



МВО СРСР

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XXIX

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ШОСТИЙ (1)

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1954



*Львівський
державний університет
імені Ів. Франка*

МВО СРСР

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВ. ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ XXIX

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ШОСТИЙ (1)

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1954

МВО СССР

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ив. ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ XXIX

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК ШЕСТОЙ (1)

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1954

Редакційна колегія:

професор Л. І. Волковиський, професор О. С. Кованько (відповідальний редактор), професор Я. Б. Лопатинський,
професор М. П. Шереметев

Друкується за розпорядженням
ректора Львівського університету
члена-кореспондента АН УРСР
професора Є. К. Лазаренка.

Е. Л. РВАЧЕВА

ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИТЯЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена некоторым обобщениям предельных закономерностей для сумм независимых случайных величин, подробно изложенных в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова (9), на многомерный случай.

Основные понятия и основные теоремы для многомерных случайных векторов освещены в работах Б. В. Гнеденко (4), П. Леви (13), Г. Крамера (11, 12).

В §§ 1—2 обобщены на многомерный случай предельные теоремы для сумм безгранично делимых и произвольно распределенных независимых бесконечно малых слагаемых. Полученные при этом результаты не претендуют на новизну, но они, повидимому, публикуются впервые. Доказательство основано на перенесении на многомерные распределения метода Б. В. Гнеденко, использованного им при изучении предельных закономерностей для сумм независимых случайных величин (1,3) и построенного на всестороннем использовании безгранично делимых распределений.

В § 3 приведены результаты, относящиеся к устойчивым распределениям, т. е. распределениям, обладающим следующими свойствами: каковы бы ни были положительные числа B_1 и B_2 и постоянные векторы $A_1(a_1', \dots, a_s')$, $A_2(a_1'', \dots, a_s'')$, существуют такое положительное число B и постоянный вектор $A(a_1, \dots, a_s)$, что для функции распределения $F(x_1, \dots, x_s)$ имеет место соотношение:

$$F(Bx_1 + a_1, \dots, Bx_s + a_s) = F(B_1x_1 + a_1', \dots, B_1x_s + a_s') * F(B_2x_1 + a_1'', \dots, B_2x_s + a_s''),$$

где $*$ означает знак композиции законов. Это определение устойчивых распределений, рассмотренных П. Леви (13) и Э. Фельдхеймом (20). Класс таким образом определенных устойчивых распределений, как показали в одномерном случае А. Я. Хинчин и П. Леви (19, 18), совпадает с классом распределений, предельных для нормированных сумм независимых случайных одинаково распределенных векторов

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - A_n}{B_n}, \quad [1]$$

где постоянные $B_n > 0$ и постоянные векторы $A_n(a_1^{(n)}, \dots, a_s^{(n)})$ надлежаще выбраны.

В § 4 для таким образом определенных устойчивых распределений получены области притяжения, т. е. найдены необходимые и достаточные условия, чтобы для данной последовательности взаимно независимых и одинаково распределенных s -мерных случайных векторов $\xi_i (i=1, 2, \dots)$, при надлежащем подборе постоянных векторов A_n и положительных постоянных B_n , распределения нормированных сумм [1] сходились к данному устойчивому распределению.* Тем самым обобщены соответствующие результаты А. Я. Хинчина и В. Феллера (см., например, 9) для нормального одномерного распределения, а также результаты Б. В. Гнеденко (2) и В. Деблина (10) для остальных устойчивых распределений. Вывод результатов основан на использовании общих теорем о сходимости сумм независимых случайных векторов, изложенных в §§ 1—2.

§ 5 посвящен изучению свойств многомерных решетчатых распределений. Получен характеристический признак s -мерного решетчатого распределения.

В § 6 доказана многомерная локальная предельная теорема для общего случая одинаково распределенных решетчатых слагаемых для предельных в указанном смысле устойчивых распределений.** Теорема обобщает результаты, полученные Б. В. Гнеденко (5—8), на многомерный случай, а также результат, полученный для нормального предельного распределения в предположении существования конечных дисперсий у слагаемых, на общий случай (14). Доказательство основано на обобщении метода Б. В. Гнеденко (8).

Настоящая работа доводит до конца решение задач, связанных с многомерными устойчивыми распределениями, только в одном направлении. Имеется большое число вопросов, еще ожидающих своего решения. Ограничимся указанием на один из таких вопросов, который представляется нам первоочередным.

Назовем s -мерное распределение устойчивым в обобщенном смысле, если, каковы бы ни были неособые матрицы A_1 и A_2 (ранга s) и постоянные векторы $B_1 = (b_1', \dots, b_s')$ и $B_2 = (b_1'', \dots, b_s'')$, всегда найдутся неособая матрица A (ранга s) и вектор $B = (b_1, \dots, b_s)$, что для функции распределения $F(X) = F(x_1, \dots, x_s)$ будет выполнено следующее соотношение

$$F(AX + B) = F(A_1X + B_1) * F(A_2X + B_2).$$

Здесь AX означает линейное преобразование аргументов $x_1, \dots, x_s$ с помощью матрицы A .

Каковы же класс распределений, устойчивых в этом смысле? Каковы условия притяжения к этим устойчивым законам, если соответствующим образом обобщить также определение области притяжения?

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ряд ценных указаний при ее решении, а также за постоянный интерес и внимание при выполнении данной работы.

* Краткое сообщение результатов § 4 было опубликовано ранее (15).

** Результаты § 5 и § 6 были опубликованы в статье (17) и в кратком сообщении (16), однако для полноты мы их здесь воспроизводим.

§ 1. МНОГОМЕРНЫЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Назовем s -мерный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ безгранично делимым, если при любом натуральном n он может быть представлен в виде суммы

$$\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nn} \quad [1]$$

n взаимно независимых одинаково распределенных слагаемых ξ_{nk} . Соответствующую вероятностную функцию назовем безгранично делимой, а характеристическую функцию — безгранично делимой характеристической функцией. Это определение, очевидно, равносильно такому: s -мерное распределение вероятностей является безгранично делимым, если его характеристическая функция $\varphi(T) = \varphi(t_1, \dots, t_s)$ при любом натуральном n является n -ой степенью некоторой характеристической функции.

Известно (13), что для того, чтобы функция $\varphi(T)$ была характеристической функцией некоторого s -мерного безгранично делимого распределения, необходимо и достаточно, чтобы ее логарифм мог быть представлен в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma) + \int_{R_s} \left\{ e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right\} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM), \quad [2]$$

где $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ — произвольный постоянный вектор; $X = (x_1, \dots, x_s)$ — вектор, конец которого находится в dM ; $(T\Gamma)$, (TX) — скалярное произведение векторов T и Γ , T и X соответственно; ρ — модуль вектора X ; $G(M)$ — вполне аддитивная, неотрицательная функция множества, $G(R_s) < \infty$. Представление $\lg \varphi(T)$ формулой [2] единственно.

Если ввести обозначения

$$N(M) = \int_M \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM), \quad 0 \notin M,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho < \varepsilon} \frac{(TX)^2}{\rho^2} G(dM) = Q_2(T),$$

то формула [2] может быть представлена в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma) - \frac{1}{2} Q_2(T) + \int_{\rho > 0} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) N(dM), \quad [3]$$

или в виде

$$\lg \varphi(T) = i(T\Gamma_1) - \frac{1}{2} Q_2(T) + \int_{0 < \rho < \tau} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) N(dM) +$$

$$+ \int_{\rho > \tau} (e^{i(TX)} - 1) N(dM), \quad [4]$$

где вектор Γ_1 имеет компоненты

$$\gamma_i' = \gamma_i + \int_{\rho < \tau} x_i G(dM) - \int_{\rho > \tau} \frac{x_i}{\rho^2} G(dM), \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Известны (13) следующие свойства многомерных безгранично делимых распределений:

1. Характеристическая функция многомерного безгранично делимого распределения не обращается в нуль ни при каком конечном значении модуля вектора $T = (t_1, \dots, t_s)$.

2. Вероятностная функция суммы конечного числа взаимно независимых безгранично делимых случайных векторов безгранично делима.

3. Распределение, предельное для безгранично делимых распределений, безгранично делимо.

4. При любом $\lambda > 0$ функция $\varphi^\lambda(t_1, \dots, t_s)$, где $\varphi(t_1, \dots, t_s)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения, является характеристической функцией.

5. Совокупность безгранично делимых распределений совпадает с совокупностью распределений, являющихся композицией конечного числа законов Пуассона и предельных для них.

ТЕОРЕМА 1. Для сходимости последовательности многомерных безгранично делимых распределений $P_n(M)$ к предельному распределению $P(M)$ необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$:

$$1. G_n(I) \rightarrow G(I),$$

где I — интервалы непрерывности функции $G(M)$ вида $I = I(\rho > R; \varphi_1 < \theta_1, \dots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$, а $(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ — сферические координаты.

$$2. G_n(R_s) \rightarrow G(R_s).$$

$$3. \Gamma_n = (\gamma_1^{(n)}, \dots, \gamma_s^{(n)}) \rightarrow \Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s).$$

Здесь функции G_n , G и постоянные Γ_n , Γ определены формулой [2] для распределений $P_n(M)$ и $P(M)$.

Необходимость. Пусть $P_n(M) \rightarrow P(M)$. Тогда равномерно в каждом конечном интервале $[t \leq t_0]$ (t — модуль вектора T) $\varphi_n(T) \rightarrow \varphi(T)$. Так как $\varphi_n(T)$ и $\varphi(T)$ ни при одном t не обращаются в нуль, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A_n = A_n(T) &= i(T\Gamma_n) + \int_{R_s} (e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2}) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_n(dM) \rightarrow \\ &\rightarrow A = A(T) = i(T\Gamma) + \int_{R_s} (e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2}) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} R A_n &= \int_{R_s} (\cos(TX) - 1) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_n(dM) \rightarrow \\ &\rightarrow R A = \int_{R_s} (\cos(TX) - 1) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM). \end{aligned}$$

Покажем, что $G_n(M)$ ограничены в совокупности. Рассмотрим множества $M_i (i=1, 2, \dots, s)$ и $D_i (i=1, 2, \dots, s)$:

$$M_i \equiv \left\{ \begin{array}{l} \rho < 1 \\ \frac{x_i}{\rho} > \frac{1}{\sqrt{s}} \end{array} \right\}; \quad D_i \equiv \left\{ \begin{array}{l} \rho > 1 \\ \frac{x_i}{\rho} > \frac{1}{\sqrt{s}} \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^s M_i + \sum_{i=1}^s D_i = R_s.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$\begin{aligned} -R A(0, \dots, 1, \dots, 0) + \varepsilon &> \int_{M_i} (1 - \cos x_i) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_n(dM) > \\ &> \int_{M_i} \left(1 - \cos \frac{\rho}{\sqrt{s}}\right) \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_n(dM) > \frac{s}{3} G_n(M_i), \end{aligned}$$

откуда

$$G_n(M_i) < -\frac{3}{s} R A(0, \dots, 1, \dots, 0), \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad [5]$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$\begin{aligned} -R A(0, \dots, t_i, \dots, 0) + \varepsilon &\geq \int_{D_i} (1 - \cos t_i x_i) G_n(dM); \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{2\sqrt{s}} R A(0, \dots, t_i, \dots, 0) dt_i + \varepsilon \geq \\ &\geq \int_{D_i} \left(1 - \frac{\sin 2\sqrt{s} x_i}{2\sqrt{s} x_i}\right) G_n(dM) \geq \frac{1}{2} G_n(D_i), \end{aligned}$$

откуда

$$G_n(D_i) \leq -\frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{2\sqrt{s}} R A(0, \dots, t_i, \dots, 0) dt_i + \varepsilon, \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad [6]$$

Из соотношений (5) и (6) следует ограниченность $G_n(M)$ в совокупности.

По первой теореме Хелли существует подпоследовательность $G_{n_k}(M)$, сходящаяся к предельной функции $G_1(M)$ на каждом интервале непрерывности функции $G_1(M)$. Покажем, что

$$G_{n_k}(R_s) \rightarrow G_1(R_s).$$

Для этого достаточно показать, что

$$G_{n_k}(\rho > R) = \int_{\rho > R} G_{n_k}(dM) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad [7]$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Для достаточно больших k

$$\varepsilon - RA(T) \geq \int_{\rho > R} (1 - \cos(TX)) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM).$$

Для достаточно больших $C > 0$

$$\varepsilon > \int_{\rho > C} (1 - \cos(TX)) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G(dM).$$

Обозначим через M_i ($i = 1, 2, \dots, s$) множества

$$M_i \equiv \left\{ \begin{array}{l} \rho > R \\ \frac{x_i}{\rho} > \frac{1}{\sqrt{s}} \end{array} \right\}.$$

Таким образом,

$$2\varepsilon + \int_{\rho < C} (1 - \cos t_i x_i) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G(dM) \geq \int_{M_i} (1 - \cos t_i x_i) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM).$$

Возьмем среднее значение по t_i от обеих частей последнего неравенства в интервале $0 \leq t_i \leq \frac{2\sqrt{s}}{R}$. Получим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon + \int_{\rho < C} \left(1 - \frac{\sin \frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}{\frac{2\sqrt{s}}{R} x_i} \right) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G(dM) &\geq \\ &\geq \int_{M_i} \left(1 - \frac{\sin \frac{2\sqrt{s}}{R} x_i}{\frac{2\sqrt{s}}{R} x_i} \right) \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_{M_i} G_{n_k}(dM), \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Так как подинтегральная функция в левой части при $R \rightarrow \infty$ равномерно при $\rho < C$ стремится к нулю, то в силу произвольности ε

$$\int_{M_i} G_{n_k}(dM) = G_{n_k}(M_i) \rightarrow 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

откуда следует [7].

Тогда в силу обобщенной второй теоремы Хелли имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \right) &\rightarrow \\ \rightarrow \int_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_1(dM) \right) &. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} i(\Gamma_{n_k} T) + \int_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G_{n_k}(dM) \right) &\rightarrow \\ \rightarrow i(T\Gamma) + \int_{R_s} \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \frac{1+\rho^2}{\rho^2} G(dM) \right) &. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\Gamma_{n_k} = (\gamma_1^{n_k}, \dots, \gamma_s^{n_k})$ имеет предел $\Gamma_1 = (\gamma_1', \dots, \gamma_s')$. В силу единственности представления логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения формулой [2] при любом выборе подпоследовательности n_k , а значит и для самой последовательности n имеем

$$\Gamma_n \rightarrow \Gamma; \quad G_n(M) \rightarrow G(M),$$

чем доказана необходимость условия.

Для доказательства достаточности условий теоремы надо показать, что $A_n \rightarrow A$ равномерно в каждом конечном интервале $[t \leq t_0]$, а это следует из однозначности определения вероятностной функции по ее характеристической функции (4).

ТЕОРЕМА 2. Чтобы последовательность безгранично делимых распределений $P_n(M)$ сходилась при $n \rightarrow \infty$ к предельному распределению, необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$:

1. $\mathcal{M}_n(I) \rightarrow \mathcal{M}(I)$ на интервалах непрерывности функции $\mathcal{M}(M)$ вида $I = I(\rho > R; \varphi_1 < \theta_1, \dots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$ ($\rho; \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}$ — сферические координаты).

$$2. \Gamma_n \rightarrow \Gamma.$$

$$3. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 < \rho < \varepsilon} (TX)^2 N_n(dM) + Q_2^{(n)}(T) = Q_2(T).$$

Функции N_n , N , $Q_2^{(n)}$, Q_2 и постоянные Γ_n , Γ определяются формулой [4] для распределений $P_n(M)$ и $P(M)$.

Доказательство этой теоремы следует из второй обобщенной теоремы Хелли и из первой теоремы.

§ 2. СУММЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим последовательность s -мерных случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, каждый из которых представляет собой сумму некоторого числа независимых случайных векторов

$$\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}. \quad [1]$$

Пусть при надлежащем подборе постоянных s -мерных векторов $A_n = (a_1^n, \dots, a_s^n)$ распределения векторов $\xi_n - A_n$ сходятся к предельному. Как и в одномерном случае (9), при решении общей задачи о природе предельных распределений для сумм [1] представляется разумным принять следующие ограничения: слагаемые ξ_{nk} [$1 \leq k \leq k_n$] при $n \rightarrow \infty$ должны быть предельно постоянными. Это означает, что для случайных векторов ξ_{nk} можно подобрать такие постоянные векторы $B_{nk} = (b_{nk}^1, \dots, b_{nk}^s)$, что при произвольном $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно k [$1 \leq k \leq k_n$]

$$P\{|\bar{\xi}_{nk} - \bar{B}_{nk}| \geq \varepsilon\} = P\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^s (x_{nk}^i - b_{nk}^i)^2} \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0.$$

Если все постоянные векторы B_{nk} можно заменить вектором 0 ($0, \dots, 0$), то величины ξ_{nk} назовем бесконечно малыми. Назовем медианой распределения $F(M)$ постоянный вектор $M(m_1, \dots, m_s)$, координаты которого определяются из соотношений

$$\int_{M(x_i < m_i)} F(dM) \geq \frac{1}{2}, \quad \int_{M(x_i > m_i)} F(dM) \geq \frac{1}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad [2]$$

ЛЕММА 1. В качестве постоянных B_{nk} для предельно постоянных векторов можно взять медианы $M_{nk}(m_{nk}^1, \dots, m_{nk}^s)$.

Действительно, по определению предельного постоянства векторов ξ_{nk} для достаточно больших n

$$P\{|\bar{\xi}_{nk} - \bar{B}_{nk}| < \varepsilon\} > 1 - \eta.$$

Докажем, что

$$|\bar{M}_{nk} - \bar{B}_{nk}| = \sqrt{\sum_{i=1}^s (m_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)})^2} \rightarrow 0.$$

Пусть

$$\sqrt{\sum_{i=1}^s (m_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)})^2} \geq C,$$

тогда

$$\max_i |m_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)}| = |m_{nk}^{(j)} - b_{nk}^{(j)}| \geq \frac{C}{\sqrt{s}} = a > 0,$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^s (x_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)})^2} = \max_i |x_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)}| + k, \quad k \geq 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} P\{|\bar{\xi}_{nk} - \bar{B}_{nk}| \geq a\} &= P\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^s (x_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)})^2} \geq a\right\} \geq \\ &\geq P\left\{\max_i |x_{nk}^{(i)} - b_{nk}^{(i)}| \geq a\right\} = P\{|x_{nk}^{(j)} - b_{nk}^{(j)}| \geq a\} = \\ &= P\{|x_{nk}^{(j)} - m_{nk}^{(j)} - b_{nk}^{(j)} + m_{nk}^{(j)}| \geq a\} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

что противоречит исходному предположению о предельном постоянстве $\bar{\xi}_{nk}$.

ЛЕММА 2. Условие бесконечной малости величин $\bar{\xi}_{nk}$ эквивалентно условию

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} P_{nk}(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad [3]$$

Здесь $P_{nk}(M)$ — вероятностная функция величины $\bar{\xi}_{nk}$, ρ — модуль вектора $X = (x_1, \dots, x_s)$, конец которого находится в dM .

Пусть величины $\bar{\xi}_{nk}$ — бесконечно малые, т. е.

$$P\{|\bar{\xi}_{nk}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad [4]$$

равномерно относительно k [$1 \leq k \leq k_n$].

Тогда

$$\begin{aligned} P\{\max_k |\bar{\xi}_{nk}| \geq \varepsilon\} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \\ \sup_k \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} P_{nk}(dM) &= \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} P_{ni}(dM) \leq \int_{\rho < \varepsilon} \rho^2 P_{ni}(dM) + \\ &+ \int_{\rho \geq \varepsilon} P_{ni}(dM) \leq \varepsilon^2 + \int_{\rho \geq \varepsilon} P_{ni}(dM) < \varepsilon^2 + P\{|\bar{\xi}_{ni}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть соотношение [3] имеет место. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_k \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} P_{nk}(dM) &\geq \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} P_{nk}(dM) \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \int_{\rho \geq \varepsilon} P_{nk}(dM) = \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} P\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из соотношения [3] следует [4], что доказывает наше утверждение.

Легко видеть, что условие предельного постоянства может быть записано в виде

$$\sup_k \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X + M_{nk}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где M_{nk} — медиана, F_{nk} — функция распределения вектора ξ_{nk} .

ЛЕММА 3. Чтобы случайные векторы ξ_{nk} ($1 \leq k \leq k_n$; $n = 1, 2, \dots$) были бесконечно малыми, необходимо, чтобы их характеристические функции $f_{nk}(t_1, \dots, t_s)$ равномерно относительно k [$1 \leq k \leq k_n$] и t (t — модуль вектора $T = (t_1, \dots, t_s)$) в любом конечном интервале t [$t \leq t_0$] сходились в единицу.

Пусть ξ_{nk} — бесконечно малы, $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sup_k |f_{nk}(t_1, \dots, t_s) - 1| &= \sup_k \left| \int_{R_s} (e^{i(TX)} - 1) P_{nk}(dM) \right| \leq \\ &\leq \sup_k \int_{\rho < \varepsilon} |e^{i(TX)} - 1| P_{nk}(dM) + 2 \sup_k \int_{\rho \geq \varepsilon} P_{nk}(dM). \end{aligned}$$

Для произвольного $\eta > 0$ и конечного t при достаточно малом $\varepsilon > 0$ ($\rho < \varepsilon$)

$$\begin{aligned} |e^{i(TX)} - 1| &< \frac{1}{2} \eta, \\ \sup_k \int_{\rho < \varepsilon} |e^{i(TX)} - 1| P_{nk}(dM) &< \frac{1}{2} \eta. \end{aligned}$$

Так как ξ_{nk} — бесконечно малы, то

$$\sup_k 2 \int_{\rho \geq \varepsilon} P_{nk}(dM) < \frac{1}{2} \eta$$

и для больших n

$$\sup_k |f_{nk}(t_1, \dots, t_s) - 1| < \eta.$$

ЛЕММА 4. Если при некотором подборе постоянных $B_n = (b_n^{(1)}, \dots, b_n^{(s)})$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - B_n$$

независимых предельно постоянных случайных векторов сходятся к предельному, то существует такое постоянное $c < \infty$, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X + M_{nk}) < C, \quad [5]$$

где M_{nk} — медиана вектора ξ_{nk} , F_{nk} — его функция распределения.

Для доказательства этого предложения применяем метод, использованный Б. В. Гнеденко для получения соответствующего результата в одномерном случае (9, § 23, теорема I). Для этого замечаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_D \rho^2 dF_{nk}(X + M_{nk}) < C_1,$$

где D обозначает область $(|x_i| \leq \frac{2}{a}; i = 1, 2, \dots, s)$, а C_1 — некоторая постоянная, и

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{M_i} dF_{nk}(X + M_{nk}) < C_2,$$

где M_i — область $(|x_i| > \frac{2}{a}, i = 1, 2, \dots, s)$, C_2 — некоторая постоянная, $D + \sum_{i=1}^s M_i = R_s$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X + M_{nk}) &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_D \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X + M_{nk}) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^s \int_{M_i} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} dF_{nk}(X + M_{nk}) \left. \right\} \leq \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_D \rho^2 dF_{nk}(X + M_{nk}) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^s \int_{M_i} dF_{nk}(X + M_{nk}) \left. \right\} \leq C. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Если при некотором подборе постоянных $A_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(s)})$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - A_n$$

независимых бесконечно малых случайных векторов сходятся при $n \rightarrow \infty$ к предельному, то существует такое постоянное число C , что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_s} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} dF_{nk}(X + B_{nk}) < C,$$

где вектор $B_{nk} = (b_{nk}^{(1)}, \dots, b_{nk}^{(s)})$ имеет компоненты

$$b_{nk}^{(i)} = \int_{\rho < \tau} x_i dF_{nk}(X),$$

τ — произвольное число > 0 .

Доказательство этой леммы непосредственно следует из доказательства леммы 4.

На основании приведенных лемм 1 — 5 легко получить доказательства следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных векторов A_n распределения сумм бесконечно малых независимых случайных векторов сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы к предельному распределению сходились распределения безгранично делимых, логарифмы характеристических функций которых $\psi_n(t_1, \dots, t_s)$ даются формулой

$$\begin{aligned} \psi_n(t_1, \dots, t_s) = & -i(TA_n) + \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ i(TB_{nk}) + \right. \\ & \left. + \int_{R_s} (e^{i(TX)} - 1) dF_{nk}(X + B_{nk}) \right\}, \end{aligned}$$

где вектор $B_{nk} = (b_{nk}^{(1)}, \dots, b_{nk}^{(s)})$ имеет компоненты

$$b_{nk}^{(i)} = \int_{\rho < \tau} x_i dF_{nk}(X),$$

τ — положительная постоянная. Предельные распределения для обеих последовательностей совпадают.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы распределение $P(M)$ могло быть предельным для сумм независимых в каждой сумме предельно постоянных s -мерных случайных векторов, необходимо и достаточно, чтобы оно было безгранично делимым.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных $A_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(s)})$ распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - A_n$$

независимых бесконечно малых s -мерных векторов сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовала вполне аддитивная, неотрицательная функция множества $N(M)$, определенная на множествах $M (0 \in M)$, и неотрицательная квадратичная форма $Q_2(T) = Q_2(t_1, \dots, t_s) < \infty$, такие, что:

1. На интервалах вида $I = I(\rho > R; \varphi_1 < \theta_1, \dots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$ ($\rho; \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}$ — сферические координаты), являющихся интервалами непрерывности функции $N(M)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_I P_{nk}(dM) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} P_{nk}(I) = N(I),$$

$$2. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{\rho < \varepsilon} (TX)^2 P_{nk}(dM) - \left(\int_{\rho < \varepsilon} (TX) P_{nk}(dM) \right)^2 \right\} = Q_2(T).$$

Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$(A_n T) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\rho < \tau} (TX) P_{nk}(dM) - (T\Gamma),$$

где $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ — произвольный постоянный вектор; $\rho < \tau$ — сфера непрерывности $N(M)$. Логарифм характеристической функции предельного закона определяется формулой [3] с функциями $N(M)$, $Q_2(T)$ и постоянным вектором Γ .

З а м е ч а н и е. В соотношении [2], вместо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$, можно брать $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

ТЕОРЕМА 4. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных векторов A_n распределения сумм

$$s_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - A_n \quad [6]$$

независимых случайных векторов сходились к нормальному распределению с характеристической функцией

$$e^{-\frac{1}{2}Q_2(t_1, \dots, t_s)} = e^{-\frac{1}{2}Q_2(T)} \quad [7]$$

и слагаемые $\xi_{nk} [1 \leq k \leq k_n]$ были бесконечно малы, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1. \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\rho > \varepsilon} P_{nk}(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad [8]$$

$$2. \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\rho < \varepsilon} (TX)^2 P_{nk}(dM) - \left(\int_{\rho < \varepsilon} (TX) P_{nk}(dM) \right)^2 \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_2(T). \quad [8]$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Из условия 1 имеем

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P\{|x_{nk}| > \varepsilon\} = \max_k \int_{\rho > \varepsilon} P_{nk}(dM) \leq \sum_{k=1}^n \int_{\rho > \varepsilon} P_{nk}(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда следует, что слагаемые ξ_{nk} [$1 \leq k \leq k_n$] бесконечно малы. Из теоремы 3 вытекает, что для сходимости распределений сумм [6] к распределению с характеристической функцией [7], необходимо и достаточно, чтобы

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_I P_{nk}(dM) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_{nk}(I) = 0.$$

для любого интервала $I = I(\rho > R; \varphi_1 < \theta_1), \dots, \varphi_{s-1} < \theta_{s-1})$, [9]

$$2. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\rho < \varepsilon} (TX)^2 P_{nk}(dM) - \left(\int_{\rho < \varepsilon} (TX) P_{nk}(dM) \right)^2 \right\} = Q_2(T).$$

Легко убедиться в эквивалентности условий [8] и [9], и теорема будет доказана.

ТЕОРЕМА 5. Для того, чтобы для данной последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

независимых случайных векторов можно было подобрать действительные постоянные $B_n > 0$ и постоянные векторы A_n , чтобы распределения сумм

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n \quad [10]$$

сходились к распределению с характеристической функцией [7] и слагаемые $\xi_{nk} = \frac{\xi_k}{B_n}$ были бесконечно малы, необходимо и достаточно существование таких последовательностей постоянных $C_n (C_n \rightarrow \infty)$ и $\varepsilon_n (\varepsilon_n \rightarrow 0)$, что при $n \rightarrow \infty$

$$1. \sum_{k=1}^n \int_{\rho > C_n} P_k(dM) \rightarrow 0,$$

$$2. \frac{\varepsilon_n^2}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\rho < C_n} (TX)^2 P_k(dM) - \left(\int_{\rho < C_n} (TX) P_k(dM) \right)^2 \right\} \rightarrow Q_2(T). \quad [11]$$

Доказательство этого предложения легко получить, воспользовавшись теоремой 4.

§ 3. МНОГОМЕРНЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Назовем s -мерное распределение устойчивым, если, каковы бы ни были векторы A_1, A_2 и положительные числа B_1, B_2 , всегда найдутся постоянный вектор A и положительное число B , при которых для трех независимых случайных векторов ξ_1, ξ_2, ξ , имеющих это распределение, случайный вектор $\frac{\xi - A}{B}$ является суммой векторов $\frac{\xi_1 - A_1}{B_1}$ и $\frac{\xi_2 - A_2}{B_2}$.

Обозначим функцию распределения устойчивого закона через $F(X) = F(x_1, \dots, x_s)$. Тогда указанное свойство устойчивости распределения означает, что для произвольных постоянных $B_1 > 0, B_2 > 0$ и векторов $A_1 = (a_1', \dots, a_s')$, $A_2 = (a_1'', \dots, a_s'')$ найдутся постоянная $B > 0$ и постоянный вектор $A = (a_1, \dots, a_s)$, такие, что

$$\begin{aligned} F(Bx_1 + a_1, \dots, Bx_s + a_s) = \\ = F(B_1x_1 + a_1', \dots, B_1x_s + a_s') * F(B_2x_1 + a_1'', \dots, B_2x_s + a_s''). \end{aligned} \quad [1]$$

Рассмотрим последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s -мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_s^{(n)}), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно показать, что класс предельных распределений для нормированных сумм

$$s^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi^{(i)} - A_n}{B_n}, \quad [2]$$

где последовательность постоянных векторов A_n и $B_n > 0$ надлежаще выбраны, совпадает с классом определенных выше устойчивых распределений.

Фельдхейм и Леви (13, 20) показали, что s -мерное распределение устойчиво тогда и только тогда, когда логарифм его характеристической функции $\psi(t_1, \dots, t_s) = \chi(t; \varphi) = \chi(t; \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1})$ ($t; \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}$ — сферические координаты) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \chi(t; \varphi) &= -t^\alpha (C_1(\varphi) + iC_2(\varphi)) + i(T\Gamma), \quad (0 < \alpha \leq 2; \alpha \neq 1) \\ \chi(t; \varphi) &= -t(C_1(\varphi) + iC_2'(t; \varphi)) + i(T\Gamma), \quad (\alpha = 1), \end{aligned} \quad [3]$$

где

$$\begin{aligned} C_1(\varphi) &= k \int_e |\cos \theta|^\alpha H(ds), \\ C_2(\varphi) &= -k \int_e \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha |\cos \theta|^\alpha H(ds), \end{aligned}$$

$$C_2'(t; \varphi) = \int_e \cos \theta \lg |t \cos \theta| H(ds).$$

Здесь введены обозначения: t — модуль вектора $T = (t_1, \dots, t_s)$; $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ — постоянный вектор; $(T\Gamma)$ — скалярное произведение векторов T и Γ ; $H(s)$ — аддитивная неотрицательная функция поверхности, определенная на единичной сфере; k — положительная постоянная; θ — угол между вектором T и единичным вектором $(\omega_1, \dots, \omega_{s-1})$, конец которого находится в ds ; интегрирование распространяется по единичной сфере e .

