральной плоскости (сеч. $L-L$) возникают касательные напряжения, которые достигают своего наибольшего значения 0,22 МА на расстоянии, равном ширине отверстия b , от центра выреза; на расстоянии же a от последнего они имеют величину 0,10 МА.

По скорости затухания возмущения, вызванного отверстием в нормальных напряжениях вдоль оси, перпендикулярной к нейтральной плоскости, и по распределению дополнительных касательных напряжений по нейтральной плоскости можно судить о зоне влияния выреза и отсюда — о справедливости полученных зависимостей для конечных областей. Нормальные напряжения в контурных точках указанного сечения не являются наибольшими контурными напряжениями. Надо полагать, что район влияния отверстия возле точек с максимальными напряжениями будет меньше.

Из рассмотренной картины распределения напряжений видно, что здесь контурные условия соблюдаются довольно точно и в том случае, если высота балки превосходит высоту отверстия лишь в два раза.

Для прямоугольного проема с отношением сторон $a:b \approx 1:2$ результаты вычислений сведены в таблицу 5, а эпюра распределения напряжений представлена на рис. 6. В этом случае граничные условия на наружном контуре выполняются достаточно точно, если высота балки лишь в 2,6 раза превосходит высоту выреза a или в 1,3 раза — его большее измерение b .

Приведенная картина распределения напряжений по двум сечениям позволяет утверждать, что полученные нами зависимости для деформации чистого изгиба пластинки с прямоугольным проемом с отношением сторон $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ справедливы и тогда, когда размеры отверстия значительны по сравнению с размерами пластинки. Полагаем, что это заключение может быть распространено и на изгиб пластинок с другим соотношением сторон прямоугольного выреза.

Таблица 4

Напряжения в области по сечениям, совпадающим с осями симметрии
прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 2$

p	Сечение K—K ($\theta = 0; y = 0$)						Сечение L—L ($\theta = 90^\circ; x = 0$)				
	x	$\sigma_\theta = \sigma_y$	σ_y^c	V	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c}$	$\sigma_\rho = \sigma_x$	$\tau_{\rho\theta} = \tau_{xy}$	y	σ_x	σ_y	$\tau_{xy} = \tau_{\rho\theta}$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1,0	1,147 A	1,67 NA	1,15 NA	1,45	0,00	0	— 0,567 A	0	0	0,00	
0,9	1,269 "	1,67 "	1,27 "	1,31	0,04 NA	0	— 0,741 "	0	0	— 0,13 NA	
0,8	1,414 "	1,73 "	1,41 "	1,23	0,05 "	0	— 0,936 "	0	0	— 0,20 "	
0,7	1,589 "	1,81 "	1,59 "	1,14	0,07 "	0	— 1,165 "	0	0	— 0,22 "	
0,6	1,817 "	1,94 "	1,82 "	1,07	0,08 "	0	— 1,451 "	0	0	— 0,19 "	
0,5	2,135 "	2,19 "	2,135 "	1,03	0,07 "	0	— 1,827 "	0	0	— 0,14 "	
0,4	2,614 "	2,62 "	2,61 "	1,00	0,07 "	0	— 2,366 "	0	0	— 0,09 "	

Для суждения о зоне влияния прямоугольных проемов при чистом изгибе воспользуемся, кроме приведенных данных, результатами Г. Н. Савина. В его работе приведены для отверстий квадратного и прямоугольного с отношением сторон $a:b \approx 1:3,3$ картины