Число α может принимать значения $0 < \alpha \leq 2$ и называется характеристическим показателем устойчивого распределения. При $\alpha = 2$ имеем нормальное распределение. Функция $C_2(\varphi)$ в этом случае тождественно равна нулю, $C_1(\varphi)$ — положительно определенная квадратичная форма от $\frac{t_i}{t}$, $(i = 1, 2, \dots, s)$. При $H(s) = \text{const}$ имеем несобственные распределения.

Непосредственное дифференцирование формулы обращения показывает, что все собственные устойчивые распределения непрерывны и имеют непрерывные производные всех порядков. Обозначим в дальнейшем плотность собственного устойчивого распределения, определенного формулой [3], через

$$p(\bar{t}; H; \alpha, \bar{\gamma}).$$

Если в выражении [2] принять, что

$$\xi_{nk} = \frac{\xi^{(k)}}{B_n} - \frac{A_n}{n B_n},$$

то задача разыскания предельных распределений для нормированных сумм [2] будет сведена к общей задаче суммирования независимых случайных векторов, рассмотренной в § 2. Отсюда следует, что устойчивые распределения являются безгранично делимыми.

Легко убедиться в том, что в формуле [3] § 1, дающей общий вид логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения, для невырожденных s -мерных устойчивых распределений следует положить

1. При $\alpha = 2$

$$N(M) \equiv \text{const}; \quad \frac{1}{2} Q_2(T) = t^2 C_1(\varphi), \quad [4]$$

2. При $0 < \alpha < 2$

$$N(I) = \frac{H(\omega)}{R^\alpha}; \quad Q_2(T) \equiv 0, \quad [5]$$

где I означает интервал

$$I = I(\rho > R; \varphi_1 < \omega_1, \dots, \varphi_{s-1} < \omega_{s-1});$$

ω — интервал на единичной сфере:

$$\omega = \omega(\rho = 1; \varphi_1 < \omega_1, \dots, \varphi_{s-1} < \omega_{s-1}).$$

Отсюда непосредственно следует единственность представления логарифма характеристической функции устойчивого распределения формулой [3].

ЛЕММА 1. Рост функции $H(s)$ для невырожденного s -мерного устойчивого распределения при $\alpha \neq 2$ не может сводиться к росту на некотором множестве, принадлежащем диаметральному сечению единичной s -мерной сферы.

Доказательство этого предложения основано на следующем признаке вырождения распределения.

ЛЕММА 2. Чтобы s -мерное распределение вырождалось в $s-1$ -мерное распределение, необходимо и достаточно, чтобы модуль его характеристической функции обращался в единицу в двух точках (отличных от начала) $(a_1, \dots, a_s)$, $(\beta a_1, \dots, \beta a_s)$, где β — иррациональное число.

Назовем такие точки несоизмеримыми.

Докажем более точное предложение.

ЛЕММА 2'. Для того чтобы s -мерное распределение $P(M)$ вырождалось в $s-1$ -мерное в гиперплоскости $a_1 x_1 + \dots + a_s x_s = 2\pi d$, необходимо и достаточно, чтобы для точки $(a_1, a_2, \dots, a_s)$

$$e^{-2\pi i d} f(a_1, \dots, a_s) = 1$$

и для некоторого иррационального числа β

$$e^{-2\pi i d \beta} f(\beta a_1, \dots, \beta a_s) = 1,$$

где $f(T)$ — характеристическая функция распределения $P(M)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что если модуль характеристической функции s -мерного распределения обращается в единицу в точке, отличной от начала, то распределение не может быть непрерывным в s -мерном пространстве. Действительно, пусть в точке $(t_1^0, \dots, t_s^0)$

$$|f(t_1^0, \dots, t_s^0)| = 1,$$

где, по крайней мере, одно из чисел $t_1^0, \dots, t_s^0$ отлично от нуля. Тогда имеем

$$e^{i\theta} f(t_1^0, \dots, t_s^0) = 1$$

или

$$\int_{k_s} e^{i(\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s)} P(dM) = 1.$$

Отсюда видим, что $P(dM)$ может отличаться от нуля только в точках, расположенных на системе параллельных гиперплоскостей

$$\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s = 2\pi k,$$

где k — произвольное целое.

Докажем теперь достаточность условий леммы 2. Как и выше, имеем

$$\int_{R_s} e^{-2\pi i d + i(a_1 x_1 + \dots + a_s x_s)} P(dM) = 1,$$

$$\int_{R_s} e^{-2\pi i \beta d + i\beta(a_1 x_1 + \dots + a_s x_s)} P(dM) = 1.$$

Отсюда заключаем, что $P(dM)$ может отличаться от нуля только на общей части двух систем параллельных гиперплоскостей

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_s x_s = 2\pi d + 2\pi k, \\ \beta(a_1 x_1 + \dots + a_s x_s) = 2\pi d\beta + 2\pi k_1. \end{cases}$$

Эта система совместима только для одной пары значений $k=k_1=0$ и сводится к одному уравнению

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_s x_s = 2\pi d.$$

Необходимость. Пусть распределение сводится к распределению в гиперплоскости

$$a_1 x_1 + \dots + a_s x_s = 2\pi d.$$

Тогда

$$e^{-2\pi i d} f(a_1, \dots, a_s) = \int_{R_s} e^{-2\pi i d + i(a_1 x_1 + \dots + a_s x_s)} P(dM) = \int_{R_s} P(dM) = 1,$$

а также

$$e^{-2\pi i \beta d} f(\beta a_1, \dots, \beta a_s) = \int_{R_s} e^{\beta i(-2\pi d + a_1 x_1 + \dots + a_s x_s)} P(dM) = 1.$$

Следствие. Если модуль характеристической функции s -мерного распределения равен единице в m парах точек, несоизмеримых в каждой паре

$$\left(\begin{matrix} t'_{11}, \dots, t'_{1s} \\ t''_{11}, \dots, t''_{1s} \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} t'_{m1}, \dots, t'_{ms} \\ t''_{m1}, \dots, t''_{ms} \end{matrix} \right),$$

и таких, что матрица (t_{ik}) ($i=1, 2, \dots, m$; $k=1, \dots, s$) имеет ранг m , то распределение вырождается в распределение в пространстве $s-m$ -измерений.

Доказательство леммы 1. Из соотношения [5] следует, что логарифм характеристической функции $\chi(t; \varphi)$ устойчивого распределения может быть представлен в виде

$$\chi(t; \varphi) = i(T\Gamma) - \int_{\rho>0} \int_e \left(e^{i(TX)} - 1 - \frac{i(TX)}{1+\rho^2} \right) d\frac{H(\omega)}{\rho^2}, \quad [6]$$

где внутреннее интегрирование проводится по единичной s -мерной сфере e . В предположении леммы внутреннее интегрирование надо

проводить по диаметральному сечению σ единичной сферы e . Обозначим через ω' совокупность текущих координат этого сечения. Возьмем в левой части [6] вместо совокупности координат φ значения φ° , определяющие ортогональное к сечению σ направление. При произвольном $t > 0$ имеем

$$\chi(t; \varphi^\circ) = i(T'G) - \int_{\rho > 0} \int_{\sigma} \left(e^{i(T'X)} - 1 - \frac{i(T'X)}{1 + \rho^2} \right) d \frac{H(\omega)}{\rho^\alpha} = i(T'G).$$

Таким образом, на направлении $\varphi^\circ = (\varphi_1^\circ, \dots, \varphi_{s-1}^\circ)$ найдутся две неизомеримые точки, в которых модуль характеристической функции равен единице. В силу леммы 2 распределение вырождается. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 3. Если распределение $P(M)$, предельное для сумм [2] независимых бесконечно малых слагаемых $\xi_{nk} = \frac{\xi_k}{B_n} - \frac{A_n}{nB_n}$, где $B_n > 0$ и постоянные векторы A_n надлежаще выбраны, является собственным, то при $n \rightarrow \infty$

$$B_n \rightarrow \infty. \quad [7]$$

Действительно, пусть существует такая последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$, что $B_{n_i} \rightarrow B \neq \infty$. Пусть тогда $(t_1, \dots, t_s)$ — произвольный вектор. Величины $t_j^{(i)} = t_j B_{n_i}$ при $i \rightarrow \infty$ стремятся к $t_j B$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Так как величины ξ_{nk} бесконечно малы равномерно относительно k [$1 \leq k \leq k_n$], то при $i \rightarrow \infty$

$$|f_k(t_1, \dots, t_s)| = \left| f_k \left(\frac{t_1^{(i)}}{B_{n_i}}, \dots, \frac{t_s^{(i)}}{B_{n_i}} \right) \right| \rightarrow 1, \quad [1 \leq k \leq n],$$

т. е. $|f_k(t_1, \dots, t_s)| = 1$ при любом $(t_1, \dots, t_s)$ [$1 \leq k \leq n$]. Отсюда следует, что при любом $(t_1, \dots, t_s)$ для характеристической функции предельного распределения $\varphi(t_1, \dots, t_s)$ имеет место соотношение

$$|\varphi(t_1, \dots, t_s)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^k \left| f_k \left(\frac{t_1}{B_{nk}}, \dots, \frac{t_s}{B_{nk}} \right) \right| = 1.$$

В силу леммы 2 § 2 это означает, что предельное распределение $P(M)$ является несобственным, что противоречит исходному предположению.

§ 4. ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим последовательность взаимно независимых одинаково распределенных s -мерных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ с вероятностной функцией $P(M)$. Скажем, что $P(M)$ принадлежит области притяжения распределения $R(M)$, если при некотором подборе постоянных чисел $B_n > 0$ и вещественных векторов A_n при $n \rightarrow \infty$ распределения сумм

$$s_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n$$

сходятся к $\bar{F}(M)$. Из §3 следует, что областями притяжения обладают только устойчивые распределения и что область притяжения каждого устойчивого распределения непуста, так как она содержит, по крайней мере, данное устойчивое распределение.

Теорема 3 §2 позволяет указать на характеристический признак, которому должна удовлетворять вероятностная функция $P(M)$ для того, чтобы она принадлежала области притяжения данного устойчивого распределения. В одномерном случае признаки, аналогичные приведенным далее в теоремах 1—2, были получены для нормального распределения А. Я. Хинчиным, П. Леви и В. Феллером (9,18) в 1935 г. и для остальных устойчивых распределений с характеристическим показателем $0 < \alpha < 2$ Б. В. Гнеденко (2,9) в 1938 г., а также другим способом — В. Деблиным (10) в 1939 г.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы s -мерная вероятностная функция $P(M)$ принадлежала области притяжения невырожденного нормального распределения $G(M)$ с характеристической функцией

$$e^{-\frac{1}{2} Q_2(t_1, \dots, t_s)} = e^{-\frac{1}{2} Q_2(T)} \quad [1]$$

необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{\rho > R} P(dM)}{\int_{\rho < R} \rho^2 P(dM)} = 0, \\ 2. \quad & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{\rho < R} (T_1 X)^2 P(dM)}{\int_{\rho < R} (T_2 X)^2 P(dM)} = \frac{Q_2(T_1)}{Q_2(T_2)} \end{aligned} \quad [2]$$

при произвольных $T_1 = (t'_1, \dots, t'_s)$ и $T_2 = (t''_1, \dots, t''_s)$.

Доказательство. Случай первый:

$$\int_{R_s} \rho^2 P(dM) < \infty. \quad [3]$$

Тогда

$$\int_{R_s} (TX) P(dM) < \infty$$

при любом $T = (t_1, \dots, t_s)$. Центрируя $P(M)$ математическими ожиданиями, полагая $B_n = \sqrt{n}$, убеждаемся в принадлежности центрирован-

ного распределения $\bar{P}(M)$ (а, значит, и $P(M)$) к области притяжения нормального распределения с характеристической функцией [1], причем

$$Q_2(T) = \int_{R_s} (TX)^2 \bar{P}(dM).$$

С другой стороны, очевидно, что $\bar{P}(M)$ удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, все распределения с конечными дисперсиями принадлежат областям притяжения нормальных распределений.

Случай второй:

$$\int_{R_s} \rho^2 P(dM) = \infty. \quad [4]$$

Тогда

$$\left\{ \int_{\rho < R} x_i P(dM) \right\}^2 = o \left\{ \int_{\rho < R} \rho^2 P(dM) \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad [5]$$

Действительно, если

$$\int_{R_s} x_i^2 P(dM) < \infty,$$

то соотношение [5] очевидно; если

$$\int_{R_s} x_i^2 P(dM) = \infty,$$

то выберем положительную неограниченно возрастающую при $x_i = \pm \infty$ функцию $z_i(x_i)$ и такую, что

$$\int_{R_s} z_i^2(x_i) P(dM) = \int_{-\infty}^{\infty} z_i^2(x_i) d_{x_i} P(M) = C < \infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left[\int_{\rho < R} x_i P(dM) \right]^2 &\leq \int_{\rho < R} z_i^2(x_i) P(dM). \\ \int_{\rho < R} \frac{x_i^2}{z_i^2(x_i)} P(dM) &\leq C \int_{\rho < R} \frac{x_i^2}{z_i^2(x_i)} P(dM). \end{aligned}$$

Отсюда следует [5].

Для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность условий [2] с условиями [7] теоремы 5 § 2, которые в нашем случае могут быть записаны в таком виде: существуют последовательности C_n ($C_n \rightarrow \infty$) и ε_n ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) такие, что

1.
$$n \int_{\rho > C_n} P(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$
2.
$$\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} (TX)^2 P(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_2(T)$$

[6].

при любом $T = (t_1, \dots, t_s)$.

Далее заметим, что если $P(M)$ принадлежит области притяжения некоторого нормального распределения, то в рассматриваемом случае при любом $T = (t_1, \dots, t_s)$, отличном от $0(0, \dots, 0)$

$$\int_{\rho < R} (TX)^2 P(dM) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty \quad [7]$$

Действительно, в этом случае выполнены условия [6] и для некоторого i ($1 \leq i \leq s$)

$$\int_{R_s} x_i^2 P(dM) = \infty.$$

Допустив во втором условии [6], что $t_i \neq 0$; $t_k = 0$, $k \neq i$, получаем

$$\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} x_i^2 t_i^2 P(dM) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_{ii} t_i^2,$$

где σ_{ii} — коэффициент при t_i^2 в квадратичной форме $Q_2(T)$. Отсюда $\frac{n \varepsilon_n^2}{C_n^2} \rightarrow 0$ и из второго условия [6] следует [7].

Из соотношения [7] следует, что если для некоторого i ($1 \leq i \leq s$)

$$\int_{R_s} x_i^2 P(dM) = \infty$$

и $P(M)$ принадлежит области притяжения невырожденного нормального распределения, то это соотношение имеет место для всех i ($i = 1, 2, \dots, s$) (достаточно заметить, что в силу предположения о невырождаемости предельного распределения все коэффициенты σ_{ii} ($i = 1, 2, \dots, s$) отличны от нуля).

Покажем, что из условий [6] следуют условия [2]. Обозначим

$$\nu(R, T) = \int_{\rho > R} t^2 \cos^2(\hat{TX}) P(dM) = t^2 k_T \int_{\rho > R} P(dM),$$

где k_T — среднее значение $\cos^2(\hat{TX})$,

$$\mu(R; T) = \frac{1}{R^2} \int_{\rho < R} (TX)^2 P(dM).$$

Так как $C_n \rightarrow \infty$, то для всякого сколь угодно большого R можно найти такое n , при котором $C_n \leq R < C_{n+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \int_{\rho < R} (TX)^2 P(dM) &= \frac{1}{R^2} \int_{C_n < \rho < R} (TX)^2 P(dM) + \frac{1}{R^2} \int_{\rho < C_n} (TX)^2 P(dM) \leq \\ &\leq t^2 \int_{\rho > C_n} \cos^2(\hat{TX}) P(dM) + \frac{1}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} (TX)^2 P(dM). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu(C_n; T) + \nu(C_n; T) &\geq \mu(R; T) \geq \mu(C_{n+1}; T) - \nu(C_n; T), \\ \nu(C_n; T) &\geq \nu(R; T) \geq \nu(C_{n+1}; T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n \nu(C_n; T)}{\frac{n}{n+1} (n+1) \mu(C_{n+1}; T) - n \nu(C_n; T)} &\geq \frac{\nu(R; T)}{\mu(R; T)} \geq \\ &\geq \frac{(n+1) \nu(C_{n+1}; T)}{\frac{n+1}{n} [n \mu(C_n; T) + n \nu(C_n; T)]} \end{aligned}$$

В силу условий [6] получаем

$$\frac{R^2 \int_{\rho > R} t^2 \cos^2(\hat{TX}) P(dM)}{\int_{\rho > R} (TX)^2 P(dM)} N \rightarrow 0,$$

откуда следует первое условие [2].

Пусть теперь T_1 и T_2 произвольные векторы, отличные от нулевого. Имеем

$$\begin{aligned} \mu(C_n; T_1) + \nu(C_n; T_1) &\geq \mu(R; T_1) \geq \mu(C_{n+1}; T_1) - \nu(C_n; T_1), \\ \mu(C_n; T_2) + \nu(C_n; T_2) &\geq \mu(R; T_2) \geq \mu(C_{n+1}; T_2) - \nu(C_n; T_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{n \mu(C_n; T_1) + n \nu(C_n; T_1)}{\frac{n}{n+1} (n+1) \mu(C_{n+1}; T_2) - n \nu(C_n; T_2)} &\geq \frac{\mu(R; T_1)}{\mu(R; T_2)} \geq \\ &\geq \frac{n \mu(C_{n+1}; T_1) - n \nu(C_n; T_1)}{n \mu(C_n; T_2) + n \nu(C_n; T_2)}, \end{aligned}$$

и из второго условия [6] следует второе условие [2].

Из условий [2] следуют условия [6]. Пусть $\delta > 0$ — произвольно; T_1 — вектор, отличный от нулевого. Обозначим через $C_n(\delta)$ наименьшее R , для которого $n \nu(R; T) \leq \delta$. Так как

$$\int_{R_\delta} (T_1 X)^2 P(dM) = \infty,$$

то $C_n(\delta) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Из первого условия [2] следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$n\mu\left(\frac{1}{2} C_n(\delta); T_1\right) > \frac{\delta}{\varepsilon},$$

отсюда

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{1}{2} C_n(\delta); T_1\right) &= \frac{4}{C_n^2(\delta)} \int_{\rho < \frac{C_n(\delta)}{2}} (T_1 X)^2 P(dM) \leq \\ &\leq \frac{4}{C_n^2(\delta)} \int_{\rho < C_n(\delta)} (T_1 X)^2 P(dM) = 4\mu(C_n(\delta); T_1) \end{aligned}$$

или

$$n\mu(C_n(\delta); T_1) > \frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

Выберем ε равным δ^2 . Имеем

$$n\mu(C_n(\delta); T_1) > \frac{1}{4\delta}.$$

Пусть $\delta_k > 0$, $\delta_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Для каждого δ_k получим последовательность $C_n(\delta_k)$. Обозначим $C_n = C_n(\delta_n)$. Имеем

$$n\nu(C_n; T_1) \leq \delta_n, \quad n\mu(C_n; T_1) > \frac{1}{4\delta_n}.$$

Отсюда

$$n \int_{\rho > C_n} (T_1 X)^2 P(dM) = nt^2 \int_{\rho > C_n} \cos^2(\widehat{T_1 X}) P(dM) \rightarrow 0,$$

откуда следует первое условие [6]; точно так же имеем

$$\frac{n}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} (T_1 X)^2 P(dM) \rightarrow \infty.$$

Допустим

$$\varepsilon_n^3 = \frac{Q_2(T_1)}{\frac{n}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} (T_1 X)^2 P(dM)}$$

Отсюда из второго условия [2] для всякого T

$$\frac{\varepsilon_n^3 n}{C_n^2} \int_{\rho < C_n} (T_1 X)^2 P(dM) \rightarrow Q_2(T),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Чтобы s -мерная вероятностная функция принадлежала области притяжения невырожденного s -мерного устойчивого распределения, логарифм характеристической функции которого определяется формулой 3 § 3 с характеристическим показателем α ($0 < \alpha < 2$) и функцией $H(\theta)$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$1. \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{P\{\rho > R\}}{P\{\rho > kR\}} = k^\alpha$$

при произвольном $k > 0$, [8]

$$2. \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{P\{\rho > R; \varphi < \theta\}}{P\{\rho > R; \varphi < \theta'\}} = \frac{H(\theta)}{H(\theta')}$$

для произвольного $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ и $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_s)$, для которого $H(\theta') = H(\varphi_1 < \theta'_1, \dots, \varphi_{s-1} < \theta'_{s-1}) \neq 0$.

Доказательство. Из теоремы 3 § 2 следует, что для принадлежности $P(M)$ области притяжения устойчивого распределения (с характеристическим показателем α ($0 < \alpha < 2$) и функцией $H(\theta)$) необходимо и достаточно, чтобы при некотором подборе постоянных B_n ($B_n \rightarrow \infty$) выполнялись соотношения:

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nP\{\rho > RB_n; \varphi < \theta\} = \frac{H(\theta)}{R^\alpha}$$

для любого $R > 0$, [9]

$$2. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{B_n^2} \left\{ \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) - \left(\int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX) P(dM) \right)^2 \right\} = 0.$$

Покажем эквивалентность условий [8] и [9].

Из условий [9] следуют условия [8]. Пусть $y > 0$ велико. Подберем столь большое n , чтобы при данном k

$$B_n R \leq y < B_{n+1} R.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P\{\rho > B_n R\} &\geq P\{\rho > y\} \geq P\{\rho > B_{n+1} R\}, \\ P\{\rho > kB_n R\} &\geq P\{\rho > ky\} \geq P\{\rho > kB_{n+1} R\}, \\ \frac{nP\{\rho > B_n R\}}{nP\{\rho > kB_{n+1} R\}} &\geq \frac{P\{\rho > y\}}{P\{\rho > ky\}} \geq \frac{P\{\rho > B_{n+1} R\}}{P\{\rho > kB_{n+1} R\}}; \end{aligned}$$

Отсюда

$$k^\alpha \geq \overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \frac{P\{\rho > y\}}{P\{\rho > ky\}} \geq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P\{\rho > y\}}{P\{\rho > ky\}} \geq k^\alpha,$$

т. е. имеет место первое условие [8]. Далее

$$\begin{aligned} P\{\rho > B_n R; \varphi < \theta\} &\geq P\{\rho > y; \varphi < \theta\} \geq P\{\rho > B_{n+1} R; \varphi < \theta\}, \\ P\{\rho > B_n R; \varphi < \theta'\} &\geq P\{\rho > y; \varphi < \theta'\} \geq P\{\rho > B_{n+1} R; \varphi < \theta'\}. \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, получаем второе условие [8].

Из условий [8] следуют условия [9]. Действительно, из [8] следует, что для таких θ' , для которых $H(\theta') \neq 0$ при любом R

$$P\{\rho > R; \varphi < \theta'\} > 0.$$

Обозначим через B_n наименьший корень уравнения

$$P\{\rho > R(1 + 0); \theta'\} \leq \frac{H(\theta')}{n} \leq P\{\rho > R(1 - 0); \theta'\}. \quad [10]$$

В силу [10] $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда из соотношений [8] следует, что при любом $R (R > 0)$

$$\begin{aligned} nP(\rho > RB_n; \theta) &= \frac{H(\theta)}{H(\theta_1)} nP(\rho > RB_n; \theta') (1 + o(1)) = \\ &= \frac{H(\theta)}{H(\theta_1)} nP(\rho > B_n(1 + 0); \theta') \frac{1}{R^\alpha} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{H(\theta)}{H(\theta_1)} nP(\rho > B_n(1 - 0); \theta') \frac{1}{R^\alpha} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда и из [10] заключаем, что

$$nP\{\rho > xB_n; \varphi < \theta\} = \frac{H(\theta)}{x^\alpha} (1 + o(1)). \quad [11]$$

Покажем теперь, что при $T = (t_1, \dots, t_s)$, отличном от начала,

$$\int_{K_s} (TX)^2 P(dM) = \infty. \quad [12]$$

Из условия [8] следует, что можно найти такое большое x_0 , что при данном $\varepsilon > 0$ и $k > 1$ ($k^{2-\alpha}(1-\varepsilon) \geq 1$)

$$\frac{P(\rho > k^s x_0)}{P(\rho > k^{s+1} x_0)} = (1 + \varepsilon_s)^{-1} k^\alpha, \quad [13]$$

где $|\varepsilon_s| \leq \varepsilon$ для $s = 0, 1, 2, \dots$. Имеем при произвольном $T (\neq 0)$

$$\begin{aligned} \int_{K_s} (TX)^2 P(dM) &= \int_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{k^{s-1}x_0 \leq \rho < k^s x_0} (TX)^2 P(dM) \geq \\ &\geq \int_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + t^2 x_0^2 \sum_{s=1}^{\infty} k^{2(s-1)} \int_{k^{s-1}x_0 \leq \rho < k^s x_0} \cos^2(\hat{TX}) P(dM) \geq \\ &\geq \int_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + t^2 x_0^2 \sum_{s=1}^{\infty} k^{2(s-1)} k_T P(k^{s-1}x_0 \leq \rho < k^s x_0). \end{aligned}$$

В силу условия [12]

$$P(k^{s-1}x_0 \leq \rho < k^s x_0) = P(\rho > k^{s-1}x_0) - P(\rho > k^s x_0) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq P(\rho > x_0) \left\{ \prod_{r=1}^{s-1} (1 + \varepsilon_r) k^{-\alpha(s-1)} - \prod_{r=1}^s (1 + \varepsilon_r) k^{-\alpha s} \right\} \geq \\ &\geq P(\rho > x_0) (1 - \varepsilon)^s k^{-\alpha s} \left\{ \frac{k^\alpha}{1 + \varepsilon} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{R_s} (TX)^2 P(dM) &\geq \int_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) + \\ &+ P(\rho > x_0) k^{-2} \left\{ \frac{k^\alpha}{1 + \varepsilon} - 1 \right\} \sum_{s=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^s k^{s(2-\alpha)}. \end{aligned} \quad [14]$$

Так как при каждом x_0 $P(\rho > x_0) > 0$ и ряд в последнем неравенстве расходится, то соотношение [12] доказано.

Выберем теперь столь большое n , чтобы при данном $T(\neq 0)$

$$\int_{\rho < x_0} (TX)^2 P(dM) \leq \int_{x_0 < \rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM),$$

что в силу соотношения [12] возможно. Тогда

$$\int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) \leq 2 \int_{x_0 < \rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM).$$

Выберем такое $s > 0$, чтобы

$$k^s x_0 \leq B_n \varepsilon < k^{s+1} x_0. \quad [15]$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) &\leq 2x_0^2 \sum_{r=1}^s k^{2(r+1)} P\{k^r x_0 \leq \rho < k^{r+1} x_0\} < \\ &< 2x_0^2 \sum_{r=0}^s k^{2(r+1)} P\{\rho \geq k^r x_0\} \leq 2\varepsilon^2 B_n^2 \sum_{r=0}^s k^{2(r-s+1)} P(\rho \geq k^r x_0). \end{aligned}$$

В силу [14] и [15]

$$\begin{aligned} P\{\rho \geq k^r x_0\} &\leq k^\alpha (1 + \varepsilon) P\{\rho \geq k^{r+1} x_0\} \leq \\ &\leq [(1 + \varepsilon) k^\alpha]^{s-r+1} P\{\rho \geq k^{s+1} x_0\} \leq [(1 + \varepsilon) k^\alpha]^{s-r+1} P\{\rho \geq \varepsilon B_n\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем при $k^{\alpha-2}(1 + \varepsilon) < 1$

$$\int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) \leq 2B_n^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon) k^{\alpha+2} P(\rho \geq \varepsilon B_n) \frac{1}{1 - (1 + \varepsilon) k^{\alpha-2}}$$

и в силу [12]

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{B_n^2} \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) \leq 2\varepsilon^{2-\alpha} (1+\varepsilon) k^{\alpha+2} \frac{1}{1-(1+\varepsilon)k^{\alpha-2}},$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{B_n^2} \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) = 0.$$

А так как

$$\frac{n}{B_n^2} \left\{ \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM) - \left(\int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX) P(dM) \right)^2 \right\} \leq \frac{n}{B_n^2} \int_{\rho < \varepsilon B_n} (TX)^2 P(dM),$$

то теорема доказана.

Для частного случая, когда распределение $P(M)$ притягивается к устойчивому распределению с помощью одних нормирующих коэффициентов $B_n > 0$, и случаев, приводящихся к этому, легко указать характеристический признак принадлежности этого распределения области притяжения данного устойчивого распределения. В случае притяжения такого вида в качестве предельных распределений могут быть устойчивые распределения, логарифм характеристической функции которых имеет вид

$$\begin{aligned} \lg \psi(t; \varphi) = \chi(t, \varphi) = -t^\alpha (C_1(\varphi) + iC_2(\varphi)) + \\ + i(T\Gamma) = -t^\alpha C(\varphi) + i(T\Gamma), \end{aligned} \quad [16]$$

где $C_1(\varphi)$, $C_2(\varphi)$ определены, как в § 3. При $\alpha = 2$ $C_2(\varphi) \equiv 0$ (заметим, что для невырожденных устойчивых распределений $C_1(\varphi) \neq 0$ ни при одном значении φ . Это следует, хотя бы из того, что устойчивые распределения безгранично делимы).

ТЕОРЕМА 3. Чтобы распределение $P(M)$ принадлежало области притяжения устойчивого распределения с характеристической функцией [15], необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{R\chi(s\tau; \varphi)}{R\chi(\tau; \varphi)} = s^\alpha, \\ \text{б) } \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\chi(\tau; \varphi_1)}{\chi(\tau; \varphi_2)} = \frac{C(\varphi_1)}{C(\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Необходимость условия следует с очевидностью из того факта, что (в силу леммы 3 §3) $B_n \rightarrow \infty$.

Достаточность. Из второго условия имеем

$$\begin{aligned} R\chi(\tau; \varphi_1) \cdot IC(\varphi_2) + I\chi(\tau; \varphi_1) \cdot RC(\varphi_2) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} R\chi(\tau; \varphi_2) \cdot IC(\varphi_1) + I\chi(\tau; \varphi_2) \cdot RC(\varphi_1). \end{aligned}$$

Полагая здесь $\varphi_2 = \varphi + \pi$, $\varphi_1 = \varphi$, получаем

$$R\chi(\tau; \varphi) \cdot IC(\varphi) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} I\chi(\tau; \varphi) \cdot RC(\varphi),$$

или

$$\frac{R\chi(\tau; \varphi)}{I\chi(\tau; \varphi)} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{RC(\varphi)}{IC(\varphi)}.$$

Обозначим через B_n наименьший корень уравнения

$$R\chi(\tau; \varphi_0) = -\frac{RC(\varphi_0)}{n},$$

где φ_0 — произвольное фиксированное значение φ . Имеем

$$I\chi(\tau; \varphi_0) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{IC(\varphi_0)}{RC(\varphi_0)} R\chi(\tau; \varphi_0) = -\frac{IC(\varphi_0)}{RC(\varphi_0)} \frac{RC(\varphi_0)}{n} = -\frac{IC(\varphi_0)}{n},$$

$$\chi\left(\frac{1}{B_n}; \varphi_0\right) = R\chi\left(\frac{1}{B_n}; \varphi_0\right) + iI\chi\left(\frac{1}{B_n}; \varphi_0\right) \rightarrow -\frac{C(\varphi_0)}{n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} n\chi\left(\frac{t}{B_n}; \varphi\right) &\rightarrow nt^\alpha \chi\left(\frac{1}{B_n}; \varphi\right) \rightarrow nt^\alpha \frac{C(\varphi)}{C(\varphi_0)} \chi\left(\frac{1}{B_n}; \varphi_0\right) \rightarrow \\ &\rightarrow nt^\alpha \frac{C(\varphi)}{C(\varphi_0)} \cdot \frac{-C(\varphi_0)}{n} = -t^\alpha C(\varphi), \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

что и доказывает наше предположение.

Замечание. Все распределения $P(M)$, принадлежащие областям притяжения устойчивых распределений с характеристическим показателем α ($0 < \alpha \leq 2$), обладают следующим свойством

$$\frac{R\chi(s\tau; \varphi)}{R\chi(\tau; \varphi)} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} s^\alpha.$$

Это следует немедленно из того, что $B_n \rightarrow \infty$.

Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

§ 5. МНОГОМЕРНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть s -мерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ принимает значения только с координатами вида

$$(a_1 + k_1 h_1, \dots, a_s + k_s h_s),$$

где k_i ($i = 1, \dots, s$) — произвольные целые, a_i , h_i ($i = 1, 2, \dots, s$) — некоторые постоянные. Изменив для простоты масштабы по осям, можем ограничиться рассмотрением случая, когда случайный вектор принимает значения только с целочисленными координатами. Назовем такой случайный вектор d -решетчатым, если общий наибольший делитель всех определителей порядка s , составленных из разностей координат точек, вероятности которых положительны, равен s .

Не ограничивая общности, будем считать, что координаты возможных значений вектора ξ по каждой оси взаимно просты в совокупности.

Будем считать, что $n \geq s$, так как при $n < s$ распределение выродилось бы в распределение в пространстве с числом измерений, равным n (действительно, в этом случае модуль характеристической функции обращается в единицу в пространстве $s - n$ измерений, а, значит, и в $s - n$ парах несоизмеримых точек с координатами, образующими матрицу ранга $s - n$, и наше утверждение следует из следствия леммы 2 §3).

З а м е ч а н и е. Если модуль характеристической функции $f(t_1, \dots, t_s)$ равен единице в точке $(t_1^0, \dots, t_s^0)$, то он равен единице во всех точках вида

$$a) \quad (t_1^0 + 2\pi k_1, \dots, t_s^0 + 2\pi k_s),$$

где $k_i (i = 1, 2, \dots, s)$ — произвольные целые,

$$б) \quad (kt_1^0, kt_2^0, \dots, kt_s^0),$$

где k — произвольное целое.

Утверждение а) следует непосредственно из вида уравнений [2]. Утверждение б) не менее очевидно: если $|f(T_0)| = 1$, то

$$e^{i\theta} f(t_1^0, \dots, t_s^0) = \int_{R_s} e^{i(\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s)} dP(x_1, \dots, x_s).$$

Отсюда следует, что dP отлично от нуля только на гиперповерхностях вида

$$\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s = 2\pi k_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad [3]$$

где $k_j (j = 1, 2, \dots)$ — произвольное целое. Далее имеем

$$\begin{aligned} e^{ik\theta} f(kt_1^0, \dots, kt_s^0) &= \int_{R_s} e^{ik(\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s)} dP(X) = \\ &= \sum_j \int_{\theta + t_1^0 x_1 + \dots + t_s^0 x_s = 2\pi k_j} e^{ik \cdot 2\pi k_j} dP(X) = \int_{R_s} dP(X) = 1, \end{aligned}$$

так как интегрирование по всему пространству R_s сводится к интегрированию по гиперплоскостям [3].

Пусть квадратные унимодулярные матрицы: A (порядка n) и B (порядка s) приводят матрицу (x_{ij}) ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, s$) к каноническому виду

$$A(x_{ij})B = E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_s \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s| = d.$$

Примем для удобства $\tau_i = \frac{t_i}{2\pi} (i = 1, \dots, s)$. Из [2] имеем

$$(x_{ij}) \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}. \quad [4]$$

Произведем замену по формуле

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{pmatrix}. \quad [5]$$

Умножим [4] слева на A . Имеем

$$A(x_{ij}) B \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \gamma_1 &= \sum_{i=1}^n a_{1i} e_i \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon_s \gamma_s &= \sum_{i=1}^n a_{si} e_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^n a_{s+1,i} e_i \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= \sum_{i=1}^n a_{ni} e_i \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{1i} e_i &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{s-1,i} e_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{si} e_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n a_{s+1,i} e_i &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} e_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

Так как матрица A унимодулярна, то система [7] разрешима в целых числах. Взяв в качестве $e_1, \dots, e_n$ в уравнении [6] это решение, получим значения для $\gamma_i (i=1, \dots, s)$,

$$\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_{s-1} = 0, \gamma_s = \frac{1}{\varepsilon_s}$$

или, переходя к переменным $\tau_1, \dots, \tau_s$, а затем к $t_1, \dots, t_s$, получаем

$$t_1^0 = 2\pi \frac{b_{1s}}{\varepsilon_s}, \dots, t_s^0 = 2\pi \frac{b_{ss}}{\varepsilon_s},$$

в которой $|f(t_1^0, \dots, t_s^0)| = 1$. Пусть $d > 1$. Тогда $\varepsilon_s > 1$. Так как матрица B унимодулярна, то, по крайней мере, одно из чисел b_{is} ($i = 1, \dots, s$) несоизмеримо с ε_s . Уменьшая числа $t_1^0, \dots, t_s^0$ на кратные 2π так, чтобы $|t_i'| < 2\pi$ ($i = 1, 2, \dots, s$), получаем точку, в которой, согласно сделанному замечанию, модуль характеристической функции обращается в единицу.

С другой стороны, если $d=1$, то соотношения [5] и [6] показывают, что система [2] разрешима только в целых числах. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Из леммы 1 следует, что точками, в которых модуль характеристической функции d -решетчатого распределения обращается в единицу, являются точки с координатами вида

$$t_1 = 2\pi \frac{b_{11}}{\epsilon_1} \sum_1^n a_{1i} e_i + \dots + 2\pi \frac{b_{1s}}{\epsilon_s} \sum_1^n a_{si} e_i,$$

.....

$$t_s = 2\pi \frac{b_{s1}}{\epsilon_1} \sum_1^n a_{1i} e_i + \dots + 2\pi \frac{b_{ss}}{\epsilon_s} \sum_{i=1}^n a_{si} e_i, \quad [8]$$

где $e_1, \dots, e_n$ — произвольные целые. Отсюда непосредственно выводим, что эти точки лежат на решетке масштаба $\frac{2\pi}{d}$. Очевидно, что каковы бы ни были s точек вида [8], определитель

$$|t_{ij}| = \frac{(2\pi)^s k}{d},$$

где k — произвольное целое. В то же время, выбирая в качестве $e_1, \dots, e_n$ решения s систем

$$\begin{aligned} & \text{1) } \sum_{i=1}^n a_{1i} e_i = 1 ; \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i = 0, j \neq 1, \\ & \dots\dots\dots \\ & \text{s) } \sum_{i=1}^n a_{si} e_i = 1 , \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i = 0 ; j \neq s, \end{aligned}$$

что возможно ввиду унимодулярности матрицы A , получим s точек, для которых

$$|t_{ij}| = \frac{2\pi \frac{b_{11}}{\epsilon_1} \dots 2\pi \frac{b_{s1}}{\epsilon_1}}{\dots \dots \dots 2\pi \frac{b_{1s}}{\epsilon_s} \dots 2\pi \frac{b_{ss}}{\epsilon_s}} = \frac{(2\pi)^s}{\epsilon_1 \dots \epsilon_s} |b_{ij}| = \frac{(2\pi)^s}{d} |b_{ij}|$$

[illegible]

С другой стороны, из доказательства необходимости следует, что общий наибольший делитель таких определителей равен d . Действительно, из обратного предположения следует существование совокупности s точек, расположенных на решетке масштаба, меньшего $\frac{2\pi}{d}$, в которых модуль характеристической функции обращается в единицу. Но тогда в силу сделанного при доказательстве леммы 1 замечания внутри каждого симплекса объема $\frac{(2\pi)^s}{s!d}$ с вершинами в точках, расположенных на решетке масштаба $\frac{2\pi}{d}$, найдутся такие точки, что противоречит исходному предположению.

§ 6. МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть дана последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных s -мерных векторов

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_c^{(n)}), \quad [1]$$

компоненты которых принимают только целочисленные значения. Обозначим через $P(x) = P(x_1, \dots, x_s)$ вероятность того, что

$$\xi_k^{(n)} = x_k, \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Очевидно, что компоненты вектора $\zeta_n = \sum_{i=1}^n \xi^{(i)}$ могут принимать также только целочисленные значения. Пусть $P_n(z) = P(z_1, \dots, z_n)$ — вероятность того, что компоненты вектора ζ_n примут значения

$$\zeta_k^{(n)} = z_k \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Обозначим

$$x_i = \frac{z_i - na_i^{(n)}}{B_n},$$

где $A_n = (a_1^{(n)}, \dots, a_s^{(n)})$ — некоторые постоянные векторы, а B_n — положительные постоянные и через $p(x; H; \alpha, \gamma)$ — плотность устойчивого распределения $\Phi(M)$ с характеристической функцией, определяемой формулой 3 §3. Относительно решетчатых распределений имеет место следующее предложение.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы для одинаково распределенных решетчатых взаимно независимых случайных векторов последовательности [1] при некотором подборе постоянных векторов $A_n = (a_1^{(n)}, \dots, a_s^{(n)})$ и положительных постоянных B_n равномерно относительно z_i ($i = 1, 2, \dots, s$; $-\infty < z_i < \infty$) имело место соотношение

$$B_n^s P_n(z) - p(x; H; \alpha, \gamma) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad [2]$$

необходимо и достаточно, чтобы

1. распределение $P(M)$ величин $\xi^{(n)}$ принадлежало области притяжения устойчивого распределения $\Phi(M)$ с плотностью $p(x; H; \alpha, \gamma)$.

2. распределение величин $\xi^{(n)}$ было однорешетчатым.

Второе условие равносильно таким эквивалентным между собою условиям:

(s) Общий наибольший делитель объемов s -мерных симплексов, все $s+1$ вершины которых лежат в целочисленных точках с $P(X) > 0$ равен $\frac{1}{s!}$.

(s') Параллелепипедальная решетка, порожденная всеми векторами, $X = X' - X''$, для которых $P(X') > 0$, $P(X'') > 0$, совпадает с решеткой всех целочисленных точек s -мерного пространства.

Доказательство. Обозначим через

$$f(T) = Me^{i \sum_{v=1}^s t_v \xi_v} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{x_s=-\infty}^{\infty} e^{i(TX)} P(X)$$

характеристическую функцию вектора $\xi^{(n)}$. Тогда характеристическая функция вектора-суммы $\zeta^{(n)}$ будет равна

$$f^n(T) = \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{z_s=-\infty}^{\infty} e^{i(TZ)} P_n(z).$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{i(TZ)}$ и проинтегрируем по $t_1, \dots, t_s$ каждый раз в пределах от $-\pi$ до π . Тогда получим

$$(2\pi)^s P_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f^n(T) e^{-i(TZ)} dt_1 \dots dt_s.$$

В силу того, что

$$z_i = x_i B_n + n a_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

имеем

$$\begin{aligned} (2\pi)^s P_n(B_n X + n A_n) &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i B_n(TX)} e^{-i n(A_n T)} f^n(T) dt_1 \dots dt_s. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\bar{f}(T) = e^{-i(A_n T)} f(T),$$

имеем

$$\begin{aligned} (2\pi)^s P_n(B_n X + n A_n) &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i B_n(TX)} \bar{f}^n(T) dt_1 \dots dt_s. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных, положив, что

$$Y_i = t_i B_n \quad (i = 1, \dots, s).$$

Находим

$$\begin{aligned} (2\pi)^s B_n^s P_n(B_n X + n A_n) &= \\ &= \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} \dots \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-i(XY)} \bar{f}^n\left(\frac{y_1}{B_n}, \dots, \frac{y_s}{B_n}\right) dy_1 \dots dy_s. \end{aligned}$$

Соотношение, где $\varphi(t_1, \dots, t_s)$ — характеристическая функция распределения $\Phi(x_1, \dots, x_s)$,

$$\varphi(T) = \int_{R_s} e^{i(TX)} p(x; H; \alpha, \gamma) dx_1 \dots dx_s,$$

даёт равенство

$$(2\pi)^s p(x; H; \varphi, \gamma) = \int_{R_s} e^{-i(XY)} \varphi(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_n &= (2\pi)^s [B_n^s P_n(z) - p(x; H; \varphi, \gamma)] = \\ &= \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} \dots \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-i(XY)} \bar{f}^n\left(\frac{y}{B_n}\right) dy_1 \dots dy_s - \int_{R_s} e^{i(XY)} \varphi(Y) dy_1 \dots dy_s \end{aligned}$$

Нам необходимо показать, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно в s -мерном интервале $-\infty < z_i < \infty$ ($i = 1, \dots, s$) разность $R_n \rightarrow 0$.

С этой целью представим R_n^* в виде суммы таких четырех интегралов:

$$I_1 = \int_{v < A} e^{-i(XY)} \left[\bar{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) - \varphi(Y) \right] dy_1 \dots dy_s,$$

$$I_2 = \int_{A < v < \varepsilon B_n} e^{-i(XY)} \bar{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) dy_1 \dots dy_s,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon B_n < v < \pi B_n} e^{i(XY)} \bar{f}^n \left(\frac{Y}{B_n} \right) dy_1 \dots dy_s,$$

$$I_4 = \int_{v > A} e^{-i(XY)} \varphi(Y) dy_1 \dots dy_s,$$

где A — некоторое постоянное достаточно большое число, которое мы точнее определим позднее и ε — достаточно малое число, y — модуль вектора $Y = (y_1, \dots, y_s)$.

В силу предположения о принадлежности распределения P к области притяжения распределения Φ и предельной теоремы относительно последовательности характеристических функций равномерно относительно t ($t \leq A$)

$$\bar{f}^n \left(\frac{t_1}{B_n}, \dots, \frac{t_s}{B_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t_1, \dots, t_s)$$

для произвольного постоянного числа A . Отсюда при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно z $I_1 \rightarrow 0$.

Из леммы 1 §3 в силу условия [2] вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое C_0 , что при всех $t < \varepsilon$ в области ($\varepsilon \leq t < 2\pi - \varepsilon$)

$$|f(t_1, \dots, t_s)| \leq e^{-C_0}$$

Отсюда вытекает, что при произвольном $\varepsilon > 0$ $I_3 \rightarrow 0$.

Выбором достаточно большого A можно I_4 сделать как угодно малым.

Далее имеем

$$|I_2| \leq \sum_{m=0}^k \int_{2^m A < t < 2^{m+1} A} \left| \bar{f}_1 \left(\frac{t}{B_n}, \omega_1, \dots, \omega_{s-1} \right) \right|^n \cdot t \cdot dt d\omega_1 \dots d\omega_{s-1},$$

где k определяется неравенствами

$$2^k A < \varepsilon B_n \leq 2^{k+1} A;$$

а $(t; \omega_1, \dots, \omega_{s-1})$ — сферические координаты; $\bar{f}(t_1, \dots, t_s) = \bar{f}_1(t; \omega_1, \dots, \omega_{s-1})$.

Выберем ε таким, чтобы при $|t| \leq \varepsilon$.

$$\frac{R \lg \bar{f}_1(\tau; \omega)}{R \lg f_1(\frac{1}{2}\tau; \omega)} = 2^\alpha + \eta_t$$

и $|\eta_t| < \eta < \frac{2^\alpha - 1}{2}$. Отсюда и из замечания к теореме 3 §4 вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{2^m A < t \leq 2^{m+1} A} \left| \bar{f}_1\left(\frac{t}{B_n}; \omega_1, \dots, \omega_{s-1}\right) \right|^n t dt d\omega_1 \dots d\omega_{s-1} \leq \\ & \leq \int_{A < t \leq 2A} e^{n R \lg \bar{f}_1\left(\frac{t}{B_n}; \omega_1, \dots, \omega_{s-1}\right) (2^\alpha - \eta)} 2^{2s} t dt d\omega_1 \dots d\omega_{s-1}. \end{aligned}$$

Поскольку по предположению P принадлежит области притяжения распределения Φ , в интервале $(A, 2A)$

$$n R \lg \bar{f}_1\left(\frac{t}{B_n}; \varphi\right) = -C_1(\varphi) t^\alpha + o(1).$$

Так как в предположении невырождения распределения Φ , функция $C_1(\varphi)$ не обращается в нуль ни при каком значении своих аргументов, то

$$|I_2| \leq \sum_{s=0}^k \int_A^{2A} e^{-C_1(\varphi_0) t^\alpha (2^\alpha - \eta)^s + o(1)} \cdot t \cdot 2^{2s} dt.$$

Таким образом, выбрав достаточно большое A и n , и достаточно малое ε , можем интеграл I_2 сделать сколь угодно малым.

Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условия 1 очевидна. Легко видеть также, что при нарушении условия 2 асимптотическое представление [2] не только не имеет силы в смысле равномерной сходимости, но и вообще совершенно непригодно для представления вероятностей $P_n(\mathbf{z})$, ибо, очевидно, возможные значения векторной суммы будут иметь систематические пропуски.

ЛИТЕРАТУРА

Гнеденко Б. В.

(1) О сходимости законов распределения сумм независимых слагаемых, ДАН СССР, 18, 1938, 231—234.

(2) К теории областей притяжения устойчивых законов, Уч. зап. Моск. унив. 30, 1939, 61—82.

(3) Предельные законы для сумм независимых случайных величин, Усп. мат. наук, вып. X, 1944, 115—165.

(4) Элементы теории функций распределения случайных векторов, Усп. мат. наук, вып. X, 1944, 230—244.

(5) О локальной предельной теореме теории вероятностей, Усп. мат. наук, т. 3, вып. III, 1948, 187—194.

(6) О локальной предельной теореме для случая бесконечной дисперсии, Труды мат. ин-та АН УССР, т. 12, 1949, 22—30.

(7) О локальной теореме для предельных устойчивых распределений, Укр. мат. журнал, № 4, 1949, 3—15.

(8) Об области притяжения нормального закона, ДАН СССР, т. 71, № 3, 1950, 425—428.

Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н.

(9) Предельные закономерности для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1949.

Деблин В.

(10) Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *Studia Math.*, t. 9, 1940, 71—96.

Крамер Г.

(11) Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.

(12) Основы математической статистики, Гос. Изд-во ин. литературы, 1949.

Леви П.

(13) *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937.

Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С., Рвачева Е. Л.

(14) О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей, ДАН СССР, 60, № 7, 1948; Укр. мат. журнал, № 1, 1949.

Рвачева Е. Л.

(15) Области притягання багатомірних стійких розподілів, ДАН УССР, № 3, 1950.

(16) Багатомірна локальна теорема для граничних стійких розподілів, ДАН УССР, № 3, 1950.

(17) Многомерная локальная теорема для предельных устойчивых распределений, Труды ин-та Математики и механики УзССР, вып. 10, ч. 1.

Хинчин А. Я.

(18) Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938.

Хинчин А. Я. и Леви П.

(19) *Sur les lois stables*, C. R. Ac. Sc., Paris, 202, 1936.

Фельдхейм Э.

(20) *Étude de la stabilité des lois de probabilité*, (Thèse de la Faculté des Sciences de Paris), 1937.

А. С. КОВАНЬКО

О КОМПАКТНОСТИ СИСТЕМ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ Б. М. ЛЕВИТАНА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ

Определение I. $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) называется функцией почти-периодической в смысле Б. Левитана („ N почти-периодическая“)*, если выполняются следующие условия:

- 1) $f(x)$ — всюду непрерывна.
- 2) каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, существует относительно плотное множество таких почти-периодов $\tau = \tau(\varepsilon, N)$,** что

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для } |x| < N.$$

- 3) каковы бы ни были числа ε , ρ и N , числа $-\tau(\varepsilon, N) \pm \tau(\rho N)$ являются также почти-периодами $\tau = \tau(\delta, N)$, где

$$\delta = \varepsilon + \lambda(\rho) \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho) = 0.$$

Определение II. Система „ N почти-периодических“ функций $\{f(x)\}$ называется системой функций „равностепенно N почти-периодических“, если выполняются следующие условия:

Каковы бы ни были числа ε и N :

- 1) существует такое число $M = M(N) > 0$, что для всех функций $f(x)$ системы выполняется неравенство $|f(x)| < M$ при $|x| < N$;
- 2) существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, N)$, что все функции $f(x)$ системы удовлетворяют неравенству $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$, если

$$|h| < \delta \quad \text{и} \quad |x| < N;$$

- 3) существует относительно плотное множество почти-периодов $\tau = \tau(\varepsilon, N)$, общих всем функциям $f(x)$ системы.

Если $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon, N)$ и $\tau_2 = \tau_2(\rho, N)$ два таких общих почти-периода, то $\tau_1 \pm \tau_2$ будет также общим почти-периодом функций, имеющих своими определяющими числами $\varepsilon + \lambda(\rho)$ и N , где $\lim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho) = 0$.

Свойство „ N почти-периодических функций“. Всякая конечная система „ N почти-периодических функций“ удовлетворяет определению II, т. е. ее функции всегда „равностепенно N почти-периодические“.

* Наименование данное Б. Левитаном.

** τ называется (ε, N) почти-периодом.

ТЕОРЕМА АРЦЕЛЯ. Необходимое и достаточное условие компактности системы $\{f(x)\}$ непрерывных функций на данном конечном отрезке в смысле равномерной сходимости состоит в выполнении следующих условий: 1) функции системы ограничены в их совокупности; 2) функции системы равномерно-непрерывны, т. е. к любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать число такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что все функции $\{f(x)\}$ системы удовлетворяют неравенству $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$.

ТЕОРЕМА ХАУСДОРФА. Система функций $\{f(x)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать другую компактную систему функций (в том же смысле) $\{\varphi(x)\}$, что $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всех значений x на данном интервале.

§ 2. КОМПАКТНОСТЬ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В СМЫСЛЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ

ТЕОРЕМА I. Необходимое и достаточное условие компактности системы непрерывных функций $\{f(x)\}$ ($-\infty < x < +\infty$) в смысле равномерной сходимости на произвольном конечном интервале состоит в выполнении следующих условий:

Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и $N > 0$:

1) существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, N) > 0$, при котором для любой функции системы $f(x)$ выполняется неравенство $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, если $|h| < \delta$ и если $|x| < N$;

2) существует такое число $M = M(N) > 0$, что для любой функции системы $f(x)$ выполняется условие $|f(x)| < M$, если $|x| < N$.

Переходим к доказательству теоремы.

Условия необходимы. Пусть система $\{f(x)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале. Следовательно, она компактна на интервале $(-N, +N)$, как бы велико ни было N . Зафиксировав N , мы можем применить на интервале $(-N, +N)$ теорему Арцеля, в силу которой существуют числа $M = M(N) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon, N) > 0$, при которых для всех функций системы выполняются неравенства $|f(x)| < M$ и $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, когда $|h| < \delta$ и когда $|x| < N$.

А это и есть условие настоящей теоремы. Итак, необходимость условий доказана.

Условия достаточны. Зададим бесконечно возрастающую последовательность чисел:

$$N_1 < N_2 < N_3 < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty.$$

Возьмем интервал $(-N_1, +N_1)$. Тогда условия нашей теоремы являются условиями Арцеля для этого интервала. Поэтому на основании теоремы Арцеля мы можем из функций нашей системы (и даже из любой ее бесконечной части) построить последовательность $\{f_n^{(1)}(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), которая сходится равномерно на $(-N_1, +N_1)$.

Пусть $\varphi_1(x)$ — ее предельная функция определенная на этом интервале. Из данной последовательности выделим подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x)\}$, которая сходилась бы равномерно на интервале $(-N_2, +N_2)$ (к некоторой функции $\varphi_2(x)$), что опять возможно в силу той же тео-

ремы Арцеля. Из данной последовательности мы снова выделяли подпоследовательность и так идем далее. После k шагов мы получим подпоследовательность

$$\{f_n^{(k)}(x)\} \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

которая будет равномерно сходиться на $(-N_k, +N_k)$.

Пусть $\varphi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(x)$, $|x| < N_k$; по самому построению видно, что $\varphi_k(x) = \varphi_e(x)$ на интервале $(-N_e, +N_e)$, если $e < k$.

Построим теперь такую функцию $\varphi(x)$, что $\varphi(x) = \varphi_k(x)$, когда $|x| < N_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). $\varphi(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Построим теперь диагональным процессом последовательность $\{f_n^{(n)}(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Легко показать, что эта последовательность сходится равномерно на любом конечном интервале $(-N, +N)$ к функции $\varphi(x)$.

Пусть $N_{k-1} < N \leq N_k$. Исследуем разность $|\varphi(x) - f_n^{(n)}(x)|$ на интервале $(-N_k, +N_k)$. Так как последовательность $\{f_n^{(k)}(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) сходится равномерно в $(-N_k, +N_k)$, то существует такое число $n_k > k$, что $|\varphi(x) - f_n^{(k)}(x)| < \varepsilon$ при $|x| < N_k$ и при $n > n_k > k$ (ибо $\varphi = \varphi_k$). Но поскольку $\{f_m^{(n)}(x)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) есть подпоследовательность последовательности $f_m^{(k)}(x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), можно найти такой индекс $n+p (> n)$, при котором $f_{n+p}^{(k)}(x) = f_n^{(n)}(x)$. Но так как $n+p > n_k$, то подавно $|\varphi(x) - f_n^{(n)}(x)| < \varepsilon$, если $n > n_k$. Но это значит, что последовательность $f_n^{(n)}(x)$ сходится равномерно на интервале $(-N, +N)$.

Итак, достаточность условий доказана.

§ 3. КОМПАКТНОСТЬ СИСТЕМ „ N ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ“

ТЕОРЕМА II. Если система „ N почти-периодических“ функций $\{f(x)\}$ удовлетворяет условиям определения II, т. е. это функции „равностепенно N почти-периодические“, то такая система компактна в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале к функциям также „ N почти-периодическим“.

Доказательство. Из теоремы I мы уже видели, что условия 1) и 2) в определении II достаточны для компактности системы $\{f(x)\}$ в смысле равномерной сходимости на любом интервале $(-N, +N)$. Остается показать, что при наличии условия 3) в определении II предельная функция такой последовательности оказывается также „ N почти-периодической“.

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), составленную из функций системы $\{f(x)\}$, которая сходится равномерно на любом конечном интервале к функции $f(x)$ и которая, следовательно, всюду непрерывна. Пусть $\tau = \tau(\varepsilon, N)$ есть почти-период общий всем функциям последовательности $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Это значит, что $|f_n(x+\tau) - f_n(x)| < \varepsilon \dots (1)$, для любого n и для $|x| < N$. Выберем теперь $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$|f_n(x+\tau) - f(x+\tau)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3)$$

когда $n > n_0$, что всегда возможно в силу равномерной сходимости нашей последовательности на любом конечном интервале.

Из соотношений (1) (2) (3) следует, что

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq |f(x+\tau) - f_n(x+\tau)| + |f_n(x+\tau) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.$$

Значит, каждый (ε, N) почти-период функции $f_n(x)$ является $(2\varepsilon, N)$ почти-периодом для $f(x)$. И, следовательно, множество последних также относительно плотное. Значит, $f(x)$ удовлетворяет условию 2) определения I.

Пусть затем $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon, N)$ и $\tau_2 = \tau_2(\rho, N)$ — два почти-периода всех функций $f_n(x)$. Тогда, согласно условию 3), определения II, $\tau_1 \pm \tau_2$ будет $(\varepsilon + \lambda(\rho), N)$ почти-периодом общим всем функциям последовательности $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а потому в силу выше полученного вывода $\tau_1 \pm \tau_2$ будет $(2\varepsilon + 2\lambda(\rho), N)$ почти-периодом $f(x)$ в то время как τ_1 будет $(2\varepsilon, N)$ почти-периодом, а τ_2 будет $(2\rho, N)$ почти-периодом для $f(x)$, откуда видно, что $f(x)$ удовлетворяет 3) условию определения I. Значит, $f(x)$ подходит под определение I как функция „ N почти-периодическая“.

Итак теорема доказана.

Легко проверить, что условия теоремы являются только достаточными для „ N почти-периодичности“ $f(x)$. В самом деле, рассмотрим последовательность $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Это функции всюду непрерывные и периодические, следовательно, „ N почти-периодические“. На любом конечном интервале $(-N, +N) - \{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x) \equiv 0$, следовательно, к функции „ N почти-периодической“. Тем не менее, функции системы $f_n(x)$ не обладают общим относительно плотным множеством почти-периодов, что вытекает из того факта, что для всякого $0 < \varepsilon < 1$ масштаб относительной плотности почти-периодов функций $f_n(x)$ неограниченно возрастает с возрастанием n .

§ 4. „КВАЗИКОМПАКТНОСТЬ“ СМЕЩЕНИЙ „ N ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ“ ФУНКЦИИ

ЛЕММА. Если $f(x)$ есть „ N почти-периодическая“ функция, то всякая система $\{f(x+k)\}$ ограниченных смещений компактна в смысле равномерной сходимости к „ N почти-периодической“ функции на любом конечном интервале.

Примечание. Смещения ограничены, если существует такое постоянное k_0 , при котором все k удовлетворяют условию $|k| < k_0$.

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из того факта, что система $\{f(x+k)\}$ удовлетворяет всем требованиям определения II (§ 1), а потому в силу теоремы II (§ 3) она компактна.

Определение III. Система смещений $\{f(x+k)\}$ данной функ-

ции $f(x)$ называется относительно плотной, если множество всех чисел k относительно плотное.

Определение IV. Относительно плотная система смещений данной непрерывной функции называется „квазикompактной“, если из любой ее относительно плотной части можно выделить последовательность, которая сходится равномерно на любом конечном интервале.

ТЕОРЕМА III. Относительно плотная система смещений „ N почти-периодической“ функции „квазикompактна“ в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале.

Доказательство. Пусть $L > 0$ есть масштаб относительной плотности чисел k смещений $\{f(x+k)\}$ данной „ N почти-периодической“ функции.

Выберем числа ε и $N > L$. Тогда в любом интервале длины N будет содержаться хотя бы одно число k , взятое из нашей системы смещений.

Пусть τ_i ($i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) — какая-либо относительно плотная система (ε, N) почти-периодов функции $f(x)$. Построим всевозможные интервалы вида: $\left(\tau_i - \frac{N}{2}, \tau_i + \frac{N}{2}\right)$ ($i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) (они могут оказаться пересекающимися). В каждый такой интервал попадает хотя бы одно число k , как это было отмечено выше. Отметим в каждом таком интервале $\left(\tau_i - \frac{N}{2}, \tau_i + \frac{N}{2}\right)$ свое число

$$k_i, \tau_i - \frac{N}{2} < k_i < \tau_i + \frac{N}{2},$$

$$\text{откуда } -\frac{N}{2} < k_i - \tau_i < +\frac{N}{2}.$$

Выберем теперь x внутри интервала $\left(-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right)$, тогда

$$|f(x+k_i) - f(x+k_i-\tau_i)| < \varepsilon,$$

поскольку τ_i почти-период, а

$$|x+k_i-\tau_i| \leq |x| + |k_i-\tau_i| < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N.$$

Положим для краткости $k_i - \tau_i = \alpha_i$. Тогда последнее неравенство можем переписать так:

$$|f(x+k_i) - f(x+\alpha_i)| < \varepsilon \dots (4) \text{ при } |x| < \frac{N}{2},$$

но система смещений $\{f(x+\alpha_i)\}$ ограниченная, ибо $|\alpha_i| < \frac{N}{2}$, а потому в силу леммы настоящего параграфа она компактна в смысле равномерной сходимости к „ N почти-периодической“ функции.

Но тогда в силу теоремы Хаусдорфа и неравенства (4) следует, что последовательность $\{f(x+k_i)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости, при $|x| < \frac{N}{2}$.

Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

1. О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ОДНОГО КЛАССА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Условимся через X, Y обозначать точки $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n -мерного пространства и через $\int_B^{(n)} f(X) dX$ — n -мерный интеграл от функции $f(X)$ по области B этого пространства.