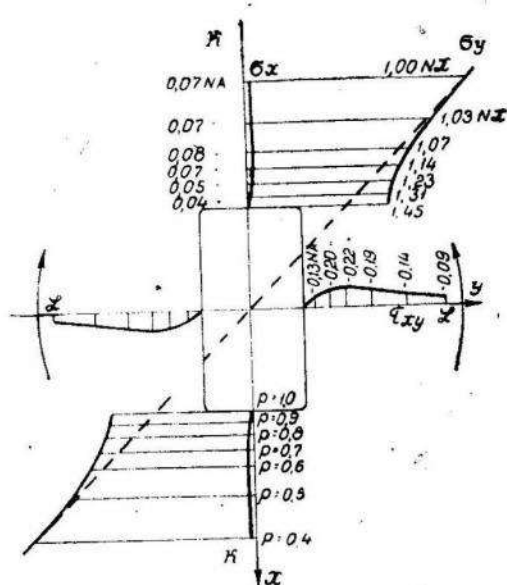


Рис. 5

Сплошная линия — эпюры напряжений в пластинке с отверстием; пунктирная линия — эпюра напряжений σ_y в сплошной пластинке.

отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:3,3$ это расхождение в указанной точке еще меньше.

Суммируя изложенное, можно сделать следующие заключения о зоне влияния прямоугольных проемов в рассматриваемой их ориентации, когда ось отверстия лежит в нейтральной плоскости, при деформации чистого изгиба.

1. Влиянием отверстий с отношением сторон $a:b \approx 1-1:3$ на напряженное состояние пластины можно практически пренебречь на расстоянии от нейтральной плоскости, равном высоте выреза. На расстоянии же, равном 1,5 высоты проема, наличие последнего не отражается сколько-нибудь заметно на распределении напряжений. Это заключение подтверждено экспериментами.

2. Из рассмотрения картины распределения напряжений в области для проемов с отношением сторон $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ (рис. 5 и 6)

напряженных состояний (графики равных главных напряжений $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$), соответствующие формулам автора, а также построенные на основании экспериментальных данных, полученных по заданию автора в лаборатории оптического метода Днепропетровского государственного университета. При экспериментах высота моделей бралась равной трем высотам проема. Для рассматриваемой нами ориентации отверстий (одна из осей симметрии выреза совпадает с нейтральной плоскостью) эксперименты подтвердили точность решения Г. Н. Савина при упомянутом соотношении размеров балки и отверстия. Из графиков равных $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ для квадратного выреза видно также, что на расстоянии от нейтральной плоскости, равном высоте проема, главное напряжение $\sigma_{\max}$ превосходит напряжение в сплошной балке приблизительно на 50%. Для

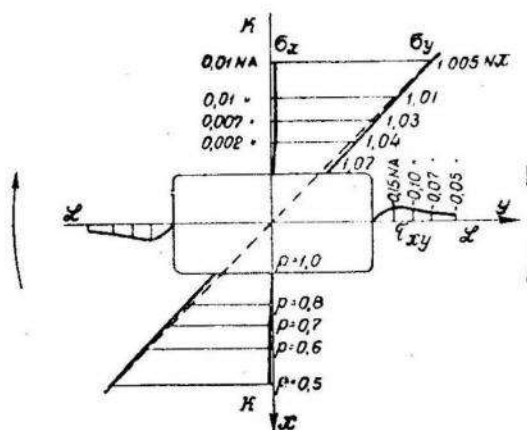


Рис. 6.

Сплошная линия — эпюры напряжения в пластинке с отверстием; пунктирная линия — эпюра напряжения σ_y в сплошной пластинке.

Таблица 5

Напряжения в области по сечениям, совпадающим с осями симметрии
прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:2$

ρ	Сечение $K-K$ ($\theta = 0; y = 0$)						Сечение $L-L$ ($\theta = 90^\circ; x = 0$)				
	x	$\sigma_\theta = \sigma_y$	σ_y^c	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c}$	$\sigma_p = \sigma_x^c$	$\tau_{p\theta} = \tau_{xy}$	y	σ_x	σ_y	$\tau_{xy} = \tau_{p\theta}$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1,0	0,567 A	0,61 NA	0,57 NA	1,07	0,00	0	— 1,147 A	0	0	0,00	
0,8	0,936 "	0,98 "	0,94 "	1,04	0,002 NA	0	— 1,414 "	0	0	— 0,15 NA	
0,7	1,165 "	1,20 "	1,16 "	1,03	0,007 "	0	— 1,589 "	0	0	— 0,10 "	
0,6	1,451 "	1,47 "	1,45 "	1,01	0,01 "	0	— 1,817 "	0	0	— 0,07 "	
0,5	1,827 "	1,84 "	1,83 "	1,005	0,01 "	0	— 2,135 "	0	0	— 0,05 "	

можно заключить, что отношение высоты зоны влияния отверстия по оси симметрии проема, нормальной к нейтральной плоскости, к высоте отверстия уменьшается с увеличением отношения сторон $a:b$.

3. На основании пункта 2 и рис. 5 и 6 можно сделать вывод, что при отношении сторон $a:b > 1$ влиянием проема на распределение напряжений можно пренебречь на расстоянии от его центра, равном высоте отверстия.

Экспериментальными данными для отверстий при отношении сторон $a:b > 1$ мы не располагаем.

4. Зона влияния прямоугольных проемов при изгибе меньше, чем при растяжении (сжатии), поэтому при внецентренном сжатии зона влияния будет определяться осевой деформацией.

Наибольшие коэффициенты концентрации $k_{\max}$ соответствуют точкам, лежащим в пределах углового закругления вблизи вершины угла прямоугольного отверстия, и зависят от кривизны закругления. Величина радиуса закругления в углах рассматриваемого нами контура зависит от числа членов ряда, сохраняемого в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$. Чем меньше членов ряда оставлено в отображающей функции, тем более контур, полученный при отображении, отличается от прямоугольника и тем меньше кривизна угловых закруглений. Соответственно этому с уменьшением количества членов в $z = \omega(\zeta)$ уменьшается и величина коэффициента концентрации $k_{\max}$. Беря в функции $\omega(\zeta)$ шесть, пять и четыре члена ряда, мы проследили изменение $k_{\max}$ с изменением радиусов закруглений для прямоугольных отверстий с отношением сторон $a:b \cong 1; 1,5$ и $1:1,5; 2,0$; и $1:2,0; 2,5$ и $1:2,5; 2,9$ и $1:2,9$. Эти данные носят несколько условный характер, так как радиус закруглений в углах контура переменный. При этом наблюдается значительное расхождение между наибольшей кривизной в вершине угла и кривизной в точке, которой соответствует наибольшая концентрация напряжений σ_θ . Из рассмотрения приводимых ниже таблиц можно заключить, что величина коэффициента концентрации $k_{\max}$ зависит как от величины наименьшего радиуса, так и от величины радиуса закругления смежных точек. Несмотря на отмеченное обстоятельство, результаты наших вычислений могут иметь некоторое значение для приближенного суждения о зависимости концентрации напряжений от кривизны закругления при изгибе пластины с прямоугольным проемом, поскольку других данных по этому вопросу в настоящее время не имеется.

Результаты вычислений сведены в таблицы 6 — 10. В графе второй приведено число членов ряда, оставленных в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$. В графах третьей и четвертой даны максимальный коэффициент концентрации $k_{\max}$ и соответствующее значение угла $\theta = \theta_m$. В графах пятой и последующих даны значения отношения радиуса за-

кругления R к полусумме полудлин сторон $\frac{R}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)}$ для вершины угла

прямоугольного выреза при $\theta = \theta_0$ и для $\theta = \theta_m$, соответствующего максимальной концентрации напряжений. Наконец, в последней графе

приведено среднее значение отношения $\frac{R}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)}$ для значений

$\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_m$.

Таблица 6

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях квадратного отверстия при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в отобразяющей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$R \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) \%$ Отношение в 10° радиуса закругления к сумме полуширин сторон отверстия				Среднее значение $R \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_o и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_o = 45^\circ$	$\theta_m = 43^\circ$	$\theta_m = 42^\circ$	$\theta_m = 38^\circ$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	4	3,17	43°	2,8%	4,15%			3,5%
	3	2,67	42°	4,9%		9,0%		6,95%
	2	2,21	38°	12,0%			23,5%	17,75%
	2	1,63		25%	по Найману			