В одной из работ Хопфа [1] приводится следующая лемма.

ЛЕММА I. Пусть в замкнутой области B n -мерного пространства задана функция $\varphi(X)$, удовлетворяющая условию

$$\varphi(X) \in \text{Lip}\alpha, \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1)$$

и функция $H(XY)$, которая при $X \neq Y$ непрерывно дифференцируема по X и Y , причем

$$|H(X, Y)| < \frac{A}{|X - Y|^{n-1}}, \quad |\text{grad } H(X, Y)| < \frac{A}{|X - Y|^n}, \quad (2)$$

где A — абсолютная постоянная и $|Y - X| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$. Тогда для произвольной внутренней точки X_0 области B функция

$$\varphi(X, X_0) = \int_B^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] H(X, Y) dY, \quad (3)$$

дифференцируема в точке X_0 и

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_{X=X_0} = \int_B^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{X=X_0} dY. \quad (4)$$

Целью настоящего пункта является доказательство следующего усиления этой леммы:

Если функция $\rho(X)$, определенная всюду в области B , удовлетворяет соотношениям

$$|\rho(X)| < M, \quad \int_B^{(n)} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} dY < \infty, \quad (5)$$

где $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ — фиксированная внутренняя точка области B , и функция $H(X, Y)$ всюду в B удовлетворяет прежним условиям, то функция (3) тотально дифференцируема в точке X_0 , т. е. обладает там полным дифференциалом в смысле Штольца, причем справедливо соотношение (4).

Доказательство. Так как

$$\varphi(X, X_0) - \varphi(X_0, X_0) = \int_B^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] [H(X, Y) - H(X_0, Y)] dY$$

и интегралы

$$\int_B^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{X=X_0} dY \quad (6)$$

в силу (2) и (5) существуют, то достаточно показать, что разностное отношение

$$I(X, X_0) = \frac{\int_B^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \left[H(X, Y) - H(X_0, Y) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{X=X_0} (x_i - x_{i0}) \right] dY}{|X - X_0|} \quad (7)$$

стремится к нулю при $X \rightarrow X_0$. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для $|X - X_0| < \delta$ часть $I_{U_\delta(X_0)}$ выражения (6), связанная с интегрированием по δ -окрестности $U_\delta(X_0)$ точки X_0 , удовлетворяет неравенству

$$|I_{U_\delta(X_0)} X, X_0| < \varepsilon.$$

В самом деле, если такое $\delta(\varepsilon)$ найдено, то в силу непрерывной дифференцируемости $H(X, Y)$ при $X \neq Y$ найдется для любого N такое $\delta' = \delta'(\frac{\varepsilon}{N}) < \delta$, что для $|X - X_0| < \delta'$ и $|Y - X_0| > \delta$

$$\frac{|H(X, Y) - H(X_0, Y) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{X=X_0} (x_i - x_{i0})|}{|X - X_0|} < \frac{\varepsilon}{N},$$

следовательно,

$$|I_{B-U_\delta(X_0)}(X, X_0)| < \frac{\varepsilon}{N} \int_B^{(n)} |\rho(Y) - \rho(X_0)| dY < \varepsilon$$

если N взято достаточно большим. Так как интегралы (6) существуют и от X_0 не зависят, то все сводится к доказательству существования такой окрестности $U_\delta(X_0)$, что для всех $|X - X_0| < \delta$

$$\left| \int_{U_\delta(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y) - H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < \varepsilon \quad (8)$$

Подберем такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы

$$\int_{U_{2\delta}(X_0)}^{(n)} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} \delta Y < \varepsilon^n \quad (9)$$

и, фиксируя точку X , $|X - X_0| = h < \delta$, оценим сперва часть интеграла (8), взятого по окрестности $U_{2h}(X_0)$. Для $Y \in U_{2h}(X_0)$ имеем $\frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} < 2$, следовательно,

$$\frac{|H(X_0, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} \cdot \frac{|Y - X_0|^{n-1} |H(X_0, Y)|}{|Y - X_0|^n} < \frac{2A}{|Y - X_0|^n},$$

откуда

$$\left| \int_{U_{2h}(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < 2A\varepsilon^n. \quad (10)$$

Для оценки

$$\int_{U_{2h}(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY$$

заметим, что для $Y \in U_{\varepsilon h}(X)$ имеем

$$\frac{|H(X, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X|^{n-1} |H(X, Y)|}{|X - X_0| |Y - X|^{n-1}} < \frac{A}{h \cdot |Y - X|^{n-1}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \int_{U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY \right| &< \frac{2MA}{h} \int_{U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} \frac{dY}{|Y - X|^{n-1}} = \\ &= \frac{2MA}{h} n e_n \int_0^{\varepsilon h} dr = 2MA n e_n \varepsilon, \end{aligned} \quad (11)$$

где e_n — объем n -мерного шара. Если же $Y \in U_{2h}(X_0) - U_{\varepsilon h}(X)$, то

$$\frac{|Y - X_0|}{|Y - X|} < \frac{h + \varepsilon h}{\varepsilon h} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\frac{|H(X, Y)|}{|X - X_0|} = \frac{|Y - X_0|}{|X - X_0|} \frac{|Y - X_0|^{n-1}}{|Y - X|^{n-1}} \frac{|Y - X|^{n-1} |H(X, Y)|}{|Y - X_0|^n} < \frac{2^n A}{\varepsilon^{n-1} |Y - X_0|^n},$$

следовательно,

$$\left| \int_{U_{2h}(X_0) - U_{\varepsilon h}(X)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < \frac{2^n A}{\varepsilon^{n-1}} \int_{U_{\delta}(X_0)}^{(n)} \frac{|\rho(Y) - \rho(X_0)|}{|Y - X_0|^n} dY < 2^n A \varepsilon. \quad (12)$$

Пусть теперь $Y \in U_\delta(X_0) - U_{2h}(X_0)$.

Тогда

$$\frac{H(X, Y) - H(X_0, Y)}{|X - X_0|} < \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)_{X=X^*},$$

где производная справа берется в направлении $\vec{X_0 X}$ в некоторой промежуточной точке X^* , зависящей вообще от Y .

Так как

$$\left| \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)_{X=X^*} \right| \leq \left| \text{grad } H(X^*, Y) \right| < \frac{A}{|Y - X^*|^n}$$

и

$$|Y - X_0| < |Y - X^*| + |X^* - X_0| < 2|Y - X^*|,$$

то

$$\frac{|H(X, Y) - H(X_0, Y)|}{|X - X_0|} < \frac{|Y - X_0|^n}{|Y - X^*|^n} \frac{A}{|Y - X_0|^n} < \frac{2^n A}{|Y - X_0|^n},$$

следовательно,

$$\left| \int_{U_\delta(X) - U_{2h}(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y) - H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < 2^n A \varepsilon^n \quad (13)$$

Из оценок (10)–(13) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{U_\delta(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y) - H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| &< \varepsilon (2A\varepsilon^{n-1} + \\ &+ 2MAne_n + 2^n A + 2^n A\varepsilon^{n-1}), \end{aligned}$$

откуда для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и достаточно большого N при $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{N}$ имеем

$$\left| \int_{U_\delta(X_0)}^{(n)} [\rho(Y) - \rho(X_0)] \frac{H(X, Y) - H(X_0, Y)}{|X - X_0|} dY \right| < \varepsilon_0, \quad (14)$$

что завершает доказательство.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К КВАЗИКОНФОРМНЫМ ОТОБРАЖЕНИЯМ С ДВУМЯ ПАРАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

В работе Б. В. Шабата [2] доказывается следующая теорема:

Произвольное квазиконформное отображение $w = f(z) = u + iv$ области D с характеристиками $(p\Theta; p_1\Theta_1)_z \in \text{Lip } \delta (0 < \delta \leq 1)$ обладает внутри D частными производными u_x, u_y, v_x, v_y , удовлетворяющими условию $\text{Lip } \delta$, если $\delta < 1$, и условию $\text{Lip } \delta'$, где δ' сколь угодно близко к 1, если $\delta = 1$.

Нашей целью является доказательство дифференцируемости u, v при условии, что характеристики $(\alpha \beta \gamma; \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)_z$,

$$\alpha = p \cos^2 \Theta + \frac{1}{p} \sin^2 \Theta, \beta = \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos \Theta \sin^2 \Theta, \gamma = p \sin^2 \Theta + \frac{1}{p} \cos^2 \Theta \quad (1)$$

(соответственно определяются $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) непрерывны в D и удовлетворяют интегральному условию Липшица, т. е. имеют ограниченные внутри интегралы

$$I^\alpha(z_0) = \iint_D \frac{|\alpha(z) - \alpha(z_0)|}{|z - z_0|^2} d\sigma_z, \dots, I^{\gamma_1}(z_0) = \iint_D \frac{|\gamma_1(z) - \gamma_1(z_0)|}{|z - z_0|^2} d\sigma_z. \quad (2)$$

Для этого заметим, что доказательство теоремы Шабата опирается у него на одну лемму о растяжении, утверждающую в условиях его теоремы равномерную ограниченность внутри D частных производных u_x, u_y, v_x, v_y , которые заведомо существуют почти всюду в D , и на приведенную выше лемму Хопфа, позволяющую тогда из интегрального представления квазиконформного отображения сделать заключение о его непрерывной дифференцируемости. Но доказательство леммы о растяжении полностью приходит при условии ограниченности интегралов (2), равно как и лемма Хопфа, в которой нужно положить $n=2$ и вместо $\rho(X)$ брать соответственно $\alpha(z), \beta(z), \dots$ и т. д., откуда следует дифференцируемость u, v при указанных более общих условиях.

Изменяя доказательство леммы Шабата о растяжении, можно ее еще несколько усилить и соответственно получить более сильное утверждение о дифференцируемости u, v . Сейчас мы это рассмотрим. Начнем с двух лемм.

ЛЕММА 1. Пусть в области D задано непрерывное распределение характеристик $\alpha \beta \gamma$, для которых интегралы (2) ограничены внутри D . Пусть $t = l(z, z_0)$ — аффинное преобразование с характеристиками $\alpha_0 = \alpha(z_0), \beta_0 = \beta(z_0)$ и $\gamma_0 = \gamma(z_0)$, где $z_0 \in D$ и $\zeta = \varphi(t)$ функция, конформно отображающая область $D_t = l(D)$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\varphi(t_0) = 0$, где $t_0 = l(z_0, z_0)$. Тогда, если $p(\zeta, z_0), \Theta(\zeta, z_0)$ — соответствующие преобразованные характеристики, то интеграл

$$I(z_0) = \iint_{|\zeta| < 1} \frac{p(\zeta, z_0) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta \quad (3)$$

ограничен внутри D .

Доказательство. При аффинном преобразовании $t = l(z, z_0)$ характеристики $\alpha \beta \gamma$ преобразуются аффинно с равномерно ограниченными для $z_0 \in D_1, \overline{D_1} \subset D$, коэффициентами. Легко доказать, что

$$|p(z) - p(z_0)| < |\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)|,$$

откуда заключаем, что

$$p(\zeta, z_0) - 1 < \text{const} \{ |\alpha(z) - \alpha(z_0)| + |\beta(z) - \beta(z_0)| + |\gamma(z) - \gamma(z_0)| \}, \quad (4)$$

где постоянная зависит вообще от выбора D_1 . Точно так же для $z_0 \in D_1$ найдем, что

$$\frac{d\sigma_z}{|z|^2} < \text{const} \frac{d\sigma_z}{|z - z_0|^2}, \quad (5)$$

а из (4) и (5) следует равномерная ограниченность интеграла (3) в D_1 вместе с интегралами (2).

ЛЕММА 2*. Пусть функция $w = f(z)$ отображает кольцо $r < |z| < 1$ на кольцо $\rho < |w| < 1$ квазиконформно с характеристиками $(p, \theta, p_1, \theta_1)_z$. Тогда

$$\left| \ln \frac{\rho}{r} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{r < |z| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|z|^2} d\sigma_z. \quad (6)$$

Доказательство. Перейдем к плоскостям $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{z}$ и $\omega = \tau + ih = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{w}$. Тогда будем иметь дело с квазиконформным отображением $\omega = \varphi(\zeta)$ прямоугольника $R_\zeta: 0 < \xi < M = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, $0 < \eta < 1$ на прямоугольник $R_\omega: 0 < \tau < M^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$, $0 < h < 1$ и (6) примет вид

$$|M^* - M| \leq \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1) d\sigma_\zeta. \quad (7)$$

Площадь R_ω равна M^* , поэтому, если $J(\zeta)$ — якобиан отображения $\omega = \varphi(\zeta)$ и

$$\Lambda(\zeta) = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(\zeta + \Delta\zeta) - \varphi(\zeta)}{\Delta\zeta} \right|,$$

то $J \geq \frac{\Lambda^2}{pp_1}$ и

$$M^* = \iint_{R_\zeta} J d\xi d\eta \geq \int_0^M d\xi \int_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta = \int_0^1 d\eta \int_0^M \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\xi.$$

Так как $\int_0^1 \Lambda d\eta \geq 1$, то по неравенству Буняковского

$$\int_0^1 \frac{\Lambda^2}{pp_1} d\eta \cdot \int_0^1 pp_1 d\eta \geq \left(\int_0^1 \Lambda d\eta \right)^2 \geq 1,$$

поэтому

$$M^* \geq \int_0^1 \frac{d\eta}{\int_0^M pp_1 d\xi},$$

* Приводим ее в формулировке П. П. Белинского (см. его статью в этом же сборнике) с некоторым отличием в доказательстве.

следовательно,

$$M - M^* \leq \int_0^M \frac{\int_0^1 pp_1 d\eta - 1}{\int_0^1 pp_1 d\eta} d\xi < \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1) d\sigma_\zeta.$$

Аналогично, используя неравенство $\int_0^M \Lambda d\xi \geq M^*$, найдем, что

$$M^* \leq \iint_{R_\zeta} pp_1 d\sigma_\zeta,$$

откуда

$$M^* - M \leq \iint_{R_\zeta} (pp_1 - 1) d\sigma_\zeta$$

и (7) доказано.

ЛЕММА О РАСТЯЖЕНИИ. Пусть функция $w = f(z) = u + iv$ производит квазиконформное отображение области D с непрерывными характеристиками $(\alpha \beta \gamma; \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)_z$ на область Δ и интегралы (2) ограничены внутри D . Тогда в точках дифференцируемости u, v максимальное растяжение

$$\Lambda_{w/z}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \quad (8)$$

и минимальное растяжение

$$\lambda_{w/z}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \quad (9)$$

в каждой области $D_1, \overline{D_1} \subset D$ ограничены сверху и снизу положительными постоянными.

Доказательство. Рассмотрим в области $D_1, \overline{D_1} \subset D$ произвольную точку z_0 дифференцируемости u, v и отображим D и Δ сперва аффинно, с характеристиками $\alpha(z_0), \beta(z_0), \gamma(z_0)$ соответственно $\alpha_1(z_0), \beta_1(z_0), \gamma_1(z_0)$, а затем конформно соответственно на круги $|\zeta| < 1$ и $|\omega| < 1$ так, что $\zeta(z_0) = 0$ и $\omega(w_0) = 0$, где $w_0 = f(z_0)$. Тогда мы получим квазиконформное отображение $\omega(\zeta) = \chi(\zeta, z_0)$, $\omega(0) = 0$ с равномерно ограниченными в D_1 интегралами

$$I(z_0) = \iint_{|\zeta| < 1} \frac{p(\zeta, z_0) - 1}{(\zeta)^2} d\sigma_\zeta, \quad I_1(z_0) = \iint_{|\zeta| < 1} \frac{p_1(\zeta, z_0) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta \quad (10)$$

(ограниченность первого интеграла (10) следует из леммы 1, второго — доказывается аналогично). Кроме того, существует производная $\omega'(0)$.

Рассматривая все указанные отображения, нетрудно получить соотношения

$$\Lambda_{w/z}(z_0) < \text{const} |\omega'(0)|, \quad \lambda_{w/z}(z_0) > \text{const} |\omega'(0)|, \quad (11)$$

где постоянные зависят вообще от D_1 . Таким образом, все сводится к оценке $|\omega'(0)|$.

Так как при отображении $\omega(\zeta)$ бесконечно малый круг $|\zeta| < r$ переходит в бесконечно-малый круг с центром в $\omega=0$, то образ γ_r окружности $|\zeta|=r$ можно заключить в кольцо $\rho' \leq |\omega| \leq \rho''$ так, что $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho''}{\rho'} = 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho'}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho''}{r} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right| = |\omega'(0)|.$$

Заметив это, отобразим конформно двусвязную область, заключенную между $|\omega|=1$ и γ_r на кольцо $\rho \leq |z| \leq 1$ в плоскости z . Тогда $\rho' \leq \rho \leq \rho''$, следовательно, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{r} = |\omega'(0)|$ и, кроме того, для отображения $z = z(\zeta, z_0)$ удовлетворяются условия леммы 2. В самом деле, конформное отображение $z(\omega)$ не изменяет характеристик $p(\zeta, z_0)$ и $p_1(\zeta, z_0)$ в кольце $r < |\zeta| < 1$, затем

$$pp_1 - 1 < p_1(p - 1) + p(p_1 - 1) < \text{const}[(p - 1) + (p_1 - 1)],$$

следовательно,

$$\iint_{r < |\zeta| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta < \text{const}[I(z_0) + I_1(z_0)] < K, \quad (12)$$

где K зависит от D_1 . На основании леммы 2 имеем

$$\left| \ln \frac{\rho}{r} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{r < |\zeta| < 1} \frac{pp_1 - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta,$$

откуда, совершая предельный переход и учитывая (12), получаем

$$|\ln |\omega'(0)|| < K_1,$$

следовательно,

$$e^{-K_1} < |\omega'(0)| < e^{K_1} \quad (13)$$

и из (11) следует лемма о растяжении.

На основании всего изложенного, приходим к следующей теореме.

Пусть функция $f(z) = u + iv$ производит квазиконформное отображение области D с непрерывными характеристиками $(\alpha \beta \gamma; \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)_z$ на область Δ . Тогда, если интегралы (2) ограничены внутри D , то функции u, v дифференцируемы в D и якобиан J внутри D ограничен сверху и снизу положительными постоянными.

Примечание. Заметим, что в точках $z_0 \in D$ равномерной сходимости интегралов (2) можно утверждать непрерывность частных производных u_x, u_y, v_x, v_y .

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopf E. Über den funktionalen, insbesondere den analitischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr., 34, 1931, 194—232.

1. Шабат Б. В. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных. Матем. сб. 17(59), № 2, 1945, 193—210.

П. П. БЕЛИНСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ

ЛЕММА 1. Пусть кольцо $r \leq |z| \leq 1$ отображается квазиконформно на кольцо $\rho \leq |\omega| \leq 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \ln \frac{r}{\rho} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int \int_{r \leq |z| \leq 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z, \quad (1)$$

где $d\sigma_z$ — элемент площади плоскости z .

Доказательство: Проведем в кольце $\rho \leq |\omega| \leq 1$ разрез по радиусу от точки $\omega = \rho$ до точки $\omega = 1$. Ему в кольце $r \leq |z| \leq 1$ будет соответствовать некоторый разрез, соединяющий граничные окружности кольца. Переходя к плоскостям логарифмов $\zeta = \ln z$ и $\omega = \ln \omega$, $\zeta = x + iy$, $\omega = u + iv$, мы получим квазиконформное отображение криволинейного четырехугольника плоскости ζ на прямоугольник плоскости ω (рис. 1). Проведем в прямоугольнике

ω вертикальную прямую с абсциссой u . Ей в плоскости ζ соответствует некоторая кривая Γ_u , концы которой сдвинуты друг относительно друга на $2\pi i$. Следовательно, обозначая через $L(u)$, длину Γ_u , будем иметь

$$2\pi \leq L(u) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right| dv.$$

Возводя в квадрат, применяя неравенство Буняковского и заме-

чая, что $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right|^2 \leq$

$\leq \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega)$, получим

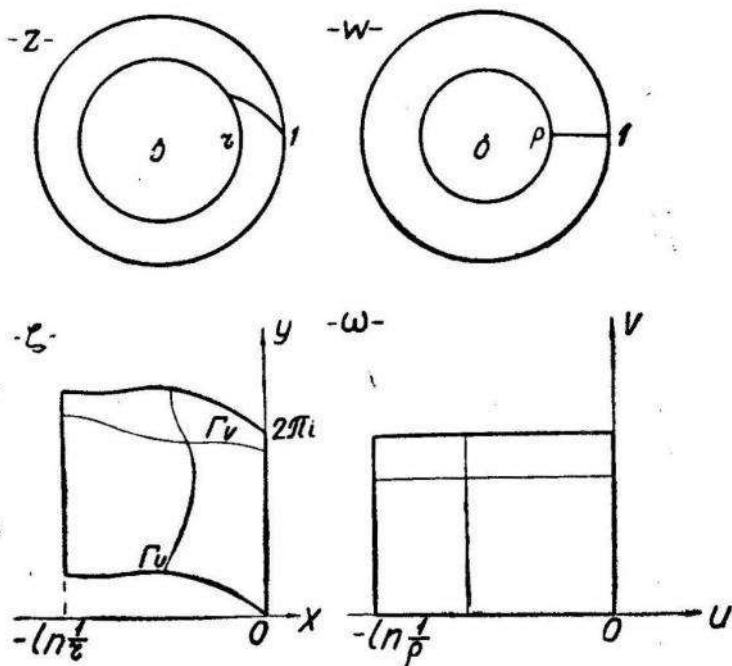


Рис. 1.

$$4\pi^2 \leq \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right| dv \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right|^2 dv \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) dv$$

или

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) dv.$$

Интегрируя полученное неравенство по u в пределах от $-\ln \frac{1}{\rho}$ до 0, получим

$$\begin{aligned} 2\pi \ln \frac{1}{\rho} &\leq \int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \int_0^{2\pi} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) dudv = \iint_{\zeta} p(\zeta) dxdy = \\ &= \iint_{r < |z| < 1} \frac{p(z)}{|z|^2} d\sigma_z. \end{aligned}$$

Вычитая из обеих сторон последнего неравенства равенство

$$2\pi \ln \frac{1}{r} = \iint_{r < |z| < 1} \frac{d\sigma_z}{|z|^2} \text{ и деля на } 2\pi, \text{ получаем}$$

$$\ln \frac{r}{\rho} \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{r < |z| < 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2} d\sigma_z. \quad (2)$$

Аналогично, проводя в плоскости ω горизонтальные сечения прямоугольника с ординатой v , мы получим в плоскости ζ прообраз этого сечения — кривую Γ_v с длиной $L(v)$. Имеем

$$\ln \frac{1}{r} \leq L(v) = \int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right| du,$$

откуда

$$\left(\ln \frac{1}{r} \right)^2 \leq \left(\int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right| du \right)^2 \leq \ln \frac{1}{\rho} \int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right|^2 du \leq \ln \frac{1}{\rho} \int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) du.$$

Интегрируя полученное неравенство по v в пределах прямоугольника, получим

$$2\pi \left(\ln \frac{1}{r} \right)^2 \leq \ln \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \int_{-\ln \frac{1}{\rho}}^0 \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) dudv = \ln \frac{1}{\rho} \iint_{r < |z| < 1} \frac{p(z)}{|z|^2} d\sigma_z.$$

Вычитая из обеих частей $2\pi \ln \frac{1}{r} \ln \frac{1}{\rho} = \ln \frac{1}{\rho} \iint_{r < |z| < 1} \frac{d\sigma_z}{|z|^2}$,

получим

$$2\pi \ln \frac{1}{r} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho} \right) \leq \ln \frac{1}{\rho} \iint_{r < |z| < 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z$$

или

$$\ln \frac{\rho}{r} \leq \frac{\ln \frac{1}{\rho}}{\ln \frac{1}{r}} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint_{r < |z| < 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z. \quad (3)$$

При $r > \rho$ доказательство леммы следует из (2), а при $r < \rho$ — из (3),

так как в этом случае $\frac{\ln \frac{1}{\rho}}{\ln \frac{1}{r}} < 1$.

Введем теперь следующие обозначения.

Пусть двусвязная область D плоскости z , ограниченная континуумом, содержащим точку $z = 0$, и окружностью $|z| = 1$, отображается гомеоморфно на кольцо $\rho \leq |w| \leq 1$, причем $w(1) = 1$.

Назовем угловым смещением точки величину $\delta(w) = \delta(z) = \arg w - \arg z$, причем берется та ветвь аргумента, которая получается при непрерывном переходе от точки $z = 1$ и соответственно ее образ в плоскости w , ($\arg 1 = 0$). Таким образом, определенное угловое смещение очевидно представляет однозначную функцию. Обозначим через $\delta_i, \bar{\delta}_i = \min (\max) |\delta(z)|$, когда точка пробегает внутреннюю границу. Соответственно δ_e и $\bar{\delta}_e$ — для внешней границы.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть двусвязная область D , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 , лежащими соответственно в кольцах $\frac{r^*}{1+\varepsilon} \leq |z| \leq \leq r^*(1+\varepsilon)$, $\frac{1}{1+\varepsilon} \leq |z| \leq 1+\varepsilon$, отображается квазиконформно на кольцо $\rho^* \leq |w| \leq 1$ и $w(1) = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\delta = \delta_i - \bar{\delta}_e \leq \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z + \left(1 + \frac{\ln \frac{1}{r^*}}{\ln \frac{1}{\rho^*}} \right) 2\varepsilon. \quad (4)$$

Доказательство. Если $\delta_i \neq 0$, то, очевидно, $\delta(z)$ сохраняет знак на внутренней границе. Пусть для определенности $\delta(z) > 0$. Проведем в кольце $\rho^* \leq |w| \leq 1$ разрез по спирали $\rho = e^{-\varphi}$. Ему в области D соответствует некоторый разрез, соединяющий границы области. Переходя к плоскостям логарифмов $\zeta = \ln z$ и $\omega = \ln w$, получим квазиконформное отображение криволинейного четырехугольника плоско-

сти ζ на параллелограмм плоскости ω с острым углом, равным $\frac{\pi}{4}$ (рис. 2).

Проведем в параллелограмме сечение по отрезку прямой $v = v_0 - u$. Концы его имеют координаты $(0, v_0)$ и $(-\ln \frac{1}{\rho^*}, v_0 - \ln \frac{1}{\rho^*})$. Этому сечению в плоскости ζ соответствует кривая Γ_{v_0} . Разность между абсциссами концов Γ_{v_0} не меньше $\ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon$, а разность между ординатами не менее, чем на δ больше разности ординат отрезка $v = v_0 - u$ (γ_{v_0}), т. е. больше $\ln \frac{1}{\rho^*} + \delta$.

Поэтому, обозначая через $L(v_0)$ длину Γ_{v_0} , будем иметь

$$L(v_0) \geq \sqrt{\left(\ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln \frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2}.$$

Перейдя в плоскости ω к новой системе координат u' и v' , получаемой из старой поворотом осей $-\frac{\pi}{4}$, будем иметь из предыдущего

$$\left(\ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 +$$

$$\begin{aligned} & + \left(\ln \frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2 \leq [L(v_0)]^2 = \left(\int_{\gamma_{v_0}} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial u'}\right| du'\right)^2 \leq \\ & \leq V^2 \ln \frac{1}{\rho^*} \int_{\gamma_{v_0}} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) du'. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство по v' в пределах параллелограмма, получим

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{V^2} \left\{ \left(\ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln \frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2 \right\} & \leq V^2 \ln \frac{1}{\rho^*} \int \int \frac{D(x, y)}{D(u, v)} p(\omega) du' dv' = \\ & = V^2 \ln \frac{1}{\rho^*} \int \int_D \frac{p(z)}{|z|^2} d\zeta_z. \end{aligned}$$

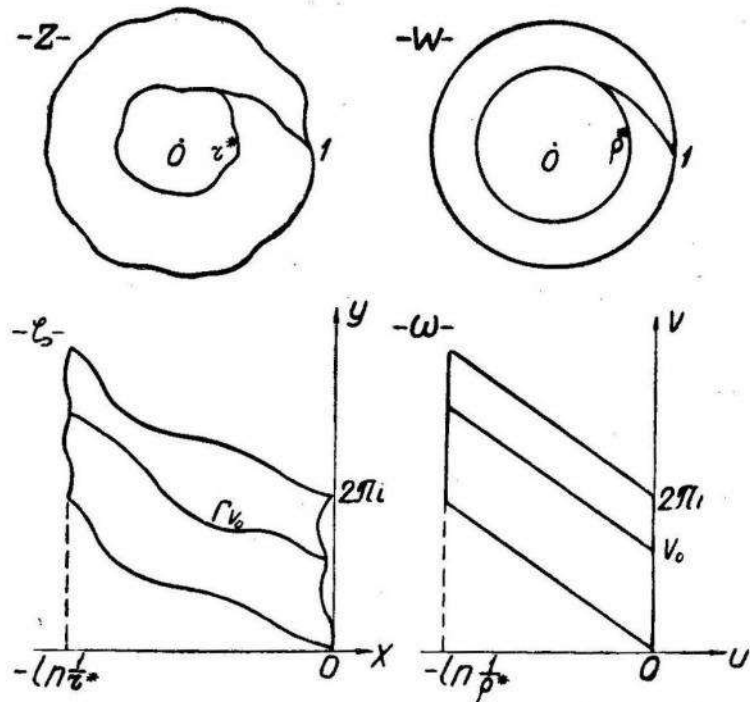


Рис. 2.

Или, деля на $2\pi \sqrt{2 \ln \frac{1}{\rho^*}}$ и вычитая неравенство

$$\ln \frac{1}{r^*} + 2\varepsilon > \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{d\sigma_z}{|z|^2},$$

будем иметь

$$\frac{\left(\ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon\right)^2 + \left(\ln \frac{1}{\rho^*} + \delta\right)^2}{2 \ln \frac{1}{\rho^*}} - \ln \frac{1}{r^*} - 2\varepsilon \leq \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z.$$

Отсюда, раскрывая скобки и отбрасывая неотрицательный член

$$\frac{\left(\ln \frac{1}{r^*} - \ln \frac{1}{\rho^*}\right)^2 + 4\varepsilon^2 + \delta^2}{2 \ln \frac{1}{\rho^*}}, \text{ получаем}$$

$$\delta - \frac{\ln \frac{1}{r^*}}{\ln \frac{1}{\rho^*}} \cdot 2\varepsilon - 2\varepsilon < \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z,$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 3. Пусть функция $w = f(z)$ отображает квазиконформно круг $|z| \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$, причем $w(0) = 0$ и $\iint (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \varepsilon$. Тогда

$$|z| - \lambda'(\varepsilon) \leq |w(z)| \leq |z| + \lambda'(\varepsilon), \quad (5)$$

где $\lambda'(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda'(\varepsilon) = 0$.

Доказательство. Мы будем опираться на одну теорему Грётша [3], которую мы здесь только сформулируем: при конформном отображении кольца $r^* \leq |\zeta| \leq 1$ на двусвязную область, ограниченную окружностью $|z| = 1$ и континуумом, содержащим точку $z = 0$, ближайшее расстояние между границами области достигается тогда и только тогда, когда внутренняя граница области есть отрезок радиуса.

Пусть $r = \varphi(r^*)$ длина радиального разреза экстремальной области теоремы Грётша. Геометрически ясно, что $\varphi(r^*)$ монотонна и непрерывна. Обозначим $\zeta = F(z, r)$ функцию, отображающую круг $|z| \leq 1$ с разрезом от 0 до $re^{i\psi}$ на кольцо $r^* \leq |\zeta| \leq 1$. При каждом r , $\frac{dF}{dz}$ не ограничена в круге с разрезом, ибо на концах разреза $F(z, r)$ ведет себя как $\sqrt{z}$. Но если мы ограничимся теми z , для которых $|\zeta| \geq r^* + \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ величина бесконечно малая вместе с ε , которую мы выберем позже, то будем иметь $\max_z \left| \frac{dF}{dz} \right| = M(r, \delta)$. Так как при $r \rightarrow 0$ $M(r, \delta) \rightarrow 1$ и при $r \rightarrow \varphi(1 - \delta)^*$

* $\varphi(1 - \delta)$ — максимальное значение r , при котором множество точек z , по которым мы берем $\max$ не пусто.

$$M(r, \delta) \rightarrow \max_{|z|=1} \left| \frac{dF(z, \varphi(1-\delta))}{d\sigma} \right|,$$

то для указанных точек z имеем

$$\left| \frac{dF}{dz} \right| \leq \max_{0 < r < \varphi(1-\delta)} M(r, \delta) = M(\delta).$$

Прообраз круга $|\zeta| = r^* + \delta$ в отображении $z = F(z, r)$, $r = \varphi(r^*)$ обозначим $\Gamma_{\delta, r}$, а точку пересечения $\Gamma_{\delta, r}$ с продолжением разреза $(0, re^{i\psi})$ назовем вершиной $\Gamma_{\delta, r}$. Вершина $\Gamma_{\delta, r}$ наиболее удаленная от нуля точка $\Gamma_{\delta, r}$ и при $0 \leq r \leq \varphi(1-\delta)$ ее расстояние до нуля пробегает все значения от δ до 1.

Приступим теперь к доказательству правой части неравенства (5). Пусть сначала $|z| \geq \delta$. Проведем через точку z кривую $\Gamma_{\delta, r}$ так, чтобы ее вершина совпадала бы с z (см. рис. 3), и отображим круг $|z| \leq 1$ с разрезом от 0 до $e^{i\varphi} \cdot r$ функцией $F(z, r)$ на кольцо $r^* \leq |\zeta| \leq 1$. Здесь $\varphi = \arg z$, а r определяется тем условием, что вершина $\Gamma_{\delta, r}$ проходит через z . Отображая еще двусвязную область D плоскости w , соответствующую кругу $|z| \leq 1$ с вырезом по $\Gamma_{\delta, r}$, в отображении $w = f(z)$ конформно на кольцо $\rho^* \leq |\omega| \leq 1$ будем иметь в силу (1)

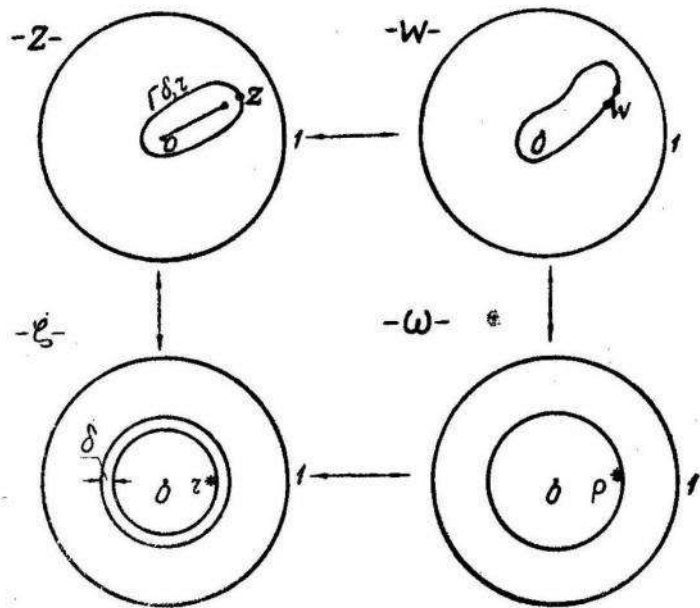


Рис. 3

$$\begin{aligned} \ln \frac{\rho^*}{r^* + \delta} &\leq \frac{1}{2\pi} \iint_{r^* + \delta \leq |\zeta| < 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta \leq \frac{1}{2\pi \delta^2} \iint_{r^* + \delta \leq |\zeta| < 1} (p(\zeta) - 1) d\sigma_\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi \delta^2} \iint_{\substack{|z| < 1 \\ z \text{ вне } \Gamma_{\delta, r}}} (p(z) - 1) \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| d\sigma_z \leq \frac{M^2(\delta)}{2\pi \delta^2} \cdot \varepsilon = \mu(\delta) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Выберем теперь закон убывания $\delta = \delta(\varepsilon)$ таким, чтобы $\mu(\delta) \cdot \varepsilon \rightarrow 0$, что, очевидно, возможно при любой функции $\mu(\delta)$. Тогда, в силу выбора r , $|z| > r = \varphi(r^*)$. С другой стороны, в силу теоремы Грётша

$$|w| = |f(z)| \leq \varphi(r^*) \leq \varphi((r^* + \delta) e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon}).$$

Отсюда

$$|w(z)| - |z| \leq \varphi((r^* + \delta) e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon}) - \varphi(r^*). \quad (6)$$

Считая $\mu(\delta) \cdot \varepsilon$ настолько малым, что $e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon} < 1 + 2\mu(\delta) \cdot \varepsilon$, оценим разность аргументов функции φ в правой части неравенства (6)

$$(r^* + \delta) e^{\mu(\delta) \cdot \varepsilon} - r^* \leq (r^* + \delta) (1 + 2\mu(\delta) \cdot \varepsilon) - r^* = \delta + 2\mu(\delta) \cdot \varepsilon + r^* 2\mu(\delta) \cdot \varepsilon \leq \delta + 4\mu(\delta) \cdot \varepsilon.$$

В силу непрерывности функции φ на замкнутом отрезке $[0, 1]$ правая часть (6) является бесконечно малой вместе с $\delta + 4\mu(\delta) \cdot \varepsilon$ независимо от r^* и, стало быть, от z (для $|z| \geq \delta$). Таким образом, правая часть (5) доказана для $|z| \geq \delta$. Для $|z| \leq \delta$ имеем в силу гомеоморфности и условия $w(0) = 0$

$$|w(z)| \leq \max_{|z| \leq \delta} |w(z)| \leq \delta(\varepsilon) + \lambda_1(\varepsilon) = \lambda_2(\varepsilon),$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1(\varepsilon)$, что полностью доказывает правую часть неравенства (5).

При дальнейшем доказательстве мы для простоты выражений будем считать ε бесконечно малым.

Докажем сначала, что для любого r , $0 < r < 1$ найдется такая точка z , $|z| = r$, что

$$|w(z)| \geq |z| - \sqrt[4]{\varepsilon} = |z| - o(1). \quad (7)$$

Доказывать, очевидно, нужно только для $|z| \geq \sqrt[4]{\varepsilon}$. Для этого отображим образ кольца $r \leq |z| \leq 1$ в плоскости w (область D) на кольцо $\rho \leq |w| \leq 1$. В силу (1) и условия $|z| \geq \sqrt[4]{\varepsilon}$ имеем

$$\ln \frac{r}{\rho} \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leq |z| \leq 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z \leq \frac{1}{2\pi \sqrt[4]{\varepsilon}} \iint_{|z| \leq 1} (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{2\pi},$$

откуда

$$\rho \geq r e^{-\frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{2\pi}} \approx r \left(1 - \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{2\pi} \right) > r - \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Так как модуль области D равен модулю кольца $\rho \leq |w| \leq 1$, то в силу принципа двусвязной области внутренняя граница D должна иметь точки, лежащие по разные стороны от окружности $w = \rho$. Иными словами, найдется точка $w(z)$, $|z| = r$, для которой $|w(z)| \geq \rho > r - \sqrt[4]{\varepsilon}$, что и доказывает неравенство (7).

Допустим теперь, что левая часть неравенства (5) не верна. Тогда найдется функция $w = f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы со сколь угодно малым $\iint (p(z) - 1) d\sigma_z$, и такая, что в некоторой точке $\tilde{z}$, $0 < w(\tilde{z}) \leq |\tilde{z}| - \lambda$. В силу доказанного образ окружности $|z| = |\tilde{z}|$ не выйдет за пределы окружности $w = (\tilde{z}) + o(1)$, и на окружности $|z| = \frac{1}{2} |\tilde{z}|$ найдется такая точка z_1 , что $|w(z_1)| = |z_1| + o(1)$. Рассматривая отображение в круге $|z| \leq |\tilde{z}|$ и переходя к плоскостям $\zeta =$

$= \frac{z}{|\tilde{z}|}$ и $\omega = \frac{w}{|\tilde{z}|}$ (заметим, что $|\tilde{z}| > \lambda$), мы получим отображение круга $|\zeta| \leq 1$ на область G , граница которой находится в круге $|\omega| \leq 1 + o(1)$ с граничной точкой $\tilde{\omega}, |\tilde{\omega}| \leq \frac{|\tilde{z}| - \lambda}{\tilde{z}} = 1 - \frac{\lambda}{|\tilde{z}|} \leq 1 - \lambda$ и внутренней точкой $\omega_1 = \omega(\zeta_1) = \frac{1}{2}, |\omega_1| = \frac{1}{2} + o(1)$. Произведем добавочное конформное отображение области G на единичный круг $|t| \leq 1$, причем $t(0) = 0, t(\omega_1) = t_1$.

Тогда величина $|t_1| - |\omega_1|$ будет зависеть от области, однако с точностью до бесконечно малых, зависящих от $\varepsilon, |t_1| - |\omega_1| > \eta(\lambda)^*$. Или $|t_1| = |t(\zeta_0)| = \frac{1}{2} + \eta(\lambda) + o(1)$. Это, однако, противоречит уже доказанному, ибо для функции $t = t(\zeta)$

$$\begin{aligned}
 \iint_{|\zeta| \leq 1} (p(\zeta) - 1) d\sigma_\zeta &= \frac{1}{|\tilde{z}|^2} \iint_{|z| \leq |\tilde{z}|} (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \\
 &\leq \frac{1}{\lambda^2} \iint_{|z| \leq 1} (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

и $|t_1|$ не может превышать $|\zeta_1|$ на фиксированную величину.

Таким образом, лемма полностью доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функция $w = f(z)$ отображает квазиконформно круг $|z| \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$, причем $w(0) = 0, w(1) = 1$ и

$$\iint_z (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$|w(\varepsilon) - z| \leq \lambda(\varepsilon), \quad (8)$$

где $\lambda(\varepsilon)$ зависит только от ε и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\varepsilon) = 0$.

Доказательство. Продолжим отображение $w = f(z)$ на круг $|z| \leq 2$, полагая для $1 < |z| \leq 2$ $f(z) = \frac{1}{\bar{f}(\frac{1}{z})}$ (симметрия относительно единичных окружностей $|z| = 1$ и $|w| = 1$). Дополненная, таким образом, функция отображает круг $|z| \leq 2$ на область D , граница которой в силу (5) заключена в кольце $\frac{1}{\frac{1}{2} + \lambda'(\varepsilon)} \leq |w| \leq \frac{1}{\frac{1}{2} - \lambda'(\varepsilon)}$. Произведем преобразования $\zeta = \frac{1}{2}z$ и $\omega_1 = \frac{1}{2}w$ и отобразим затем конформно область D_1 , получаемую из D в плоскости ω_1 на круг $|\omega| \leq 1, \omega(0) = 0, \omega'(0) > 0$. Тогда, в силу близости области D_1 к единичному кругу, $|\omega_1 - \omega| = o(1)$ для $|\omega_1| \leq 1$ вместе с $\lambda'(\varepsilon)^{**}$. И так как $|w(z) - z| = 2|\omega_1 - \zeta| \leq 2|\omega_1 - \omega| + 2|\omega - \zeta|$, то для доказательства леммы достаточно установить ее для функции $\omega(\zeta)$

* Можно показать, что $\min |t_1| - |\omega_1|$ при заданных ограничениях на g достигается в том случае, когда g есть круг с разрезом от $1 - \lambda$ до 1 при $\omega = -\frac{1}{2}$.

** Опираясь на одну из лемм, приводимых в статье [4], можно показать, что $|\omega_1 - \omega| = O(\lambda'(\varepsilon))$ для $|\omega_1| \leq r < 1$.

при $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$. Назовем неевклидовым расстоянием между точками единичного круга $\rho(\zeta_1, \zeta_2)$ их обычное расстояние, получаемое при линейном преобразовании круга, переводящим одну из точек в начало. Тогда $|\rho(\omega_1, \omega_2) - \rho(\zeta_1, \zeta_2)| \leq \lambda' \left(\frac{81}{4} \varepsilon \right)$, где $|\zeta_1| \leq \frac{1}{2}$. Чтобы в этом убедиться, нужно преобразовать круги $|\zeta| \leq 1$, $|\omega| \leq 1$ линейно сами в себя так, чтобы точки ζ_1 и ω_1 перешли бы в начало. Учитывая, что растяжение в круге $|\zeta| \leq 1$, $\left| \frac{d\zeta'}{d\zeta} \right| \leq 9$, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{|\zeta'| \leq 1} (p(\zeta') - 1) d\sigma_{\zeta'} &\leq 9 \iint_{|\zeta| \leq 1} (p(\zeta) - 1) d\sigma_{\zeta} \leq \\ &\leq 9 \cdot \frac{9}{4} \iint_{|z| \leq 1} (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \frac{81}{4} \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, в силу определения $\rho(\zeta_1, \zeta_2)$ и неравенства (5), получаем

$$|\rho(\omega_1, \omega_2) - \rho(\zeta_1, \zeta_2)| \leq \lambda' \left(\frac{81}{4} \cdot \varepsilon \right).$$

Утверждение леммы следует из того достаточно очевидного факта, что если расстояние между точками может измениться только на бесконечно малую величину $O(1)$ и, кроме того, фиксированы по крайней мере две „базисные“ точки $\omega(0) = 0$, $\omega(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + O(1)$, то все отображение бесконечно близко к тождественному. Мы его более подробно приводить не будем, укажем лишь, что, пользуясь одной леммой Варшавского [4], можно показать, что $\lambda(\varepsilon) \leq k \lambda' \left(\frac{81}{4} \varepsilon \right)$. Лемма полностью доказана.

Для дальнейшего нам нужна будет.

ЛЕММА 5.* Пусть функция $w=f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение для $0 < |z| \leq 1$ и пусть

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \iint_{0 < |z| < r} (p(z) - 1) dz = 0.$$

Тогда как прямое, так и обратное отображение будут квазиконформными в точке $z=0$, причем $p(0)=1$, то есть бесконечно малый круг переходит в круг с сохранением на нем угловых расстояний.

Доказательство. Покажем, что отображение $w=f(z)$ гомеоморфно в точке $z=0$. Для этого достаточно, в силу ограниченности $f(z)$, показать, что модуль двусвязной области D , являющейся образом кольца $0 < |z| \leq 1$, бесконечен. Заметим, что в силу условий теоремы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-2m} \iint_{|z| < e^{-m}} (p(z) - 1) d\sigma_z = 0,$$

* Лемма 5 есть обобщение леммы 5 работы М. А. Лаврентьева [1]. Метод доказательства взят из этой работы.

поэтому существует

$$\max_{m=1, 2, \dots} \frac{1}{2\pi} e^{-2m} \iint_{|z| \leq e^{-m+1}} (p(z) - 1) d\sigma_z = a.$$

Рассмотрим теперь кольцо $e^{-n} \leq |z| \leq 1$. Обозначая через $\mu(n)$ модуль его образа в плоскости, будем иметь согласно неравенству (3)

$$\begin{aligned} n - \mu(n) &\leq \frac{\mu(n)}{n} \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| \leq 1} (p(z) - 1) d\sigma_z = \frac{\mu(n)}{2\pi n} \sum_{m=1}^n \iint_{e^{-m} \leq |z| \leq e^{-m+1}} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z \leq \\ &\leq \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{2\pi} e^{-2m} \iint_{e^{-m} \leq |z| \leq e^{-m+1}} (p(z) - 1) d\sigma_z \leq \frac{\mu}{n} n \cdot a = \mu(n) \cdot a \end{aligned}$$

или

$$\mu(n) \geq \frac{1}{1+a} \cdot n.$$

Таким образом, отображение в окрестности нуля непрерывно* и, дополненное по непрерывности, гомеоморфно. Будем для простоты считать $f(0) = 0$.

Рассмотрим в плоскости z бесконечно малое кольцо фиксированной ширины, например, кольцо $\frac{\rho}{2} \leq |z| \leq \rho$, ρ будем считать бесконечно малым. Покажем, что каковы бы ни были точки z_1 и z_2 кольца, имеет место неравенство

$$\left| \frac{z_2}{z_1} - \frac{w_2}{w_1} \right| \leq \eta(\rho), \quad (9)$$

где $\eta(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Тем самым, очевидно, лемма будет полностью доказана.

Покажем, что каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для достаточно малого ρ , $\left| \frac{z_2}{z_1} - \frac{w_2}{w_1} \right| < \varepsilon$. С этой целью рассмотрим отображение в круге $|z| \leq m\rho$, где $m = m(\varepsilon) > 1$ мы определим далее. Рассмотрим вспомогательные плоскости $\zeta = \frac{z}{m\rho}$ и $\omega = F(w)$, где $F(w)$ отображает конформно D_ρ — образ круга $|z| \leq m\rho$ на единичный круг, причем точке $\zeta = 1$ соответствует точка $\omega = 1$. Для функции $\omega = \omega(\zeta)$ величина $\iint_{|z| \leq m\rho} (p(z) - 1) d\sigma_z = \frac{1}{(m\rho)^2} \iint_{|\zeta| \leq 1} (p(\zeta) - 1) d\sigma_\zeta$ — бесконечно малая вме-

сте с ρ . Поэтому величина $\left| \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{w_2}{w_1} \right|$ — тоже бесконечно малая с ρ ,

* Легко показать, что $f(z)$ не только непрерывна в точке $z = 0$, но и удовлетворяет в нуле условию $\text{Lip } \alpha$ с любым $\alpha < 1$. Доказательство можно провести, опираясь на экстремальные свойства конформных отображений двусвязных областей.

ибо $|\zeta_1| \geq \frac{1}{2m}$, а $|\zeta_2 - \omega_2|$ и $|\zeta_1 - \omega_1|$ малы согласно лемме 4. Теперь осталось заметить, $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$, а величина $\left| \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{w_2}{w_1} \right|$ может быть

сделана сколь угодно мала при достаточно большом $m = m(\varepsilon)$ в силу известных свойств конформных отображений. Лемма полностью доказана. Докажем теперь следующую теорему:

ТЕОРЕМА: Пусть функция $w = f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение для $0 < |z| \leq 1$ и пусть

$$\int \int_{0 < |z| < 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z = A < \infty.$$

Тогда существует $\lim_{z \rightarrow 0} w = w_0$, и $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w - w_0}{z} = 0, \infty^*$.

Доказательство. Ввиду того, что интеграл $\int \int_{0 < |z|} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z$ сходится, интеграл $\int \int_{0 < |z| < r} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z$ мал вместе с r . Но $\frac{1}{r^2} \int \int_{0 < |z| < r} (p(z) - 1) d\sigma_z < \int \int_{0 < |z| > r} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z$ поэтому в силу леммы 5 существует $\lim_{z \rightarrow 0} w =$

$= w_0$. Будем для простоты считать $w_0 = 0$. Докажем, что $\frac{1}{\mu} \leq \left| \frac{w}{z} \right| \leq \mu$. Так как в силу той же леммы бесконечно малый круг $|z| = r$ переходит в круг, то достаточно показать, что величина $\left| \mu(r) - \ln \frac{1}{r} \right| < M$, где $\mu(r)$ — модуль образа $r \leq |z| \leq 1$. Однако в силу леммы 1, $\left| \mu(r) - \ln \frac{1}{r} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int \int_{r < |z| < 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z < \frac{A}{2\pi}$. Таким образом,

если $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w}{z}$ существует, то он отличен от нуля и бесконечности. В случае отображения на круг $|w| \leq 1$

$$e^{-\frac{A}{2\pi}} \leq \lim \left| \frac{w}{z} \right| \leq \overline{\lim} \left| \frac{w}{z} \right| \leq e^{\frac{A}{2\pi}}.$$

Покажем теперь, что для достаточно малых z_1 и z_2 или, что то же самое, для достаточно малых $w_1 = w(z_1)$ и $w_2 = w(z_2)$, величина $\left| \frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1} \right|$ будет меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Рас-

* Доказательство того, что существует $\lim \left| \frac{w - w_0}{z} \right|$ в несколько иной формулировке, было впервые получено при дополнительных ограничениях О. Тайхмюллером и без ограничения Виттихом [2].

смотрим сначала случай $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \leq 1$. Тогда

$$\left| \frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1} \right| = \left| \frac{w_1}{z_1} \right| \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \left| \frac{w_2}{w_1} - \frac{z_2}{z_1} \right| \leq \mu \cdot \eta(\rho) \rightarrow 0,$$

ибо

$$\left| \frac{w_1}{z_1} \right| \leq \mu, \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 1, \text{ а } \left| \frac{w_2}{w_1} - \frac{z_2}{z_1} \right| \leq \eta(\rho) \text{ по неравенству (9).}$$

Будем считать теперь $|z_2| > 2|z_1|$. В силу (9) и гомеоморфности $|w_2| > (2 - \eta(\rho))|w_1|$. Рассмотрим отображение в круге $|z| \leq |z_2|$ и перейдем к переменным $\zeta = \frac{z}{z_2}$ и $\omega = \frac{w}{w_2}$. Тогда величина $\left| \frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1} \right|$, которую нам нужно оценить переписывается в виде

$$\left| \frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1}{z_1} \right| = \left| \frac{w_2}{z_2} - \frac{w_1 w_2}{\zeta_1 z_2} \right| = \left| \frac{w_2}{z_2} \right| \left| 1 - \frac{\omega_1}{\zeta_1} \right|,$$

что ввиду ограниченности $\left| \frac{w_2}{z_2} \right|$ эквивалентно малости $\left| 1 - \frac{\omega_1}{\zeta_1} \right|$. Кольцо $|\zeta_1| \leq |\zeta| \leq 1$, соответствующее кольцу $|z_1| \leq |z| \leq |z_2|$, в силу леммы 5 переходит почти в кольцо D , границы которого близки (в смысле отношения $\frac{\max w}{\min w}$) к окружностям $|\omega| = 1$ и $|\omega| = |\omega_1|$; поэтому в силу известных свойств двусвязных областей модуль D близок к величине $\lim_{|\omega_1|} \frac{1}{|\omega_1|}$. Модуль же D отличается от величины $\ln \frac{1}{|\zeta_1|}$ не более, чем на

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta_1| < |\zeta| < 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint_{|z_1| < |z| < |z_2|} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z = O(1) \text{ вместе с } |z_2|.$$

Поэтому

$$\left| \ln \frac{1}{|\omega_1|} - \ln \frac{1}{|\zeta_1|} \right| = O(1)$$

или

$$\left| \frac{\omega_1}{\zeta_1} \right| = e^{O(1)} = 1 + O(1).$$

Остается показать, что $\arg \frac{\omega_1}{\zeta_1}$ тоже есть величина бесконечно малая.

Для этого рассмотрим кольцо $|\omega_1| \leq |\omega| \leq 1$, которому в плоскости ζ будет соответствовать область, близкая к кольцевой, $\omega(1) = 1$. Рассмотрим $\min_{|\omega| = |\omega_1|} \arg \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} = \delta$. По лемме 5 при $|\omega| = |\omega_1|$ $\arg \frac{\omega}{\zeta} - \delta = o(1)$, а по лемме 2

$$\delta \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2} d\sigma_\zeta + \left(1 + \frac{\ln \frac{1}{|\zeta_1|}}{\ln \frac{1}{|\omega_1|}} \right) O(1).$$

Интеграл в правой части мал как остаток сходящегося. Так как

$\frac{\ln \frac{1}{|\zeta_1|}}{\ln \frac{1}{|\omega_1|}} < K$ в силу $\left| \frac{\zeta_1}{\omega_1} \right| < \mu$ и $\frac{1}{|\zeta_1|} \geq 2$, то и второй член мал. Мы доказали, что отношение $\frac{\omega_1}{\zeta_1}$ близко к 1 по модулю и аргументу. Тем самым теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. — Об одном классе непрерывных отображений. Математич. сб. 42: 2, 1935, стр. 407 — 423.
2. Wittich H. — Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen Math. Z. 51: 6, 1949.
3. Grötzsch H. — Einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I. Ber. Sachs Acad. Wiss. 80, 1928.
4. Warschawsky S. E. — On the degree of variation in conformal mapping of variable regions Trans. Amer. Math. Soc. 69, 1950.

Г. Л. БУЙМОЛА

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРВИННИХ ПОМИЛОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

1) Розглянемо лише ті геометричні побудови, які можуть бути виконані за допомогою найбільш вживаних в рисуванні приладів: циркуля, лінійки та косинця.

Елементарні операції цими приладами під час виконання побудови, як це прийнято в геометрографії, будемо позначати через: C_1, C_2, R_1, R_2, P, W , [1].

Елементами рисунку є точка і пряма, тому більшість задач на побудову зводиться саме до відшукування деякої точки або прямої, що є розв'язком задачі.

Графічно задану точку A' (уколом ніжки циркуля, слідом дотику олівця і т. ін.) будемо вважати за коло сталого (для даної побудови) радіуса ω_2 .

Практично ω_2 — дуже мала величина, що за дослідженнями радянського вченого професора Каргіна [2] знаходиться в межах від 0,08 до 0,13 мм.

Центром цього кола вважається геометрична (евклідова) точка A , причому між евклідовими або геометричними точками A і графічно заданими точками A' існує взаємнооднозначна відповідність: кожній точці A' відповідає точка A і навпаки. Коротко: $A' \leftrightarrow A$ (рис. 1). Графічно задану точку ми будемо іноді для скорочення називати „точка“. Якщо графічно задану точку ми позначаємо через A' , то відповідну їй евклідову точку будемо позначати A і записувати $A'(A)$. Очевидно, „точку“ A' можна задати рівнянням:

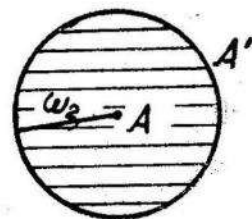


Рис. 1.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_2^2 = 0, \quad (1)$$

де α і β — координати центра кола (1), тобто евклідової точки A , а ω_2 — радіус цього кола, тобто радіус заданої графічно точки.

Графічно задану пряму a' (рис. 2) ми розглядаємо як смужку (слід олівця чи пера рейсфедера) шириною $2\omega_1$. Практично ω_1 є величина також мала і в межах одної побудови вважається сталою (якщо про це спеціально не зазначено).

Професор Каргін, провівши лабораторні дослідження величини ω_1 за допомогою мікроаналіза, встановив, що товщина прямої лінії, якою здебільшого користуються в практиці (тобто величина $2\omega_1$), знаходиться між 0,13 і 0,26 мм. Середня лінія цієї смужки є геометрична (евклідова) пряма a , що відповідає цій смужці a' (тобто графічно заданій прямій).

Отже, між a' і a так само встановлюється взаємнооднозначна від-

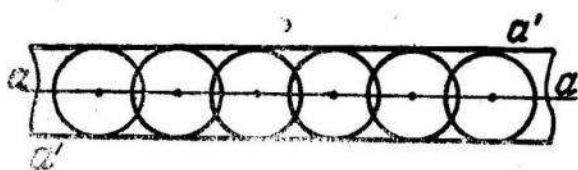


Рис. 2.

центри яких лежать на даній геометричній прямій a , рівняння якої візьмемо в загальному виді

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

тобто при умові: $A\alpha + B\beta + C = 0$.

Рівняння цієї обгортки буде

$$Ax + By \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_1 + C = 0. \quad (3)$$

Воно являє собою дві прямі, паралельні даній прямій (2), що знаходяться на віддалі $\pm \omega_1$ від неї.

Наприклад, якщо „пряма“ a' проведена паралельно осі абсцис, то рівняння відповідної їй геометричної (евклідової) прямої a буде $y - h = 0$, якщо через h позначимо ординату точки перетину прямої a з віссю ординат.

Використовуючи формулу (3), ми знайдемо рівняння обгортки, або, інакше кажучи, рівняння „прямої“ a' . Воно буде: $y = h \pm \omega_1$.

Так само, якщо пряма a має рівняння $2x - 3y + 2 = 0$, то „пряма“ a' матиме рівняння $2x - 3y \mp \sqrt{13} \omega_1 + 2 = 0$; вираз $R = \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_1$ назовемо *поправкою на реалізацію* прямої a .

Графічно задане коло k' (за допомогою циркуля) ми можемо розглядати також як певну смужку, обмежену обгорткою сімейства кіл, центри яких знаходяться на відповідному геометричному (евклідовому) колі k (рис. 3.). Нехай геометричне коло k , рівняння якого в декартових координатах є

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0, \quad (4)$$

однозначно відповідає смужці k' , що утворюється обгорткою сімейства кіл $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_1^2 = 0$, центри яких (α, β) знаходяться на колі (4); тобто при умові $(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 - R^2 = 0$. Рівняння згаданої обгортки можна тоді записати у вигляді

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (R \pm \omega_1)^2 = 0. \quad (5)$$

Кільцева смужка, обмежена цією обгорткою (5), і є графічно задане коло. Рівняння (5) ми умовно приймаємо за рівняння графічно заданого „кола“ k' . Аналогічно ми могли б записати довільно задану графічно криву (смужку), відшукуючи обгортку сімейства кіл $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_1^2 = 0$, центри яких знаходяться на відповідній геометричній кривій $F(xy) = 0$, що є середньою лінією цієї смужки.

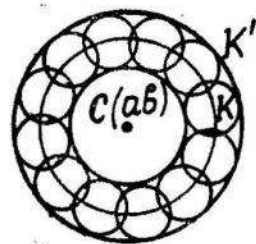


Рис. 3.

2) Різними „точками“ ми будемо називати такі „точки“ A' і B' , задані відповідно рівняннями

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_2^2 = 0,$$

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - \omega_2^2 = 0,$$

для яких існує хоч одна з нерівностей $\alpha \neq \alpha_1$, $\beta \neq \beta_1$. Практично ми відрізняємо дві „точки“ A' і B' тоді, коли віддаль між їх відповідними точками A і B (центрами відповідних кіл, що зображають „точки“ A' і B') не менша деякої граничної величини

$$2\omega_1 = \sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2}; \quad (6)$$

тобто, якщо вони не містяться в середині деякого кола K , радіус якого не перевищує величини $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ (6) і центр якого знаходиться в точці $x_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}$, $y_0 = \frac{\beta_1 + \beta}{2}$ (рис. 4). Тут ми зустрічаємось

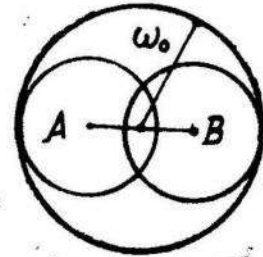


Рис. 4.

з основною *первинною помилкою* побудування, що є наслідком неудоконалення нашого сприймання. Ця основна первинна помилка може бути схарактеризована згаданим колом k радіуса ω_0 . Величину $AB \leq 2\omega_1$ будемо називати *основною первинною помилкою I-го роду*. Дві „точки“, для яких $AB \leq 2\omega_1$, назовемо *відносно інцидентними „точками“*. Коло k радіуса $\omega_0 \leq \omega_1 + \omega_2$ назовемо *одиничним колом помилок* або *колом відносної інцидентності* двох „точок“.

Нерівність

$$\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2} \leq 2\omega_1 \quad (7)$$

буде умовою відносної інцидентності двох точок. Очевидно, що:

1) Коли $\omega_1 \rightarrow 0$, то одиничне коло помилок вироджується в „точку“. Дві „точки“ A' і B' зливаються, стають *абсолютно інцидентними* (тобто їх відповідні точки A і B також зливаються).

Тоді виконується умова:

$$\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2} = 0. \quad (8)$$

2) Кожне одиничне коло помилок містить нескінченну множину звичайних (геометричних) точок.

3) У „площині“ рисунку існує нескінченна множина відносно інцидентних „точок“, а значить і одиничних кіл помилок.

4) Дві відносно інцидентні „точки“ несуть на собі *основну первинну помилку I-го роду*.