Таблица 7

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1,5$ и $a:b \approx 1:1,5$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в обра- жающей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) \%$ Отношение в $\%$ радиуса закругления к полусумме полуширин сторон отверстия							Среднее значение R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 39^\circ 36'$ ($50^\circ 24'$)	$\theta_m = 37^\circ$	$\theta_m = 36^\circ$	$\theta_m = 35^\circ$	$\theta_m = 47^\circ$	$\theta_m = 46^\circ$	$\theta_m = 44^\circ$	
		III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1,5	6	3,25	37°	4,0%	5,4%						4,7%
	5	2,67	36°	5,9%		12,9%					9,4%
	4	2,58	35°	10,5%			12,0%				11,25%
1:1,5	6	2,49	47°	4,0%				9,4%			6,7%
	5	2,44	46°	5,9%					10,0%		7,95%
	4	1,91	44°	10,5%						26,5%	18,5%

Таблица 8

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2$ и $a:b=1:2$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)}$ % Отношение в % радиуса закругления к полусумме полуэллипсов отверстия						Среднее значение R $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 36^\circ$ (54°)	$\theta_m = 34^\circ$	$\theta_m = 33^\circ$	$\theta_m = 51^\circ$	$\theta_m = 49^\circ$	$\theta_m = 47^\circ$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
2	6	3,50	34°	3,5 %	4,1 %					3,8 %
	5	2,85	33°	5,2 %		9,6 %				7,4 %
	4	2,72	33°	8,5 %		8,5 %				8,5 %
1:2	6	2,49	51°	3,5 %			6,9 %			5,2 %
	5	2,16	49°	5,2 %				12,8 %		9,0 %
	4	1,86	47°	8,5 %					20,5 %	14,5 %

Таблица 9

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2,5$ и $a:b=1:2,5$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов в $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)}$ Отношение в % радиуса закругле- ния к полусумме полуудлин сторон отверстия					Среднее значение R $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 33^\circ 18'$ ($56^\circ 42'$)	$\theta_m = 31^\circ$	$\theta_m = 29^\circ$	$\theta_m = 54^\circ$	$\theta_m = 51^\circ$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
2,5	6	3,51	31°	3,6 %	5,7 %				4,65 %
	5	3,08	29°	6,85 %		10,7 %			8,8 %
	4	3,22	29°	7,2 %		9,3 %			8,25 %
1:2,5	6	2,41	54°	3,6 %			5,5 %		4,55 %
	5	1,97	51°	6,85 %				17,2 %	12,0 %
	4	1,85	51°	7,2 %				20,5 %	13,85 %

Таблица 10

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2,9$ и $a:b=1:2,9$ при различной кривизне угловых закруглений

I	II	III	При наибольшем значении σ_θ		R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ % Отношение в % радиуса закругления к полусумме полуширин отверстия						XI	Среднее значение R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_0 и θ_m
			$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 31^\circ 30'$ ($58^\circ 30'$)	$\theta_m = 29^\circ$	$\theta_m = 27^\circ$	$\theta_m = 55^\circ$	$\theta_m = 53^\circ$	$\theta_m = 52^\circ$		
a:b	6	3,53	29°	4,1%	6,4%							5,25%
	5	3,33	27°	6,6%		9,6%						8,1%
	4	3,31	27°	6,6%		9,8%						8,2%
1:2,9	6	2,31	55°	4,1%				7,0%				5,55%
	5	1,86	53°	6,6%					18,5%			12,55%
	4	1,85	52°	6,6%						22,7%		14,65%

В таблице 6 для квадратного проема в нижней горизонтальной графе вписаны данные, полученные Н а й м а н о м, исследовавшим влияние квадратного отверстия с радиусом закругления в вершине угла, равным 25% от полудлины стороны квадрата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. — Некоторые основные задачи математической теории упругости.
 2. Савин Г. Н. — Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, вып. 20 (1937).
 3. Савин Г. Н. — Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, вып. 10 (1936).
 4. Найман М. И. — Напряжения в балке с криволинейным отверстием. Труды ЦАГИ, вып. 313 (1937).
-