„Точку“ A' , яку ми задаємо аналітично рівнянням

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_2^2 = 0 \text{ і пряму } a', \text{ рівняння якої є}$$

$$Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_1 = 0,$$

ми будемо називати *абсолютно інцидентними* в тому випадкові, якщо інцидентні *відповідні* їм звичайні точка (A) і пряма (a) евклідової площини. Тобто, якщо виконується умова

$$A\alpha + B\beta + C = 0. \quad (9)$$

Практично „точка“ і „пряма“ не розрізняються одна від одної, якщо

$$\frac{A\alpha + B\beta + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq \omega_0, \text{ (де } \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \neq 0\text{)}. \quad (10)$$

Тому:

1) „Точку“ і „пряму“ назовемо *відносно інцидентними* (або практично інцидентними), якщо віддаль центра „точки“ від середньої лінії „прямої“ $\leq \omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$), тобто, якщо виконується умова (10).

2) Смужку, обмежену двома паралельними прямими, що являють собою обгортку сімейства кіл радіуса ω_0 з центром на прямій a , будемо називати *одиничною смугою помилок* або *смугою відносної інцидентності* „точки“ і „прямої“. Якщо рівняння прямої a є

$$Ax + By + C = 0,$$

то рівняння згаданої обгортки кіл $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \omega_0^2 = 0$ буде

$$Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_0 = 0. \quad (11)$$

Ця смуга помилок характеризується одиничним колом радіуса ω_0 , а значить несе на собі основну первинну помилку 1-го роду.

Очевидно, що:

а) Кожній „прямій“ відповідає тільки одна одинична смуга помилок.

б) Якщо $\omega_0 \rightarrow 0$, то „точка“ і „пряма“ в границі стають *абсолютно інцидентними*.

Поняття відносної інцидентності „точки“ та „кола“ або „точки“ та будь-якої графічно заданої кривої, а також абсолютної їх інцидентності можуть бути введені аналогічно.

Дві „прямі“

$$\begin{aligned} Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_1 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 \mp \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

будемо називати *відносно інцидентними „прямими“*, якщо виконується умова $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$, тобто, якщо паралельні відповідні їм евклідові прямі і віддаль між останніми не перевищує $2\omega_1$. Такі прямі також характеризуються певною смугою помилок, яку в цьому випадку назовемо *смугою інцидентності двох прямих*, що належить до первинних помилок побудови.

Дві різні „неінцидентні“ „прямі“ або перетинаються, або паралельні між собою.

Якщо дві „прямі“ перетинаються, то вони визначають „точку“, точність позначення якої на рисунку характеризується „площею помилок“. Остання належить також до основних первинних помилок геометричної побудови. Її форма і величина залежать в основному лише від кута α , під яким перетинаються відповідні геометричні прямі.

Якщо позначити указану площу помилок через T , то ця залежність виразиться такою формулою:

$$T = \frac{4\omega_0^2}{\sin \alpha}. \quad (13)$$

В граничних випадках ця площа помилок може розтягнутися (виродитись) в „смуку інцидентності двох прямих“, якщо прямі паралельні, або прийняти форму квадрата з стороною, рівною $2\omega_0$, якщо прямі взаємноперпендикулярні.

Будемо називати дві „прямі“ (12) „паралельними“, якщо умова $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$ виконується, але віддаль між відповідними евклідовими прямими більша за $2\omega_1$.

Помилка, що виникає при побудові двох „паралельних“ прямих, належатиме вже до складніших або *вторинних* помилок побудови.

3) Розглянемо тепер помилки, що виникають в побудові при основних елементарних операціях рисунку R_1, R_2, C_1, C_2 . Їх також слід віднести до основних первинних помилок геометричної побудови.

Величина помилки, що виникає при операції R_1 , тобто при прикладанні лінійки до даної „точки“ A' , так само, як і при операції C_1 (встановлення ніжки циркуля в точку даної „прямої“ a) буде дорівнювати довжині перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої a . Позначимо максимальну величину цієї помилки через $\omega_{\max}$. Тоді

$$0 \leq \omega_{\max} \leq \omega_0 \quad (14)$$

При відхиленні „прямої“ від „точки“ на більшу величину ми вже помітимо, що „точка“ не лежить на „прямій“ або, що „пряма“ не проходить через „точку“. Значення $\omega_{\max}$ залежить від гостроти зору людини, що працює над рисунком, від освітлення, приладь та величини самих „точок“ і „прямих“ і ряду інших суб'єктивних чи об'єктивних причин (навик в роботі, якість паперу і т. п.). Можна припустити, що для одної і тої ж гостроти зору при незмінному освітленні всі „точки“ наколенні (задані на рисунку у вигляді укола ніжки циркуля) з однаковою точністю і що помилка $\omega_{\max}$ для кожної такої точки при проведенні „лінії“ через неї буде *сталою* в межах даної побудови.

Величину $\omega_{\max}$ називатимемо далі *помилкою прикладання лінійки до заданої „точки“* або *помилкою встановлення ніжки циркуля в довільну точку заданої „прямої“*.

Розглянемо тепер первинну помилку, що виникає внаслідок проведення операцій $2R_1$ та R_2 , тобто при прикладанні лінійки до двох графічно заданих „точок“ A' та B' в полі рисунку та при проведенні „прямої“ через них.

Графічно задані „точки“ A' та B' згідно з (1) можна аналітично записати так:

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - \omega_2^2 = 0 \quad (,,точка" A'),$$

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - \omega_2^2 = 0 \quad (,,точка" B').$$

Тоді всяка „пряма“ $Ax + By + C \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_1 = 0$ буде відносно інцидентна цим „точкам“, якщо віддаль d_1 точки A від відповідної цієї прямої геометричної прямої $Ax + By + C = 0$ і віддаль d_2 точки B від тої ж прямої не перевищує ω_0 як свого максимуму. Тобто якщо для випадку графічно заданих „точок“ і „прямих“ виконується умова (10). Найбільш не вигідне положення „прямої“ тоді, коли віддалі ці будуть різних знаків і досягатимуть свого максимуму $[\omega_0]$. Таких положень

„прямої“, очевидно, може бути два: A_1A_2 і B_1B_2 (рис. 5). В цих випадках ми робимо „помилку в напрямку прямої“ (відхилення від ідеального її положення AB), що вимірюється кутом $\varphi_{\max}$, рівним половині кута між граничними прямими A_1A_2 і B_1B_2 .

Позначивши довжину AB через $2l$, дістанемо:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{AB_1}{AS} = \frac{\omega_{\max}}{l}.$$

Для малих кутів φ виразимо первинну помилку $\varphi_{\max}$ в напрямку „прямої“ наближеним рівнянням:

$$\varphi_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{l}. \quad (15)$$

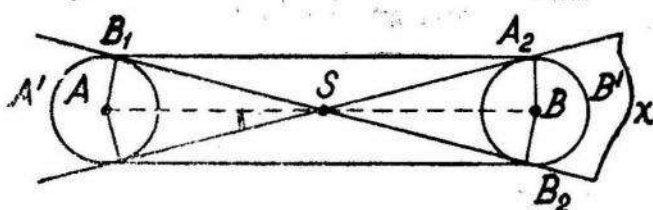


Рис. 5

Отже, первинна помилка в напрямку прямої, що виникає внаслідок операцій $2R_1$ або K_2 , є обернено пропорційна до половини віддалі між точками A і B і прямо пропорційна до помилки прикладання лінійки $\omega_{\max}$.

Практично величину $\varphi_{\max}$ ми можемо наближено визначити так: прикладаючи кілька разів лінійку до точок A і B , не будемо проводити прямої, а кожного разу по обидві сторони від A і B відзначимо рискою її положення, причому як можна далі від середини S відрізка AB , наприклад, на віддалі від середини S , рівній $50l$. Потім визначимо крайні риси. Сполучаючи їх відповідно, дістанемо подвійний кут $\varphi_{\max}$.

Знаючи $\varphi_{\max}$ за формулою (15), можна обчислити первинну помилку прикладання лінійки:

$$\omega_{\max} = l\varphi_{\max}. \quad (16)$$

„Прямі“ A_1A_2 , B_1B_2 , B_1A_2 і A_1B_2 виділяють область площини рисунку, яку ми позначимо через X (рис. 5). В цій області може проходити безліч „прямих“ відносно інцидентним „точкам“ A' і B' . Область X ми назовемо *одиничною областю помилок*, або *одиничною областю відхилень* нарисованих „прямих“, і віднесемо її також до основних первинних помилок побудови. Ця первинна помилка також характеризує точність проведення „прямої“ через дві графічно задані „точки“ (т.т. операцію $2R_1$ та R_2).

Елементарна операція C_2 — рисування кола — також вводить помилку в геометричну побудову. Величина цієї помилки залежить від багатьох причин; вкажемо на такі з них:

1) ніжка циркуля, що встановлюється в центр кола — „точку“ O , — заглиблюється в товщу паперу на деяку глибину γ' , від чого радіус кола r зменшується на деяку величину $\delta r = r - r'$, де $r' = \sqrt{r^2 - \gamma'^2}$.

2) Сточування графіта олівця під час рисування, від чого радіус кола ще більше вкорочується. Якщо не брати до уваги інших причин, то й вказані приводять до неточності побудування кола.

3) Якщо A — початкова точка кола, що ми маємо нарисувати з

довільного центра O , то кінцева його точка вже не попаде якраз в цю початкову точку. Відхилення, що може мати тут місце, характеризується основною первинною помилкою $2\omega_1$. Якщо згадане відхилення в „точці“ зіткнення дуг кола перебільшує цю величину, то помилка в побудуванні кола вже буде практично помітною.

4) При побудові будь-яких кутів ми зустрічаємось з характерною для цієї побудови помилкою. Справа в тому, що для того, щоб пара „променів“ h' і k' , які виходять з одної „точки“ O' , визначали (практично) кут $(h' k')$, необхідно, щоб вони мали лише одну спільну „точку“ O' (вершок кута) і не були відносно інцидентними між собою.

Кут $(h' k')$ буде практично помітним, коли його величина буде більшою за $\frac{2\omega_1}{r}$, де $2\omega_1$ — величина дуги кола радіуса r , центр якого знаходиться в точці O' — вершині кута і являє собою за величиною основну первинну помилку 1-го роду.

Кут $\alpha = \frac{2\omega_1}{r}$ ми назвемо *одиничним кутом помилок* або *одиничною кутовою помилкою*, яку слід віднести до *первинних помилок* геометричної побудови.

Якщо $r \rightarrow \infty$, то $\alpha \rightarrow 0$. Кут вироджується в смугу відносної інцидентності двох „прямих“ або просто в „пряму“. Якщо $r \rightarrow 0$, то про кут не доводиться говорити, оскільки практично ми маємо справу в цьому випадку з точкою так само, як у випадку $r \rightarrow 2\omega_1$ ми маємо справу з графічно заданою „точкою“.

Отже, $2\omega_1 \leq r < \infty$, оскільки побудову проводять на обмеженій частині „площини“ (аркуш паперу). Звідси також можна зробити висновок, що для збільшення точності побудови і виміру кута слід брати радіус допоміжного кола r , на якому відраховується дуга, як можна більшим.

5) Розглянемо тепер таку задачу:

Оцінити точність проведення дотичної з графічно заданої „точки“ до графічно заданого „кола“ радіуса R .

Нехай графічно задано в площині рисунок коло у вигляді кільцевої смужки шириною $2\omega_1$, центр цього кола „точка“ $C'(C)$ і „точка“ $A'(A)$, з якої треба провести дотичну до кола $k'(k)$ (рис. 6)*.

Для розв'язку задачі прикладемо лінійку до точки так, щоб олівець (чи перо), яким рисуємо дотичну, попав приблизно в центр „точки“ A' і щоб проведена „пряма“ по лінійці „дотикалася“ „кола“ k' .

При цьому ми робимо помилку в прикладенні лінійки як до „точки“ A' , так і до „точки“ дуги „кола“ k' .

Найбільш сприятливий випадок у побудові був би той, коли б евклідова пряма a проходила з одного боку якраз через евклідову точку A (a і A — абсолютно інцидентні) і з другого боку дотикалась евклідового кола k в деякій точці B . Але і тоді, з огляду на те, що графічна „точка“ являє собою кружочок радіуса ω_2 , а проведене коло — смужку, ширина якої $2\omega_1$, — ми матимемо площу MNP , в середині якої десь міститься точка дотику.

Нам необхідно визначити цю точку, указати ту область, в якій вона знаходиться, оцінити точність проведеної побудови, вказати на те максимальне відхилення, яке може бути допущене в геометричній

* Тут k' — графічно задане коло, k — відповідне йому евклідове коло так само як і C і A — евклідові точки, яким відповідають „точки“ C' і A' .

побудові, тобто вказати границі цього відхилення, перейшовши які геометричну побудову слід вважати зовсім не точною і яку недопустимо практично використовувати, оскільки вона матиме уже значні неточності, знехтувати якими ніяк не можна.

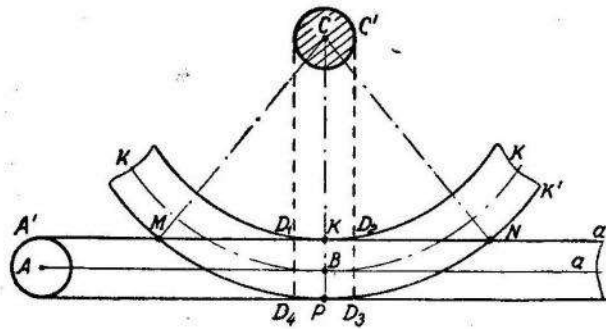


Рис. 6.

„Точка“ дотику $B \rightleftharpoons B'$ знаходиться в середині квадрата $D_1 D_2 D_3 D_4$, який являє собою *одичину площу помилок* першого типу [3]. За граничну помилку слід прийняти площу всього сегмента MPN , за межі якої не вийде точка дотику в указаній побудові, враховуючи навіть і ті відхилення (помилки), які внесе в побудову проведення перпендикуляра $C'B'$. Обчислимо цю помилку. Позначивши площу сектора MCP через $S_{сек}$, кут MCP — через α , а шукану площу сегмента MNP — через S_x , будемо мати:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{S_{сек}}{\pi (R + \omega_0)^2}$$

звідки

$$S_{сек} = \frac{\alpha}{2} (R + \omega_0)^2.$$

Очевидно, що площа сектора

$$MCN = \alpha (R + \omega_0)^2,$$

площа

$$\begin{aligned} \triangle MCK &= \frac{1}{2} MK \cdot CK = \frac{1}{2} \sqrt{(R + \omega_0)^2 - (R - \omega_0)^2} (R - \omega_0) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4R\omega_0} (R - \omega_0) = \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0), \end{aligned}$$

а площа

$$\triangle MCN = 2 \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0).$$

Шукана площа сегмента

$$S_x = \alpha (R + \omega_0)^2 - 2 \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0).$$

Коли α достатньо мале, то можна замінити α через $\sin \alpha$, тоді:

$$\begin{aligned} S_x &= \sin \alpha (R + \omega_0)^2 - 2 \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0) = \frac{2 \sqrt{R\omega_0}}{R + \omega_0} (R + \omega_0)^2 - \\ &- 2 \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0) = 2 \sqrt{R\omega_0} (R + \omega_0) - 2 \sqrt{R\omega_0} (R - \omega_0) = \\ &= 4 \sqrt{R\omega_0} \cdot \omega_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для оцінки точності побудови дотичної складемо коефіцієнт точності:

$$K_t = \frac{4\omega_0^2}{4\sqrt{R\omega_0} \cdot \omega_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{R\omega_0}} = \sqrt{\frac{\omega_0}{R}}. \quad (18)$$

Коефіцієнт точності K_t показує, що чим більший радіус кола k , тим менша буде точність побудови дотичної. Площа сегмента $MNP = 4\sqrt{R\omega_0\omega_0}$ характеризує точність цієї побудови, тому її можна віднести до первинних помилок побудови дотичної. Ми розглянули найбільш сприятливий випадок, що може трапитись при проведенні дотичної, а саме той, коли пряма a дотикається кола k в деякій точці B . Тобто, коли помилка в напрямку прямої a дорівнює нулеві.

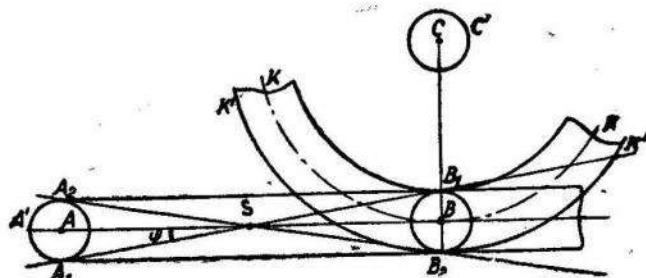


Рис. 7.

Помилка в напрямку прямої буде також дорівнювати нулеві, коли пряма a займе положення A_1B_2 або A_2B_1 (рис. 7).

Пряма a може зайняти найбільш несприятливе положення, наприклад, A_1B_1 або A_2B_2 . Тут помилка в напрямку прямої a буде характеризуватися кутом

$$\varphi_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{I}. \quad (15')$$

Оцінимо тепер точність проведення дотичної і нормалі до кола в цьому випадку.

Нормаллю до кола в деякій його точці буде радіус заданого кола k (центр якого знаходиться в даній точці C), що сполучає центр і точку дотику.

Отже, для побудови нормалі до кола нам необхідно провести через точку C перпендикуляр до дотичної AB .

При вживанні косинця (угольного) ми зустрічаємось з помилкою прикладання його в „точці“ S кожного разу, коли проводимо перпендикуляр до граничних прямих A_1B_1 і A_2B_2 . Розглядаючи чотирикутник $D_1D_2D_3D_4$ (рис. 8), площа якого при невеликих значеннях кута $\varphi_{\max}$ наближається до одиничної площі помилок $4\omega_0^2$, ми можемо обчислити площу помилок побудови нормалі до заданого кола. З рисунку 8 знаходимо:

$$1) \quad \nabla S_1 = \nabla S,$$

$$2) \quad \triangle SP_1P_2 = \triangle S_1C_1C_2,$$

$$3) \triangle S_1BE \sim \triangle S_1C_1C_2,$$

звідки:

$$\frac{BE}{CC_2} = \frac{S_1 B}{S_1 C} \text{ а } \omega_{\max} = \frac{R + l}{l}$$

і, отже,

$$BE = \frac{R + l}{l} \omega_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{l} (R + l).$$

лению областей погрешности, возникающих при построении касательной и нормали к графически заданной окружности.

Вычисляются коэффициенты точности этих построений.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. Одесса, 1910.
2. Каргин Д. И. О точности графических расчетов. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Выпуск 150, 1929.
3. Буймола Г. Л. Коефіцієнт точності геометричних побудов. Наукові записки Львів. держ. університету ім. Ів. Франка, том V, 1947.

И. Г. СОКОЛОВ

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН РЯДА ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В последние десятилетия появилось большое число работ, посвященных изучению асимптотического выражения остаточных членов приближения тригонометрическими полиномами для различных классов функций.

Первой значительной работой такого рода была работа Колмогорова [4]. Колмогоровым было получено асимптотическое значение для остаточного члена ряда Фурье для класса дифференцируемых функций с ограниченной „ r “ производной. Результат Колмогорова был обобщен Пинкевичем [6] на случай дробной (в смысле Вейля) производной. Затем следует отметить работы Ахиезера, Крейна и Фавара, дающих точное значение величины наилучших приближений для класса дифференцируемых функций. С. М. Никольским были получены наиболее полные результаты по изучению остаточных членов приближения для классов функций [см., например, 5].

В настоящей работе используется результат Ахиезера и Крейна [2] для получения не асимптотического значения остаточного члена ряда Фурье, а оценки сверху. При этом используется известное неравенство Бернштейна:

$$\|x - U_n(x)\| \leq (1 + L_n) E_n(x),$$

где U_n — линейный оператор, переводящий $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π -периодических функций с равномерной метрикой), такой, что $U_n(T_n) = T_n$ (для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n); $E_n(x)$ — наилучшее приближение „ x “ тригонометрическими полиномами T_n .

L_n есть норма оператора U_n , называемая обычно константой Лебега метода приближения U_n . В этой работе изучено поведение констант Лебега сумм Фурье как для конечных n , так и для больших значений n .

§ 1. Константы Лебега приближения суммами Фурье имеют вид (1).

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (1)$$

Легко получить формулу для вычисления L_n при конечных значениях „ n “.

Из (1) получаем:

$$L_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{m=1}^n (-1)^m \int_{\frac{(m-1)\pi}{2n+1}}^{\frac{m\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz + (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz \right\}.$$

Вычисляя интегралы, получаем:

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{2km}{2n+1} \pi}{k}.$$

Меняя порядок суммирования и используя формулу

$$\sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sin \frac{2k\pi}{2n+1} m = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1},$$

получаем

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1}}{k}. \quad (2)$$

Используя эту формулу, легко вычислить значения L_n . Получаем следующую таблицу:

Таблица констант Лебега*

n	1	2	3	4	5
L_n	1,43599	1,64218	1,77832	1,88008	1,96464
n	6	7	8	9	10
L_n	2,05132	2,08998	2,13702	2,18275	2,22213

§ 2. Для вычисления L_n для больших значений „ n “ воспользуемся формулой Szëgo (1):

$$L_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2v(2n+1)-1}}{4v^2 - 1}. \quad (3)$$

Будем исходить из известного соотношения [3]

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1) \dots (n+k-1)}, \quad (4)$$

* Таблица вычислена студентом ЛГУ Ю. Д. Зинько.

где „ C “ — Эйлера константа, и

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x) \dots (k-1-x) dx \quad (5)$$

Из формулы (5) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \left[\frac{1}{2} C + \ln 2 \right] + \frac{1}{2} \ln n + \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2) \dots (2n+k-1)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln n + \left(\frac{1}{2} C + \ln 2 \right) + R_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$R_n = \frac{1}{24(n+1)(2n+1)} + R'_n.$$

$$\begin{aligned} R'_n &= \frac{1}{2n} \sum_{k=3}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(2n+1) \dots (2n+k-1)} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для A_k легко получаем оценку

$$A_k < \frac{1}{12} (k-1)! \quad (8)$$

Из (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} 0 < R'_n &< \frac{1}{24n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} = \\ &= \frac{1}{24n} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{12n(n^2-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (3), (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{4}{\pi^2} \ln(2n+1) + \frac{8}{\pi^2} \ln 2 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\ln v}{4v^2-1} + \\ &+ \frac{4}{\pi^2} C + \frac{2}{3\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{[v(2n+1)+1][2v(2n+1)+1][4v^2-1]} + \\ &+ \frac{16}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{R'_v(2n+1)}{4v^2-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\nu(2n+1)+1][2\nu(2n+1)+1]} &= \frac{2}{1+2\nu(2n+1)} - \frac{1}{1+\nu(2n+1)} = \\ &= \frac{2}{2\nu(2n+1)} \frac{1}{1+\frac{1}{2\nu(2n+1)}} - \frac{1}{\nu(2n+1)} \frac{1}{1+\nu(2n+1)} = \\ &= \left[-\frac{2}{[2\nu(2n+1)]^2} + \frac{1}{[\nu(2n+1)]^2} \right] + \left[\frac{2}{[2\nu(2n+1)]^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[\nu(2n+1)]^3} \right] + \dots = \frac{1}{2\nu^2(2n+1)^2} + R_n; \nu, \end{aligned}$$

где

$$R_n; \nu < \frac{3}{4} \frac{1}{\nu^3(2n+1)^3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{2}{3\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{[\nu(2n+1)+1][2\nu(2n+1)+1](4\nu^2-1)} &= \\ &= \left(\frac{2}{3\pi^2} - \frac{1}{18} \right) \frac{1}{(2n+1)^2} + R''_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R''_n < \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(2 - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Из (9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R'_{\nu(2n+1)}}{4\nu^2-1} &< \frac{4}{3\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(2n+1)[\nu^2(2n+1)^2-1](4\nu^2-1)} < \\ &< \frac{4,04}{3\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2(4\nu^2-1)} = \frac{4,04}{3\pi^2} \left(2 - \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{1}{(2n+1)^3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, из (10), (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{4}{\pi^2} \ln(2n+1) + \frac{4}{\pi^2} (C + 2 \ln 2) + \\ &+ \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\ln \nu}{4\nu^2-1} + \left(\frac{2}{3\pi^2} - \frac{1}{18} \right) \frac{1}{(2n+1)^2} + R'''_n, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$R'''_n < \frac{1}{\pi^2} \left(2 - \frac{\pi^2}{6} \right) \left[\frac{1}{2} + \frac{4,04}{3} \right] \frac{1}{(2n+1)^3} < \frac{0,1}{(2n+1)^3}.$$

Вычисляя значения констант, получим формулу, дающую возможность вычислить n при $n \geq 10$.

$$\begin{aligned} L_n &= 0,40526 \ln(2n+1) + 0,98818 + \\ &+ \frac{0,0120}{(2n+1)^2} + R'''_n. \end{aligned} \quad (13a)$$

§ 3. Для оценки остатка ряда Фурье используем неравенство Бернштейна

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leq (1 + L_n) E_n(f), \quad (14)$$

где $S_n(f; x)$ — n -сумма Фурье функции $f(x)$, $E_n(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами n порядка, L_n — константа Лебега.

Рассмотрим класс W_r 2π -периодических функций, имеющих почти всюду производную „ r “ порядка, удовлетворяющей там, где она существует, неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leq M.$$

Обозначим далее

$$H_n^{(r)} = \sup_{f \in W_r} E_n(f), \quad (15)$$

где верхняя грань распространена по всем функциям класса W_r .

Ахиезером и Крейном было доказано точное равенство

$$H_n^{(r)} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(n+1)^r} K_r M, \quad (16)$$

где

$$K_r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}. \quad (17)$$

Константы K_r легко вычисляются через числа Бернулли (B_n) и Эйлера (E_n)

$$\begin{aligned} K_{2n-1} &= \frac{(2^{2n} - 1)}{(2n)!} \pi^{2n} |B_{2n}|, \\ K_{2n} &= \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2} (2n)!} |E_{2n}|. \end{aligned} \quad (18)$$

В частности,

$$K_0 = \frac{\pi}{4}; \quad K_1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Таблица констант: $\frac{4}{\pi} K_r$

r	1	2	3	4	5
$\frac{4}{\pi} K_r$	1,5530	1,2324	1,2919	1,2683	1,2750
r	6	7	8	9	10
$\frac{4}{\pi} K_r$	1,2731	1,2735	1,2732	1,2732	1,2732

Беря в неравенстве (14) верхнюю грань по классу W_r , получаем, используя (16),

$$E_n(W_r) = \sup_{f \in W_r} |f(x) - S_n(f; x)| \leq (1 + L_n) H_n^{(r)}. \quad (19)$$

С другой стороны, имеем очевидное неравенство:

$$E_n(W_r) \geq H_n^{(r)}. \quad (20)$$

Таким образом, оценка (19) дает достаточно хороший результат при достаточно больших „ r “ и не очень больших „ n “.

Используя приведенные таблицы, легко найти верхнюю грань оценки (19) для $n \leq 10$.

Для больших значений „ n “ следует использовать асимптотическое выражение L_n , даваемое формулой (13а).

При больших „ n “ оценка (19) дает достаточную для практики точность.

Колмогоровым (4) было показано, что

$$E_n(W_r) \geq M \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (21)$$

Сравнивая (21) и (19) и принимая во внимание формулу (13), видим, что главные члены оценок сверху и снизу отмечаются лишь множителем $K_r \frac{4}{\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд — Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.
2. Ахиезер Н. И. — Лекции по теории аппроксимации. ОГИЗ, 1947.
3. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. — Таблицы интегралов и тед. ГТТИ, 1951.
4. Колмогоров А. Н. — Annals of Mathematics vol. 36, № 2, 1935.
5. Никольский С. М. — Приближение периодических функций многочленами. Труды института им. Стеклова, 1945.
6. Пинкевич Б. Т. — Изв. АН СССР. Сер. матем., IV, № 6, 1940.

А. Н. КОСТОВСКИЙ

„О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ РАСТВОРОМ НОЖЕК“

В геометрии циркуля доказывается, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно решить и одним циркулем, то есть проведением одних только окружностей. При этом без оговорок допускается, что циркулем можно описывать окружности любого радиуса, встречающиеся в построении.

Всякая задача на построение циркулем и линейкой, всегда сводится к выполнению в определенном порядке следующих пяти основных операций:

I. Через две точки провести прямую или на данной прямой указать одну или несколько точек.

II. Около данной точки описать окружность данного радиуса, или на окружности, заданной центром и радиусом, указать одну или несколько точек.

III. Найти точку пересечения двух данных прямых.

IV. Найти точки пересечения данной прямой и данной окружности.

V. Найти точки пересечения двух данных окружностей.

Для того, чтобы доказать, что все задачи на построение, разрешимые с помощью циркуля и линейки, можно решить некоторым данным инструментом (или группой инструментов), достаточно показать, что все основные операции, приведенные выше, можно выполнить данным инструментом (или группой инструментов).

Цель настоящей работы — показать, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно решить и одним циркулем, имеющим ограниченный раствор ножек.

В частности, можно выполнить и все 5 вышеперечисленных операций.

Правда, нельзя одним циркулем начертить непрерывную прямую, заданную двумя точками, а также начертить окружность, если радиус последней окажется больше R [R — максимальный раствор ножек циркуля], но мы, как это будет видно ниже, сможем построить на прямой и окружности любое количество точек, причем как угодно плотно.

На рисунках мы будем проводить пунктирные прямые линии, для наглядности, это будут воображаемые прямые, а не действительно начерченные.

Условимся в дальнейшем фразу: „Из точки A , как из центра, радиусом BC описываем окружность (или дугу)“ — заменять следующей: „Строим (A, BC) “ или „Описываем (A, BC) “.

Для выполнения основных операций одним циркулем необходимо рассмотреть ряд задач. Рассмотрим только те задачи, которые необ-

ходимы для выполнения поставленной задачи. Заметим, что при изложении мы будем пользоваться методом инверсии.

ЗАДАЧА 1. Построить отрезок в „ n “ раз больше данного отрезка AB .

Строим окружность (B, AB) и откладываем хорды $AC = CD = DE = AB$. Точка E диаметрально противоположна точке A окружности (B, AB) , поэтому $AE = 2AB$. Аналогично строим точку H , получим $AH = 3AB$, и т. д. (Рис. 1).

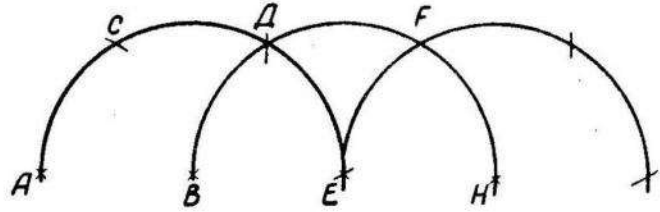


Рис. 1.

ЗАДАЧА 2. Разделить отрезок AB на 2^n равных частей ($n = 1, 2, \dots$) или построить отрезок $BX = \frac{AB}{2^n}$.

а) Строим $AC = 2AB$ (см. задачу 1) и описываем (C, AC) (рис. 2). В пересечении с (A, AB) получим точки D_1 и D'_1 . Описываем (D_1, AB) и (D'_1, AB) , получим в пересечении X_1 , которая является серединой отрезка AB .

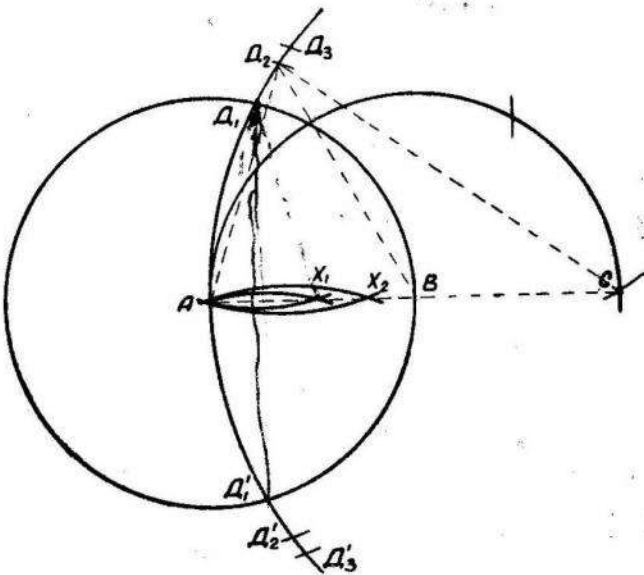


Рис. 2.

$$BX_1 = \frac{AB}{2}.$$

Строим дальше $AD_2 = AD'_2 = BD_1$; окружности (D_2, BD_1) и (D'_2, BD_1) пересекутся в точке X_2 , лежащей на середине отрезка BX_1 .

$$BX_2 = \frac{AB}{2^2}.$$

Если затем построить $AD_3 = AD'_3 = BD_2$, то окружности (D_3, BD_2) и (D'_3, BD_2) пересекутся в точке X_3 , причем

$$BX_3 = \frac{AB}{2^3}, \quad \text{и т. д.}$$

Действительно, $\triangle AD_1C \sim \triangle AD_1X_1$, поэтому $\frac{AD_1}{AC} = \frac{AX_1}{AD_1}$. Положив $AB = AD_1 = a$, получим: $AX_1 = \frac{1}{2} AB = BX_1$.

Положим $AD_n = m_n$, где $(n = 1, 2, 3, \dots)$ и $AB = a$. Точка B — является серединой отрезка AC , поэтому

$$2 \overline{BD_1^2} + 2 \overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{AD_1^2},$$

$$2 m_1^2 + 2 a^2 = 4 a^2 + a^2, \quad m_1^2 = \frac{1+2}{2} a^2.$$

Треугольники (AX_2D_2) и (ACD_2) подобны, поэтому

$$AX_2 : AD_2 = AD_2 : AC; \quad AD_2^2 = BD_1^2 = \frac{1+2}{2} a^2,$$

но $AC = 2a$, следовательно,

$$AX_2 = \frac{3}{4} a \text{ и } BX_2 = \frac{1}{4} a = \frac{AB}{2^2}.$$

Аналогично найдем:

$$m_2^2 = \frac{1+2+2^2}{2^2} a^2 \text{ и } BX_3 = \frac{AB}{2^3} \text{ и т. д.}$$

$$m_n^2 = \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{2^n} a^2 \text{ и } BX_n = \frac{AB}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^2 &= a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{2^n} = \\ &= a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2a^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$AD_n = m_n < \sqrt{2} a. \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Очевидно после этого, что построение а) можно выполнить циркулем при условии $AB \leq \frac{1}{2} R$.

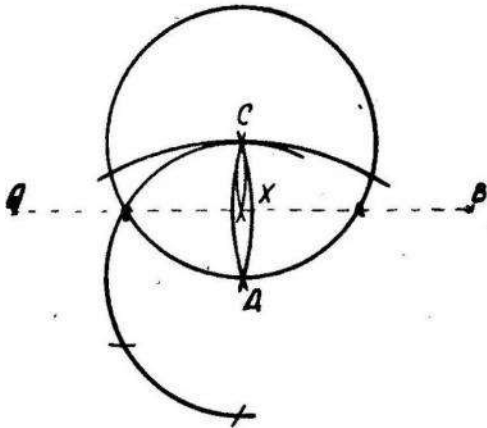


Рис. 3

б) Пусть теперь данный отрезок $AB < 2R$. Подбираем радиус d и строим окружности (A, d) и (B, d) так, чтобы расстояние между точками пересечения этих окружностей C и D было меньше $\frac{1}{2} R$, $CD \leq \frac{1}{2} R$ (рис. 3). Делим отрезок CD пополам (см. случай а), получим точку X . Точка X делит отрезок AB пополам. Случай, когда $AB \geq 2R$, будет рассмотрен в задаче 4.

ЗАДАЧА 3. Первая основная операция. На данной прямой, заданной точками A и B , указать одну или несколько точек.

а) Строим (A, b) и (B, c) , где b и c — произвольные отрезки. В пересечении окружностей получим две точки C и D симметричные относительно данной прямой. Произвольным радиусом d описываем (C, d) и (D, d) , в пересечении получим искомые точки X и Y , лежащие на данной прямой.

Изменяя величину радиуса d и положения точек C и D , можно на данной прямой построить любое количество точек.

Очевидно, что это построение возможно выполнить при условии: $AB < 2R$.

б) Если отрезок $AB \geq 2R$, то построение производится следующим образом:

Строим (B, R) и (A, d) , где $d \leq R$ (рис. 4). Берем на дуге (A, d) точку C так, чтобы она лежала „приблизительно“ на прямой AB . Строим отрезок $AD = m \cdot AC$, причём m берем таким, чтобы точка D находилась в круге (B, R) . Изменяя положение точки C на дуге (A, d) , а если нужно, то и радиус d , всегда можно добиться того, что точка D будет лежать в круге (B, R) *.

Пусть $AC = E_1D = \frac{AD}{m}$. Возьмем число

n целое, такое, что $2^{n-1} < m \leq 2^n$. На отрезке DB строим отрезок $DF = \frac{1}{2^n} DB$ (см.

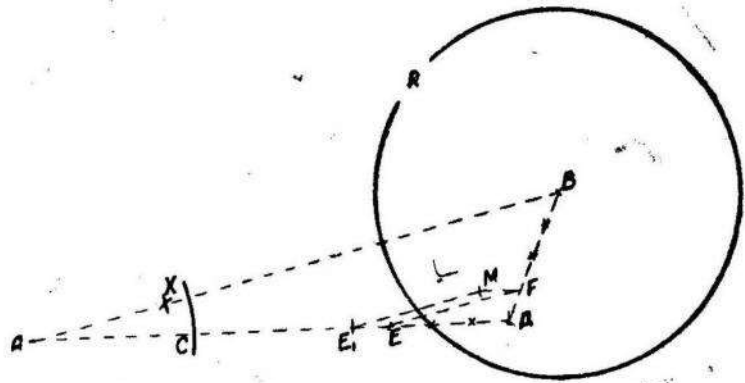


Рис. 4.

задачу 2). Делим отрезок DE_1 на 2^n равных частей (см. задачу 2) и берем $DE = \frac{m}{2^n} DE_1$.

Строим (E_1, EF) и (F, EE_1) , получим точку M . Фигура ME_1EF — параллелограмм. Описываем (A, E_1M) и (C, DM) , получим точку X . Точка X лежит на прямой AB .

Действительно,

$$\frac{AD}{CE} = \frac{m \cdot AC}{\frac{m}{2^n} \cdot AC} = 2^n, \quad \frac{BD}{DF} = 2^n, \text{ поэтому } \triangle ADB \sim \triangle DEF.$$

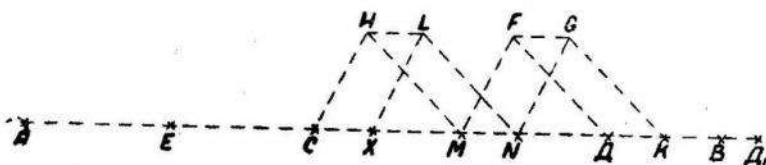


Рис. 5.

Следовательно, $\angle DEF = \angle DAB$, но $E_1M \parallel EF$, отсюда $\angle DE_1M = \angle DAB$. Точка X лежит на прямой AB .

Дальнейшее построение точек сводится к предыдущему случаю а).

Если $m = 2^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), то построение упрощается, точка E совпадает с точкой E_1 и деление отрезка E_1D отпадает; точка M совпадает с точкой F и параллелограмм EE_1MF преобразуется в прямую E_1F . Поэтому, изменяя величину радиуса d , следует добиться того, чтобы $m = 2^n$.

§ ЗАДАЧА 4. Разделить отрезок $AB \geq 2R$ на две равные части. Строим точку E на прямой AB (см. задачу 3). $AE \leq R$ (рис. 5). Строим отрезок $AD = m \cdot AE$ (см. задачу 1). Число m взято так, чтобы $AD \leq$

* Вместо окружности (B, R) лучше брать окружность $(B, \frac{1}{2}R)$ и $AC \leq \frac{1}{2}R$, тогда при делении отрезка BD и DE_1 на 2^n равных частей не придется применять случай б) задачи 2.

носителю окружности инверсии (O, k) , где $k \leq R$. Требуется на прямой OA построить точку A_1 так, чтобы $OA_1 \cdot OA = k^2$.

а) Строим (A, OA) (рис. 7), в пересечении с окружностью инверсии (O, k) получим точки B и C . Описываем (B, k) и (C, k) , получим A_1 . Точка A_1 — искомая.

Действительно, $\triangle AOB \sim \triangle OBA_1$, поэтому $\frac{BO}{AO} = \frac{A_1O}{BO}$,

$$\overline{AO} \cdot \overline{A_1O} = \overline{BO}^2 = k^2.$$

Построение возможно, если $\frac{k}{2} < OA \leq R$.

б) Если $OA \leq \frac{k}{2}$, то строим $OA_1 = m \cdot OA > \frac{1}{2} \cdot k$. Строим точку A'_1 , инверсную точке A_1 (см. случай а). Строим отрезок $OA_2 = m \cdot OA'_1$. Точка A_2 — искомая.

Действительно, $\overline{OA_2} = m \cdot \overline{OA'_1} = m \cdot \frac{k^2}{\overline{OA_1}} = m \frac{k^2}{m \cdot OA} = \frac{k^2}{OA}$.

в) Пусть теперь $OA > R$. Строим отрезок $OA_1 = \frac{1}{2^n} OA$ (см. задачу 4) так, чтобы $OA_1 < R$. Находим точку A , инверсную точке A_1 (случай а). Строим отрезок $OA_2 = \frac{1}{2^n} OA$ (см. задачу 2). Точка A_2 инверсная точке A относительно окружности инверсии (O, k) .

Действительно, $\overline{OA_1} \cdot \overline{OA} = k^2$ или

$$2^n \cdot \overline{OA_2} \cdot \frac{\overline{OA}}{2^n} = \overline{OA} \cdot \overline{OA_2} = k^2.$$

ЗАДАЧА 7. Построить точку C , симметричную данной точке C_1 , относительно данной прямой AB .

а) Описывая (A, AC) и (B, BC) , в пересечении получим искомую точку C_1 .

Построение возможно, если $AC \leq R$ и $BC \leq R$.

б) Пусть теперь $AC > R$ и $BC > R$ или пусть имеет место одно из неравенств.

Находим на данной прямой точки A и B (рис. 8), расстояние между которыми меньше $2R$ (см. задачу 3). Берем в плоскости произвольно точку F , $(CF \leq R)$ и строим отрезок $CD = m \cdot CF$ (см. задачу 1). При этом m и точку F выбираем так, чтобы $AD \leq R$, $AE \leq R$, $BD \leq R$ и $BE \leq R$, где E — точка на прямой CF и $CE = (m-1)CF$.

Строим точку D_1 , симметричную точке D , и точку E_1 , симметричную точке E относительно прямой AB . Строим отрезок $D_1C_1 = m D_1E_1$. Точка C_1 — искомая. Справедливость построения очевидна из симметрии фигуры построения относительно данной прямой.

ЗАДАЧА 8. Построить окружность, инверсную данной прямой AB относительно окружности инверсии (O, k) , где $k \leq R$.

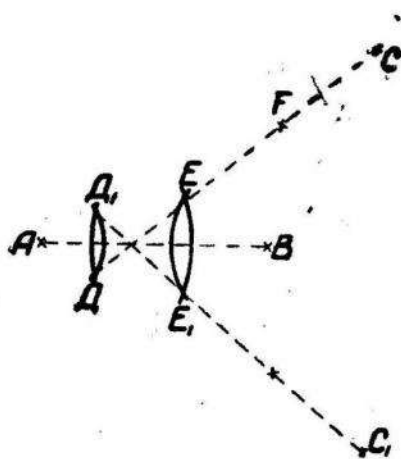


Рис. 8.

раллелограмм. Строим четвертый пропорциональный отрезок d к отрезкам DE , DD_1 и CE (см. задачу 9). Описываем (D, d) и (D_1, d) , получим искомую точку X пересечения данных прямых.

Действительно, точка E лежит на прямой DD_1 , $\triangle CDE \sim \triangle DD_1X$, поэтому $\overline{DE} : \overline{DD_1} = \overline{CE} : \overline{D_1X}$.

Построение возможно, если все окружности, описываемые в этом построении, будут иметь радиус, меньший R , но последнее условие всегда можно сделать, подобрав для этого точки A и B , C и D , которыми задаются данные прямые (см. задачу 3).

б) Берем вблизи данных прямых окружность инверсии (O, k) , $k \leq R$, которая не пересекает данных прямых. Строим окружности, инверсные данным прямым (см. задачу 8); пусть они пересекаются в точке E . Находим точку X , инверсную точке E относительно окружности инверсии (O, k) . Точка X — искомая точка пересечения данных прямых.

Действительно, точка E — является точкой пересечения окружностей, инверсных данным прямым, следовательно, точка X , как точка инверсная точке E , есть точка пересечения данных прямых.

ЗАДАЧА 11: Построить центр окружности, проходящей через три заданные точки A , B и C .

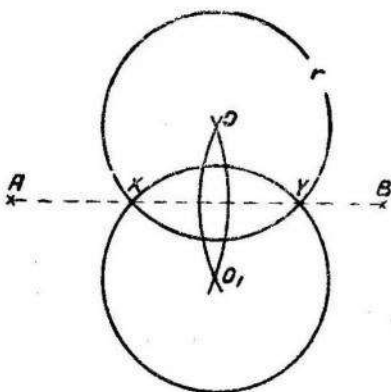


Рис. 13.

окружности инверсной прямой BE (см. задачу 8). Точка O — центр искомой окружности, проходящей через три данные точки A , B и C .

Справедливость построения легко доказывается при помощи основных свойств инверсии.

ЗАДАЧА 12. Построить окружность, инверсную данной окружности (O', r) относительно окружности инверсии (O, k) .

а) Берем на данной окружности произвольно три точки A , B и C (см. задачу 5). Находим точки A_1 , B_1 и C_1 , инверсные точкам A , B ,

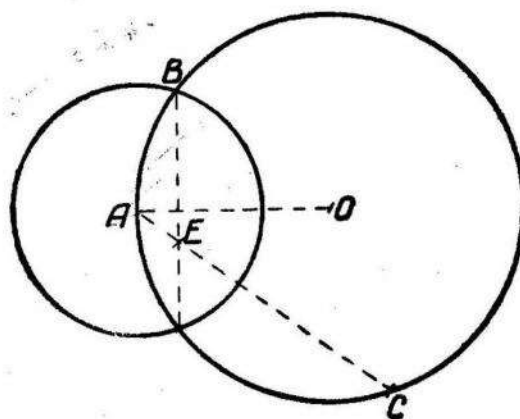


Рис. 12.

а) Находим точку O пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам отрезков AB и BC (см. задачу 10).

Если $AB \geq 2R$, то делим отрезок на 2^n равных частей (см. задачу 2 и 4), $\frac{1}{2^n} \overline{AB} < R$;

берем два средних отрезка, например, DE и EH , восстанавливаем перпендикуляр к середине отрезка DN .

б) Если окажется, например, $AB \leq R$, то центр окружности можно найти следующим образом:

Берем (A, AB) за окружность инверсии и строим точку E , инверсную точке C (см. задачу 6), (рис. 12). Находим центр O

С относительно окружности инверсии (O, k) (см. задачу 6). Находим центр окружности, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1 (см. задачу 10). Построенная окружность является искомой окружностью.

б) Если радиус данной окружности меньше R , то построение можно выполнить следующим образом:

Берем данную окружность (O', r) за окружность инверсии и строим точку D , инверсную точке O (см. задачу 6). Находим точку O_1 , инверсную точке D , но уже относительно окружности инверсии (O, k) (рис. 14). Точка O_1 — центр искомой окружности. Строим точку A_1 , инверсную точке A , относительно окружности инверсии (O, k) . O_1A_1 — радиус искомой окружности.

Действительно, если OE — общая касательная окружности данной и окружности ей инверсной, и $DE \perp OO'$, то

$$\triangle OO_1E_1 \sim \triangle ODE, \text{ а } \triangle OO'E \sim \triangle DEO'.$$

Отсюда следует:

$$\frac{OO_1}{OE_1} = \frac{OE}{OD} \text{ и } \frac{OO'}{EO'} = \frac{EO'}{DO'} \text{ или } \overline{OO_1} \cdot \overline{OD} = \overline{OE} \cdot \overline{OE_1} = k^2,$$

так как точка E_1 инверсна точке E относительно окружности (O, k) . $\overline{OO'} \cdot \overline{DO'} = (\overline{EO'})^2 = r^2$, то есть точка O_1 (центр искомой окружности) инверсна точке D относительно окружности инверсии (O, k) , а точка D инверсна точке O относительно окружности (O, r) .

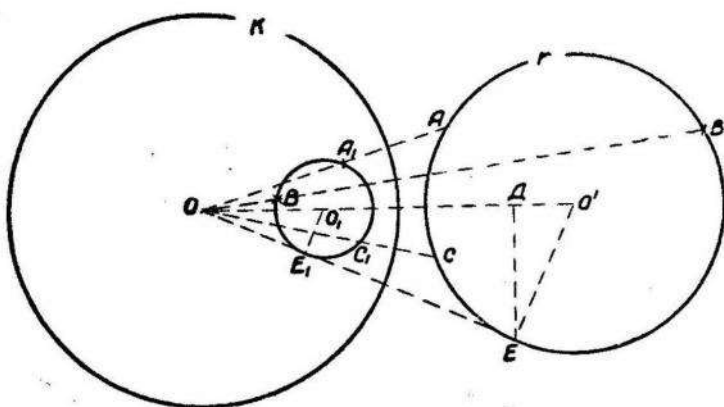


Рис. 14.

ЗАДАЧА 13. Четвертая основная операция. Найти точку пересечения данной прямой AB и данной окружности (O, r) .

а) Строим точку O_1 , симметричную точке O , относительно прямой AB (см. задачу 7). Описываем (O_1, r) , в пересечении с данной окружностью получим искомые точки X и Y (рис. 13).

Построение возможно, если $r \leq R$ и

прямая не проходит через центр данной окружности.

б) Пусть теперь $r > R$ или прямая проходит через центр окружности. Берем (O, k) , $k \leq R$ за окружность инверсии и находим окружности, инверсные данной прямой и данной окружности (см. задачи 8 и 12). Пусть построенные окружности пересекаются в точках X_1, Y_1 . Находим точки X и Y , инверсные точкам X_1 и Y_1 относительно окружности инверсии (O, k) . Точки X и Y являются искомыми точками пересечения данной прямой и данной окружности.

Справедливость последнего построения легко доказать при помощи основных свойств инверсии.

ЗАДАЧА 14. Пятая основная операция. Найти точки пересечения двух данных окружностей (O, OA) и (O_1, O_1B) .

а) Если $OA \leq R$ и $O_1B \leq R$, то задача циркулем выполняется непосредственно.

б) Пусть, например, $OA \leq R$, а $O_1B > R$. Берем (O, OA) за окружность инверсии и строим окружность (O_2, O_2O) , инверсную окружности (O_1, O_1B) . В пересечении окружностей (O, OA) и (O_2, O_2C) получим искомые точки X и Y .

Действительно, окружность (O, OA) сама себе инверсна.

в) Пусть $OA > R$ и $O_1B > R$. Берем (O, k) , $k \leq R$ за окружность инверсии и строим окружности, инверсные данным (см. задачу 12), в пересечении последних получим точки X_1 и Y_1 . Находим точки X и Y , инверсные точкам X_1 и Y_1 , относительно окружности инверсии (O, k) . Точки X и Y — искомые точки пересечения данных окружностей. Справедливость построения легко доказать при помощи основных свойств инверсии.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующий вывод.

Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, сводятся к выполнению пяти основных операций, расположенных в определенном порядке.

Все основные операции можно выполнить одним циркулем с ограниченным раствором ножек, поэтому *все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно точно построить и одним циркулем с ограниченным раствором ножек.*

И. А. ПРУСОВ

ВЛИЯНИЕ ПРУЖИНЫ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

В данной задаче рассматривается влияние жесткости пружины, вставленной между канатом и концевым грузом, на динамические напряжения в канате постоянного поперечного сечения в том случае, когда концевому грузу, висящему на канате и пружине, внезапно сообщена скорость v_0 . Весом пружины и упругостью подъемного сосуда пренебрегается.

Разделяя перемещение на динамическую и статическую часть, из дифференциального уравнения продольных колебаний каната для динамических перемещений имеем волновое уравнение [1]

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Явное выражение для $U(x, t)$ найдем, подчинив решение уравнения (1), взятое в произвольных функциях, следующим начальным и граничным условиям:

$$U(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

$$U_1(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (l \leq x \leq l + a) \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t}|_{x=l+a} = v_0 \quad (4); \quad U(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2}|_{x=l+a} + ka \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x}|_{x=l+a} = 0 \quad (6)$$

$$E_k \omega_{ж} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}|_{x=l} = ka \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial x}|_{x=l} \quad (7)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}|_{x=l} = \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t}|_{x=l}, \quad (8)$$

где

$U(x, t)$ — динамическая часть перемещения вдоль оси Ox поперечного сечения каната в сечении x ,

$U_1(x, t)$ — динамическая часть перемещения в сечении x пружины;



Рис. 1.

Q — вес концевого груза;
 p — вес каната;
 g — ускорение силы тяжести

$$c^2 = \frac{E_k \omega_{ж} g}{q} = \frac{E_k}{\rho_k};$$

E_k — модуль упругости каната;
 ρ_k — плотность единицы длины каната;
 q — вес единицы длины каната;
 $\omega_{ж}$ — площадь сечения всех проволок каната;
 l — длина каната;
 k — жесткость пружины;
 a — длина пружины.

Как известно [1] функция перемещения любого поперечного сечения каната, находящегося на расстоянии x от его закрепленного конца, удовлетворяющая уравнению (1) и граничному условию (5), выражается через одну произвольную функцию и имеет вид

$$U(x, t) = f(ct - x) - f(ct + x). \quad (9)$$

Перемещение в сечении x пружины можно представить в виде суммы, составленной из перемещения нижнего конца каната и удлинения пружины на участке $x - l$, то есть

$$U_1(x, t) = f(ct - l) - f(ct + l) + \frac{x - l}{ak} S(t), \quad (10)$$

где $S(t)$ — сила, растягивающая пружину и действующая на нее со стороны концевого груза.

Подставив в граничные условия (6) и (7) значения перемещений из (9) и (10) и затем исключив $S(t)$, получим основное уравнение

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = -rmlf'''(z - 2l) + \\ + mlf''(z - 2l) - f'(z - 2l), \quad (11)$$

в котором введены обозначения

$$f(z) = f(ct + l), \quad f(z - 2l) = f(ct - l), \quad r = \frac{E_k \omega_{ж}}{k}, \quad m = \frac{Q}{p}. \quad (12)$$

Из уравнений (2) и (9), принимая во внимание обозначения (12), найдем

$$f'(z) = 0 \quad (-l \leq z \leq l). \quad (13)$$

Условия (3) и (8), как легко видеть, выполняются.

Уравнение (11) дает возможность определить значение функции $f_l(z)$ в любом последующем интервале изменения ее аргумента z , если известно ее значение в предыдущем интервале. Для определения $f(z)$ в интервале $l \leq z \leq 3l$, учитывая, что на основании (13) $f'(z - 2l) = 0$, имеем дифференциальное уравнение

$$rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = 0. \quad (14)$$

Решение этого уравнения берем в виде*

$$f'(z) = A_2 e^{\lambda_1(z-l)} + B_1 e^{\lambda_2(z-l)}, \quad (15)$$

где $\lambda_1 = -\frac{1-x}{2r}$ и $\lambda_2 = -\frac{1+x}{2r}$ — корни характеристического уравнения

$$rml\lambda^2 + ml\lambda + 1 = 0 \quad (16)$$

$$x = + \sqrt{1 - \frac{4r}{ml}},$$

принимающие для реальных шахтных канатов и практически возможных пружин действительные значения. Произвольные постоянные A_1 и B_1 определим из условий

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l+a} = v_0, \quad \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l+a}^{t=+0} = 0, \quad (17)$$

выражающих, что в начальный момент времени скорость концевого груза равна v_0 , а его ускорение равно нулю. Из этих условий, принимая во внимание, что на основании (9), (7) и (10)

$$U_1(x, t) = f(ct-l) - f(ct+l) - \frac{x-l}{a} r [f'(ct-l) + f'(ct+l)], \quad (18)$$

получим:

$$f'(-l+0) - f'(l+0) - r[f''(-l+0) + f''(l+0)] = \frac{v_0}{c},$$

$$f''(-l+0) - f''(l+0) - r[f'''(-l+0) + f'''(l+0)] = 0.$$

Так как из (13) и (15) следует, что

$$f'(-l+0) = f''(-l+0) = f'''(-l+0) = 0,$$

$$f'(l+0) = A_1 + B_1, \quad f''(l+0) = A_1\lambda_1 + B_1\lambda_2, \quad f'''(l+0) = A_1\lambda_1^2 + B_1\lambda_2^2, \quad (19)$$

то для определения A_1 и B_1 имеем систему уравнений

$$A_1(r\lambda_1 + 1) + B_1(r\lambda_2 + 1) = -\frac{v_0}{c},$$

$$A_1(r\lambda_1 + 1)\lambda_1 + B_1(r\lambda_2 + 1)\lambda_2 = 0,$$

из которой найдем

$$A_1 = -\frac{v_0}{cx}, \quad B_1 = \frac{v_0}{cx}. \quad (20)$$

Таким образом, для аргумента z , изменяющегося в интервале $l \leq z \leq 3l$,

$$f'(z) = \frac{v_0}{cx} \left[-e^{\lambda_1(z-l)} + e^{\lambda_2(z-l)} \right]. \quad (21)$$

* Так как мы ставим своей целью определение напряжений, зависящих от $f'(z)$ и не интересуемся перемещениями, то все уравнения, получающиеся из основного, будем интегрировать, находя $f'(z)$.

Для функции $f'(z)$, определяемой в интервале $3l \leq z \leq 5l$ из основного уравнения (11) и соотношения (21), имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = \\ = -\frac{v_0}{cx} \left[-rml\lambda_1^2 + ml\lambda_1 - 1 \right] e^{\lambda_1(z-3l)} + \\ + \frac{v_0}{cx} \left[-rml\lambda_2^2 + ml\lambda_2 - 1 \right] e^{\lambda_2(z-3l)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (16), из последнего уравнения получим:

$$\begin{aligned} rmlf'''(z) + mlf''(z) + f'(z) = -\frac{2v_0ml\lambda_1}{cx} e^{\lambda_1(z-3l)} + \\ + \frac{2v_0ml\lambda_2}{cx} e^{\lambda_2(z-3l)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение этого уравнения ищем в виде:

$$\begin{aligned} f'(z) = A_1 e^{\lambda_1(z-l)} + [a_1(z-3l) + a_2] e^{\lambda_1(z-3l)} + \\ + B_1 e^{\lambda_2(z-l)} + [b_1(z-3l) + b_2] e^{\lambda_2(z-3l)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Требуя, чтобы оно удовлетворяло уравнению (22), найдем:

$$a_1 = -\frac{2v_0\lambda_1}{cx^2}, \quad b_1 = -\frac{2v_0\lambda_2}{cx^2}. \quad (24)$$

Произвольные постоянные a_2 и b_2 определим из уравнений

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}-0 \\ x=l+a}} = \left. \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}+0 \\ x=l+a}}, \\ \left. \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} \right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}-0 \\ x=l+a}} = \left. \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} \right|_{\substack{t=\frac{2l}{c}+0 \\ x=l+a}}, \end{aligned} \quad (25)$$

физически выражающих условия непрерывности скорости и ускорения конечного груза Q в момент времени $t = \frac{2l}{c}$.

Подставив в уравнения (25) значение U_1 из (18), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} f'(l+0) - f'(3l+0) - r[f''(l+0) + f''(3l+0)] = \\ = f'(l-0) - f'(3l-0) - r[f''(l-0) + f''(3l-0)], \\ f''(l+0) - f''(3l+0) - r[f'''(l+0) + f'''(3l+0)] = \\ = f''(l-0) - f''(3l-0) - r[f'''(l-0) + f'''(3l-0)], \end{aligned} \quad (26)$$

из которой после подстановки соответствующих значений производных функции $f(z)$ из соотношений (13), (21) и (23) найдем:

$$a_2 = A_1 \left(\frac{2}{\kappa^2} - 1 \right), \quad b_2 = -A_1 \left(\frac{2}{\kappa^2} - 1 \right). \quad (27)$$

Таким образом, функция $f'(z)$ для аргумента z , изменяющегося в интервале $3l \leq z \leq 5l$, найдена. Ее значение может быть использовано для определения функции $f'(z)$ в следующем интервале и т. д.

При этом всякий раз при определении произвольных постоянных интегрирования следует исходить из условия непрерывности скорости и ускорения концевого груза. Так, например, для отыскания функции $f'(z)$ в интервале $(2n-1)l \leq z \leq (2n+1)l$ эти условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{2ln}{c}} - 0 &= \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=\frac{2ln}{c}} + 0, \quad \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=\frac{2ln}{c}} - 0 = \\ &= \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=\frac{2ln}{c}} + 0 \\ &(n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Поступая таким образом, для z , изменяющегося в интервале $5l \leq z \leq 7l$, найдем:

$$\begin{aligned} f'(z) &= A_1 e^{\lambda_1(z-l)} + [a_1(z-3l) + a_2] e^{\lambda_1(z-3l)} + \\ &+ [a_3(z-5l)^2 + a_4(z-5l) + a_5] e^{\lambda_1(z-5l)} + B_1 e^{\lambda_2(z-l)} + \\ &+ [b_1(z-3l) + b_2] e^{\lambda_2(z-3l)} + [b_3(z-5l)^2 + \\ &+ b_4(z-5l) + b_5] e^{\lambda_2(z-5l)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2\lambda_1^2}{\kappa^2} A_1, \quad b_3 = \frac{2\lambda_2^2}{\kappa^2} B_1, \quad a_4 = \frac{2\lambda_1(3-2\kappa)(1+\kappa)}{\kappa^3} A_1, \\ b_4 &= -\frac{2\lambda_2(3+2\kappa)(1-\kappa)}{\kappa^3} B_1, \quad a_5 = (\kappa^4 - 6\kappa^2 + 6) \frac{A_1}{\kappa^4}, \quad b_5 = \\ &= (\kappa^4 - 6\kappa^2 + 6) \frac{B_1}{\kappa^4}. \end{aligned} \quad (29)$$

Как известно, напряжения через перемещения выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = E_k \frac{\partial U}{\partial x} = -E_k [f'(ct-x) + f'(ct+x)]. \quad (30)$$

Так, для верхнего конца каната, принимая во внимание (13), (21), (23), (24), (28) и (29), получим следующие выражения для динамических напряжений.

$$\sigma_0^{(din)} = 0 \quad (0 \leq ct \leq l);$$

$$\sigma_0^{(din)} = \frac{2E_k v_0}{c\kappa} [e^{\lambda_1(ct-l)} - e^{\lambda_2(ct-l)}] \quad (l \leq ct \leq 3l);$$

$$\sigma_0^{(din)} = \frac{2E_k v_0}{c\kappa} \left\{ e^{\lambda_1(ct-l)} + \left[\frac{2\lambda_1}{\kappa} (ct-3l) + \frac{2}{\kappa^2} - 1 \right] e^{\lambda_1(ct-3l)} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2E_k v_0}{c\kappa} \left\{ e^{\lambda_2(ct-l)} + \left[-\frac{2\lambda_2}{\kappa}(ct-3l) + \frac{2}{\kappa^2} - 1 \right] e^{\lambda_2(ct-3l)} \right\} (3l \leq ct \leq 5l); \\
\sigma_0^{(din)} = & \frac{2E_k v_0}{c\kappa} \left\{ e^{\lambda_1(ct-l)} + \left[\frac{2\lambda_1}{\kappa}(ct-3l) + \frac{2}{\kappa^2} - 1 \right] e^{\lambda_1(ct-3l)} + \right. \\
& + \left[\frac{2\lambda_1^2}{\kappa^2}(ct-5l)^2 + \frac{2(1+\kappa)(3-2\kappa)}{\kappa^3} \lambda_1(ct-5l) + 1 + \right. \\
& + \left. \left. \frac{6(1-\kappa^2)}{\kappa^4} \right] e^{\lambda_1(ct-5l)} \right\} - \frac{2E_k v_0}{c\kappa} \left\{ e^{\lambda_2(ct-l)} + \left[-\frac{2\lambda_2}{\kappa}(ct-3l) + \frac{2}{\kappa^2} - 1 \right] e^{\lambda_2(ct-3l)} + \right. \\
& + \left[\frac{2\lambda_2^2}{\kappa^2}(ct-5l)^2 - \frac{2(1-\kappa)(3+2\kappa)}{\kappa^3} \lambda_2(ct-5l) + 1 + \frac{6(1-\kappa^2)}{\kappa^4} \right] e^{\lambda_2(ct-5l)} \left. \right\} \\
& (5l \leq ct \leq 7l).
\end{aligned}$$

Эти формулы можно представить в более удобной для расчетов форме, если, как это следует из соотношений

$$\lambda_1 = -\frac{1-\kappa}{2r}, \quad \lambda_2 = -\frac{1+\kappa}{2r}, \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{4r}{ml}}, \quad \alpha = \frac{1}{m},$$

принять во внимание, что

$$\lambda_1 l = -\frac{2\alpha}{1+\kappa}, \quad \lambda_2 l = -\frac{2\alpha}{1-\kappa}.$$

Из выражения для корней характеристического уравнения легко видеть, что, если $r = \frac{E_k \omega_{ж}}{k}$ — отношение жесткости каната к жесткости пружины весьма мало или равно нулю (в этом случае пружину можно считать абсолютно жесткой), то

$$\lambda_1 = \frac{-1+\kappa}{2r} \approx \frac{-1 + \left(1 - \frac{2r}{ml}\right)}{2r} = -\frac{1}{ml} = \lambda.$$

Корень $\lambda_2 \approx -\frac{1}{r} + ml$ стремится к минус бесконечности при r , стремящемся к нулю. Следовательно, приведенные выше формулы для динамических напряжений при $\kappa \rightarrow 1$ тождественно совпадают с соответствующими формулами [1], когда между канатом и концевым грузом пружина отсутствует.

Для заданного веса концевого груза Q и заданных характеристик каната (E_k , $\omega_{ж}$, q), если пружина работает на сжатие и полностью сжимается на L см от статически приложенного груза, в n раз большего веса концевого груза, как это следует из введенных выше обозначений, величину κ можно записать в виде:

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{4E_k \omega_{ж} q}{Q^2} \cdot \frac{L}{n}}.$$

Например, для каната с данными

$$E_k = 1,21 \cdot 10^6 \frac{\kappa\text{г}}{\text{см}^2}, \quad \omega_{ж} = 2,29 \text{ см}^2, \quad q = 2,08 \frac{\kappa\text{г}}{\text{м}}, \quad Q = 3300 \text{ кг}.$$

$$\kappa = \sqrt{1 - 0,0212 \frac{L}{n}}$$

и при $n=4$, $L \leq 68$ см κ изменяется в пределах $0,8 \leq \kappa \leq 1$.

Из приведенной таблицы, составленной для $\kappa=0,9$ и различных значений отношения веса каната к весу концевого груза, следует:

1. Влияние жесткости пружины на максимальные динамические напряжения в канате тем большее, чем меньше отношение веса каната к весу концевого груза, т. е. чем короче длина каната;

2. Применением пружины можно значительно понизить максимальные динамические напряжения в канатах (особенно в коротких), возникающие из-за внезапного сообщения скорости концевому грузу.

Значения $\eta = \frac{\sigma_0^{(din)}}{E_k \frac{v_0}{c}}$ для различных значений $\alpha = \frac{P}{Q}$ ($\kappa = 0,9$)

$\frac{ct}{l}$ \ $\alpha = \frac{P}{Q}$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,5
1—0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1+0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,5	1,291	1,699	1,787	1,693	1,614	1,459	1,312	1,182	1,064	1,009
2,0	1,699	1,760	1,614	1,312	1,182	0,957	0,776	0,628	0,509	0,458
2,5	1,787	1,614	1,384	1,009	0,862	0,628	0,458	0,334	0,244	0,208
3—0	1,760	1,459	1,182	0,776	0,628	0,412	0,271	0,178	0,112	0,095
3+0	1,760	1,459	1,182	0,776	0,628	0,412	0,271	0,178	0,112	—0,095
3,5	1,527	2,005	2,221	1,918	1,620	1,034	0,553	0,172	—0,122	—0,245
4,0	2,308	2,553	2,024	0,849	0,411	—0,207	—0,580	—0,791	—0,893	—0,915
4,5	2,759	2,299	1,306	0,065	—0,305	—0,724	—0,878	—0,889	—0,826	—0,781
5—0	2,840	1,721	0,706	—0,404	—0,663	—0,861	—0,836	—0,722	—0,588	—0,520
5+0	2,840	1,721	0,706	—0,404	—0,663	—0,861	—0,836	—0,722	—0,588	—0,520
5,5	2,462	0,879	0,487	0,430	0,281	—0,161	—0,537	—0,791	—0,952	—0,980
6,0	2,099	1,673	0,996	—0,636	—1,096	—1,455	—1,374	—1,114	—0,805	—0,626
6,5	2,446	1,605	0,061	—1,475	—1,608	—1,352	—0,819	—0,305	0,046	0,274
7—0	2,762	0,905	—0,781	—1,641	—1,455	—0,779	—0,117	0,341	0,594	0,669
η_{max}	3,074	2,553	2,340	2,009	1,888	1,788	1,788	1,788	1,788	1,788
$\frac{ct}{l}$	5,133	4,000	3,650	3,400	3,320	1,200	1,160	1,133	1,114	1,107
↓	41	31	32	36	38	34	27	22	19	17

$$\frac{\eta_{max/\kappa=1} - \eta_{max/\kappa=0,9}}{\eta_{max/\kappa=0,9}} \cdot 100\%$$

Работа выполнена под руководством действительного члена АН УССР Г. Н. Савина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. — Динамическая теория расчета шахтных подъемных канатов. Изд. АН УССР, Киев, 1949.

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

При решении задачи изгиба плиты с подкрепленным круговым отверстием существенное упрощение получается, если рассматривать подкрепляющее кольцо как упругий стержень, поведение которого описывается уравнениями малых деформаций тонких криволинейных стержней [1, 2, 4]. В настоящей работе, являющейся продолжением работы [2], это показано применительно к изгибу бесконечной тонкой изотропной плиты, в круговое отверстие которой впаяно тонкое упругое кольцо из другого материала.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Плита изгибается известными усилиями на бесконечности. Вдоль осевой линии L радиуса $r=R$, подкрепляющего кольца, действуют заданные, как функции полярного угла Θ , внешние поперечные усилия $p_2(\Theta)$ и изгибающие моменты $m_2(\Theta)$, главный вектор и главный момент которых равны нулю.

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, через которые выражается прогиб $w(x, y)$ срединной плоскости плиты примем в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \varphi^0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{-k} \frac{R^k}{z^k}, \\ \psi_1(z) &= \psi^0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \frac{R^k}{z^k},\end{aligned}\tag{1,1}$$

где $\varphi^0(z)$ и $\psi^0(z)$ — известные функции, соответствующие прогибу сплошной плиты, неослабленной отверстием. Вторые слагаемые в правых частях (1,1) соответствуют дополнительному прогибу, вызванному наличием отверстия и кольца.

Неизвестные коэффициенты α_{-k} и β_{-k} функций (1,1) являются, вообще говоря, комплексными числами. α_{-1} — вещественное число. Для определения этих коэффициентов воспользуемся условием сопряжения между плитой и кольцом по контуру L , т. е. при $r=R$ [2].

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = -\frac{1}{2}[\gamma_1(\Theta) - i\gamma_2(\Theta)]e^{i\Theta},\tag{1,2}$$

где $\gamma_1(\Theta) = -\partial w / \partial r$ — угол поворота радиального сечения кольца

вокруг касательной к контуру L , $\gamma_2(\Theta) = \partial w / \partial s$ — угол поворота касательной к контуру L вокруг его нормали в данной точке, s — дуга контура L .

Функции $\gamma_1(\Theta)$ и $\gamma_2(\Theta)$ определяются из решения задачи о малых деформациях тонкого упругого кольца постоянного поперечного сечения. Они зависят от полной нагрузки (внутренней, со стороны плиты, и внешней), действующей на кольцо, и от жесткости кольца на изгиб и кручение:

$$A = E_1 I_1, \quad C = G_1 I_k, \quad (1,3)$$

где E_1 и G_1 — модуль упругости и модуль сдвига материала кольца, I_1 — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно главной оси, лежащей в срединной плоскости; I_k — величина, имеющая для каждого вида поперечного сечения кольца специальное значение, известное из теории кручения.

Предположим, что функции $\varphi^\circ(z)$ и $\psi^\circ(z)$ в (1,1) имеют вид полиномов

$$\varphi^\circ(z) = \sum_{k=1}^m B_k \frac{z^k}{R^k}, \quad \psi^\circ(z) = \sum_{k=0}^m A_k \frac{z^k}{R^k}, \quad (1,4)$$

где A_k и B_k — известные комплексные числа. B_1 — вещественное число.

Кроме того, предположим возможность разложения внешних усилий $p_2(\Theta)$ и $m_2(\Theta)$ в комплексные ряды Фурье в виде

$$m_2(\Theta) = \frac{D}{R} \sum_{-\infty}^{+\infty} M_k \sigma^k, \quad p_2(\Theta) = \frac{D}{R^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k \sigma^k,$$

где $\sigma = e^{i\Theta}$, $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ — жесткость плиты при изгибе, h , E , ν — толщина плиты, модуль упругости, коэффициент Пуассона. Тогда, обозначив

$$\delta_1 = \frac{A}{RD} = \frac{E_1 I_1}{RD}, \quad \delta_2 = \frac{C}{RD} = \frac{G_1 I_k}{RD}, \quad (1,5)$$

можно записать правую часть (1,2) в виде

$$-\frac{1}{2} [\gamma_1(\Theta) - i\gamma_2(\Theta)] e^{i\Theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_k \sigma^k, \quad (1,6)$$

где (см. формулы (1,29) работы [2])

$$\begin{aligned} g_0 &= -\frac{m_{-1}}{2(\delta_1 + \delta_2)}, \quad g_1 = -\frac{m_0}{2\delta_1}, \quad g_2 = -\frac{m_1}{2(\delta_1 + \delta_2)}, \\ g_{k+1} &= \frac{1}{2k(k+1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} - (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ \bar{g}_{-(k-1)} &= -\frac{1}{2k(k-1)(k^2-1)} \left[(m_k - p_k) \frac{k}{\delta_1} + (k^2 m_k - p_k) \frac{1}{\delta_2} \right], \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1,7)$$

$$m_k = m'_k - M_k, \quad p_k = p'_k - P_k, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1,8)$$

$$\left. \begin{aligned} m'_0 &= -4(1+\nu)B_1 + 2(1-\nu)\alpha_{-1} \\ m'_1 &= -2[(3+\nu)B_2 - (1-\nu)\bar{\alpha}_{-2}] \\ m'_\kappa &= -(k+1)[2(1+\nu) + k(1-\nu)]B_{\kappa+1} - (1-\nu)(k-1)A_{\kappa-1} + \\ &+ (k-1)[2(1+\nu) - k(1-\nu)]\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + (1-\nu)(k+1)\bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1,9)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_0 &= 0, \quad p'_1 = 2[(1-\nu)\bar{\alpha}_{-2} - (3+\nu)B_2], \\ p'_\kappa &= k(k+1)[(k-1)(1-\nu) - (3+\nu)]B_{\kappa+1} + \\ &+ k(k-1)(1-\nu)A_{\kappa-1} - k(\kappa-1)[(\kappa+1)(1-\nu) + (3+\nu)]\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + \\ &+ \kappa(\kappa+1)(1-\nu)\bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} \\ &\quad (\kappa=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1,10)$$

Внося (1,1) и (1,6) в условие (1,2) с учетом (1,4), (1,7) — (1,10) и сравнивая коэффициенты при σ^0 , σ^1 , σ^2 в правой и левой частях (1,2), получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \frac{4(1+\nu-\delta_1)B_1 + M_0}{2(1-\nu+\delta_1)}, \\ \alpha_{-2} &= \frac{2[(3+\nu) - (\delta_1+\delta_2)]\bar{B}_2 + M_{-1}}{2[(\delta_1+\delta_2) + (1-\nu)]}, \\ \beta_0 &= -\bar{A}_0 - \frac{2(\delta_1+\delta_2-1-\nu)B_2}{\delta_1+\delta_2+1-\nu} - \frac{(1-\nu)M_1}{2(\delta_1+\delta_2+1-\nu)(\delta_1+\delta_2)} + \frac{M_{-1}}{2(\delta_1+\delta_2)}, \end{aligned} \quad (1,11)$$

Сравнивая же коэффициенты при $\sigma^{\kappa+1}$ и $\sigma^{-(\kappa-1)}$ ($\kappa=2, 3, 4, \dots$), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(\kappa-1)\bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + \bar{\alpha}_{-(\kappa+1)} + B_{\kappa+1} &= g_{\kappa+1}, \\ \bar{\beta}_{-(\kappa-1)} + A_{\kappa-1} + (\kappa+1)B_{\kappa+1} &= \bar{g}_{-(\kappa-1)}, \end{aligned} \quad (1,12)$$

где для значений $\kappa > m$ нужно считать $A_\kappa = B_\kappa = 0$.

Детерминант системы (1,12) имеет вид

$$\Delta_\kappa^* = -\frac{1}{(k^2-1)\delta_1\delta_2} \Delta_\kappa \neq 0,$$

где

$$\Delta_\kappa = (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2 + (1+\nu+2\kappa)(\delta_1+\delta_2) + (1-\nu)(3+\nu). \quad (1,13)$$

Таким образом, из (1,12) однозначно определяются неизвестные коэффициенты $\bar{\beta}_{-(\kappa-1)}$ и $\bar{\alpha}_{-(\kappa+1)}$ функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (1,1), и поставленная задача полностью решена.

В частности, когда подкрепляющее кольцо свободно от внешних усилий, функции (1,1) имеют вид

$$\varphi_1(z) = \varphi^0(z) + \sum_{\kappa=0}^m \beta_{-\kappa} \frac{R^\kappa}{z^\kappa},$$

$$\phi_1(z) = \phi^{\circ}(z) + \sum_{\kappa=1}^{m+2} \alpha_{-\kappa} \frac{R^{\kappa}}{z^{\kappa}}, \quad (1,14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \frac{2(1+\nu-\delta_1)B_1}{1-\nu+\delta_1}, & \alpha_{-2} &= \frac{(3+\nu-\delta_1-\delta_2)\bar{B}_2}{1-\nu+\delta_1+\delta_2}, \\ \beta_0 &= -\bar{A}_0 + \frac{2(1+\nu-\delta_1-\delta_2)\bar{B}_2}{1-\nu+\delta_1+\delta_2}, \\ \alpha_{-(\kappa+1)} &= \frac{\bar{A}_{\kappa-1}(k-1)}{\Delta_k} [(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2] + \\ &+ \frac{\bar{B}_{\kappa+1}}{\Delta_k} \{ \kappa^2(1-\nu)^2 + 8(1+\nu) - [\kappa^2(3+\nu) - 8(\kappa^2-1)]\delta_1 - \kappa^2(3+\nu)\delta_2 - \\ &- \kappa^2(\kappa^2-1)\delta_1\delta_2 \}, \\ \beta_{-(\kappa-1)} &= \frac{\bar{A}_{\kappa-1}}{\Delta_k} [(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2] + \\ &+ \frac{(k+1)\bar{B}_{\kappa+1}}{\Delta_k} [(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - (\kappa^2-1)\delta_1\delta_2] \\ &(\kappa=2, 3, \dots, m+1) \end{aligned} \quad (1,15)$$

§ 2. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Прямоугольная неограниченная изотропная плита с подкрепленным круговым отверстием скручивается крутящими моментами H , равномерно распределенными по ее краям. Функции (1,4) для этого случая имеют вид:

$$\varphi^{\circ}(z) = 0, \quad \psi^{\circ}(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D} \cdot \frac{z}{R}. \quad (2,1)$$

Следовательно, согласно (1,14) и (1,15) функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ для плиты с подкрепленным отверстием будут:

$$\varphi_1(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D} \beta_{-1} \cdot \frac{R}{z} \quad (2,2)$$

$$\psi_1(z) = \frac{iHR}{2(1-\nu)D} \left[\frac{z}{R} + \alpha_{-3} \frac{R^3}{z^3} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{-1} &= -\frac{(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - 3\delta_1\delta_2}{(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2}, \\ \alpha_{-3} &= -\frac{(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - 3\delta_1\delta_2}{(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2}. \end{aligned} \quad (2,3)$$

Для полного устранения концентрации напряжений в плите, очевидно, достаточно выполнение условий

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_{-3} = 0. \quad (2,4)$$

Решая уравнения (2,4) относительно δ_1 и δ_2 , находим

$$\delta_1 = 1 - \nu, \quad \delta_2 = 1 - \nu. \quad (2,5)$$

Относительные жесткости (2,5) представляют собой жесткости такого кольца, при подкреплении с которым расчетные напряжения в плите достигают минимального значения. Назовем такое кольцо оптимальным кольцом, а соответствующие ему жесткости δ_1 и δ_2 — оптимальными жесткостями. Подбор оптимального кольца по найденным оптимальным жесткостям можно осуществить следующим образом. Сначала выбирают форму сечения кольца. Для данной формы сечения составляют таблицу величин $\frac{\delta_2}{\delta_1} = I_k/2(1+\nu)I_1$ в зависимости от отношения некоторых двух характерных его размеров h_1 и b . Затем из полученной таблицы находят величину h_1/b , соответствующую отношению оптимальных жесткостей $\delta_2^{(опт)}/\delta_1^{(опт)}$, и, наконец, выбрав материал кольца, определяют размеры его сечения с помощью формулы

$$\delta_1 = \frac{E_1 I_1}{RD}. \quad (2,6)$$

Проиллюстрируем вышеизложенную схему примером подбора сечения для случая (2,5). Пусть подкрепляющее кольцо имеет прямоугольное сечение. Обозначив через h_1 высоту и через b ширину, представим величины I_1 и I_k прямоугольника в виде:

$$I_1 = \varepsilon_1 b^4, \quad I_k = \varepsilon_k b^4. \quad (2,7)$$

В зависимости от отношения h_1/b строим следующую таблицу при $\nu = 0,3$ [3].

h_1/b	0,5	0,6	1,0	1,1	1,5
ε_k	0,0287	0,0451	0,140	0,169	0,294
ε_1	0,0104	0,0180	0,083	0,111	0,281
δ_2/δ_1	1,059	0,965	0,649	0,588	0,402

Так как в нашем случае, согласно (2,5), $\delta_2^{(опт)}/\delta_1^{(опт)} = 1$, то из таблицы находим соответствующее значение h_1/b , равное приблизительно 0,56. Заменяя теперь R на R_2 (предположение о возможности такой замены лежит в основе данного метода [2]), представляем (2,6) в виде:

$$\delta_1 = \frac{E_1}{E} \cdot \frac{b h_1^3}{R_2 h^3} (1 - \nu^2) = \frac{E_1}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^4 \cdot \frac{0,56^3}{\rho} (1 - \nu^2) = 1 - \nu, \quad (2,8)$$

где R_2 — заданный радиус отверстия в плите и $\rho = R_2/h$ — известная величина.

Допустим теперь, что материал плиты и кольца одинаков. Тогда из (2,8) при $E = E_1$ находим, что $b = 1,44 h \sqrt[4]{\rho}$. По заданному ρ определяем, таким образом, b , а затем и h_1 по формуле $h_1 = 0,56 b = 0,81 h \sqrt[4]{\rho}$.

Следовательно, искомые размеры кольца определены через известную толщину h плиты.

§ 3. ОДНОСТОРОННИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Прямоугольная неограниченная изотропная плита с подкрепленным круговым отверстием изгибается моментами $M_x = M$, равномерно распределенными по двум ее противоположным сторонам. Функции (1,4) для этого случая имеют вид:

$$\varphi^0(z) = -\frac{MR}{8D} \cdot \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{z}{R}, \quad \psi^0(z) = -\frac{MR}{4D} \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{z}{R}. \quad (3,1)$$

Следовательно, согласно (1,14) и (1,15), функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{MR}{8D} \left[\frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{z}{R} + \beta_{-1} \cdot \frac{R}{z} \right], \\ \psi_1(z) &= -\frac{MR}{8D} \left[\frac{2}{1-\nu} \cdot \frac{z}{R} + \alpha_{-1} \cdot \frac{R}{z} + \alpha_{-3} \frac{R^3}{z^3} \right], \end{aligned} \quad (3,2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \frac{2(1+\nu-\delta_1)}{(1+\nu)(1-\nu+\delta_1)}, \\ \beta_{-1} &= \frac{2[(1-\nu)^2 + (1-\nu)(\delta_1+\delta_2) - 3\delta_1\delta_2]}{(1-\nu)[(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2]}, \\ \alpha_{-3} &= \frac{2[(1-\nu)^2 + (3-\nu)\delta_1 - (1+\nu)\delta_2 - 3\delta_1\delta_2]}{(1-\nu)[(1-\nu)(3+\nu) + (5+\nu)(\delta_1+\delta_2) + 3\delta_1\delta_2]}. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Добиться полного устранения концентрации напряжений в плите в этом случае невозможно, ибо для этого необходимо, чтобы все три коэффициента (3,3) равнялись нулю, но тогда мы получаем три уравнения для определения двух неизвестных оптимальных жесткостей δ_1 и δ_2 . Следовательно, оптимальное кольцо постоянной жесткости в данном случае не существует*.

Однако простота формул (3,3) позволяет легко подобрать такие жесткости кольца, которые значительно снижают концентрацию напряжений около отверстия в плите.

Заметим сначала, что при $\nu = 0$ уравнения

$$\alpha_{-1} = 0, \quad \beta_{-1} = 0, \quad \alpha_{-3} = 0$$

удовлетворяются при $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Отсюда заключаем, что если $\nu > 0$, то, взяв для δ_1 и δ_2 значения, близкие к единице, получим и для коэффициента концентрации напряжений значение, не намного отличающееся от единицы. Действительно, если взять, например, $\delta_1 = \delta_2 = 0,85$ (при $\nu = 0,3$), получим, что $\alpha_{-1} = 0,4467$, $\alpha_{-3} = -0,1033$, $\beta_{-1} = -0,1033$, и максимальный изгибающий момент на контуре $r=R$ равен $1,029 M$.

* Подкрепление кольцами переменной жесткости рассматривается в другой нашей статье [5].

Следовательно, кольцо с жесткостями $\delta_1 = \delta_2 = 0,85$ почти полностью устраняет концентрацию напряжений около отверстия в плите, т. е. практически оно является оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. — Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
 2. Флейшман Н. П. — Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплен тонким упругим кольцом. Ученые записки ЛГУ, том XXII. Серия физико-математическая, в. 5. 1953.
 3. Геккелер И. В. — Статика упругого тела. ОНТИ ГТТИ, 1934. стр. 24—30.
 4. Шереметьев М. П. — Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. мат. журнал, т. V, № 1, 1953.
 5. Флейшман Н. П. — О подкреплении края криволинейных отверстий тонких плит. Доповіді АН СССР, № 4, 1954.
-

В. Н. КОЖЕВНИКОВА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ИЗГИБАЕМОЙ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Наличие отверстий в элементах конструкций и машин является, как известно, причиной перераспределения напряжений, которое сопровождается значительной концентрацией последних.

Вопросу о влиянии проемов на напряженное состояние пластинки при деформации чистого изгиба посвящены работы Туци, исследовавшего круглое отверстие, Н. И. Мусхелишвили и А. С. Локшина, рассматривавших эллиптический проем, М. И. Наймана, изучавшего вырезы в виде эллипсов и криволинейных треугольника и квадрата, и Г. Н. Савина, который в своей работе „Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле“ рассмотрел отверстия в виде криволинейного правильного многоугольника и прямоугольника. Решение Г. Н. Савина иллюстрировано примерами. Для прямоугольного выреза приведен проем с отношением сторон, равным приблизительно трем (по принятому нами в дальнейшем обозначению это отношение надо считать равным $a:b \cong 1:3$, так как нейтральная плоскость параллельна большей стороне выреза). В указанной работе Г. Н. Савин рассмотрел, кроме чистого изгиба, и некоторые другие случаи неоднородно напряженного поля.

Нами исследуется перераспределение напряжений в бесконечной пластинке, изгибаемой в своей плоскости, вызванное криволинейным отверстием, по форме весьма близким к прямоугольнику (рис. 1). Рассматриваются вырезы с отношением средних линий $a:b \cong 1; 1,4; 1,5; 2,0; 2,5; 2,9; 4,35; 1:1,4; 1:1,5; 1:2,0; 1:2,5; 1:2,9; 1:4,35$. Средняя линия b совпадает с нейтральной плоскостью. В дальнейшем отношение средних линий $a:b$ будем для краткости называть отношением сторон отверстия.

Задача трактуется как плоская. Отверстие предполагается относительно малым и удаленным от наружных граней. Граничные условия на внутреннем контуре удовлетворяются точно, на наружном же, где влиянием отверстия пренебрегается, — лишь приближенно.

При решении используется метод Н. И. Мусхелишвили — Г. Н. Савина с применением конформного преобразования. Метод академика Н. И. Мусхелишвили, опубликованный в 1933 г., дает решение в явной форме, в то время как ранее решение искалось обычно полуобратным способом: задавались системой напряжений и проверяли, удовлетворяются ли при этом уравнения теории упругости. Особенно блестящее применение метод Мусхелишвили нашел в задачах о распределении напряжений в пластинках с отверстиями,

где он дал возможность исследовать влияние проемов различной формы, в частности, в виде квадрата и прямоугольника. Приоритет применения функции комплексного переменного к задачам теории упругости, впервые предложенного Г. В. Колосовым, и ряд удачных приложений этого метода к конкретным задачам принадлежат русским ученым.

По методу Мусхелишвили отыскание одной бигармонической функции напряжений заменяется нахождением двух аналитических функций. Решение задачи для бесконечной плоскости с прямоугольным вырезом (область переменной z) представляется затруднительным, и эта область отображается на внутренность круга единичного радиуса (область переменной ζ), для которой и отыскиваются функции напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$.

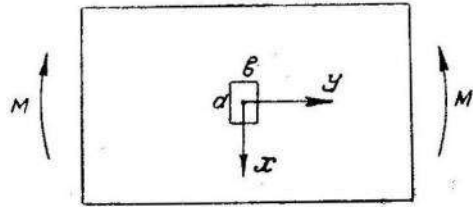


Рис. 1.

Отображающая функция заимствована нами у Г. Н. Савина. Эта функция выражается рядом

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n + \dots \right), \quad (1)$$

в котором Г. Н. Савин оставлял четыре члена, рассматривая, таким образом, не прямоугольник, а криволинейный контур, достаточно близкий к прямоугольнику. Для квадратного проема Г. Н. Савин удерживал два члена ряда (1). Экспериментальные работы, проведенные оптическим методом в Днепропетровском и Ленинградском государственных университетах, подтвердили теоретическое решение Г. Н. Савина.

При решении задачи о растяжении бесконечной пластинки Г. Н. Савин всегда брал отношение сторон отверстия большим единицы $a:b > 1$ и рассматривал две задачи для одного отношения $a:b$ — растяжение вдоль длинных и растяжение вдоль коротких сторон проема.

Мы сохраняем в отображающей функции шесть членов ряда для прямоугольного проема и три — для квадратного. Расположение изгибающих пар остается неизменным и рассматриваются отношения $a:b > 1$ и $a:b < 1$. В отображающих функциях для сопряженных значений $a:b$ абсолютная величина коэффициентов c_i одинакова, лишь знаки меняются на обратные через один коэффициент. Например, для отношений $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ отображающие функции имеют следующий вид:

$$a:b \approx 2$$

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + 0,3090 \zeta - 0,1508 \zeta^3 - 0,0279 \zeta^5 + \right. \\ \left. + 0,0084 \zeta^7 + 0,0091 \zeta^9 \right)$$

$$a:b \approx 1:2$$

$$z = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} - 0,3090 \zeta - 0,1508 \zeta^3 + 0,0279 \zeta^5 + \right.$$

$$+ 0,0084 \zeta^7 - 0,0091 \zeta^9).$$

При отображении получается контур, весьма близкий к прямоугольнику. Например, при отношении сторон $a:b \cong 2$ наибольшее расхождение между измерением контура по той или иной оси симметрии и любым другим, ему параллельным, составляет 1,4% от длины стороны прямоугольника; радиус кривизны в вершинах углов равен $R = 0,035 \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$. Контур представлен на рис. 2.

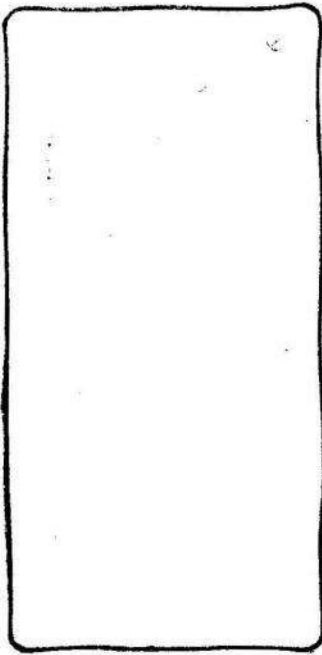


Рис. 2.

Нами найдены обе функции напряжений для изгиба пластинки с прямоугольным отверстием с указанными выше отношениями сторон. Эти функции имеют следующий вид:

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} + B_0 + B_2 \zeta^2 + B_4 \zeta^4 + B_6 \zeta^6 + B_8 \zeta^8 + B_{10} \zeta^{10} \right), \quad (2)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{NA^2}{8} \left(\zeta^2 + B_0 + B_2 \zeta^{-2} + B_4 \zeta^{-4} + B_6 \zeta^{-6} + B_8 \zeta^{-8} + B_{10} \zeta^{-10} - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) \right), \quad (3)$$

где $N = \frac{M}{J}$; M — изгибающий момент, J — момент инерции поперечного сечения пластины, A — постоянная, характеризующая размеры отверстия,

B_i — вещественные коэффициенты.

В качестве примера приведем функции напряжений с числовыми значениями коэффициентов B_i для отношения сторон проема $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$

$$a:b \approx 2$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} + 0,6180 - 1,4415 \zeta^2 + 0,3110 \zeta^4 + 0,0309 \zeta^6 - 0,0224 \zeta^8 - 0,0182 \zeta^{10} \right),$$

$$\psi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(-\zeta^2 - 0,6180 + 1,4415 \zeta^{-2} - 0,3110 \zeta^{-4} - 0,0309 \zeta^{-6} + 0,0224 \zeta^{-8} + 0,0182 \zeta^{-10} \right) - \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta),$$

$$a:b \approx 1:2$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{NA^2}{8} \left(\frac{1}{\zeta^2} - 0,6180 - 0,4711 \zeta^2 + 0,3102 \zeta^4 - 0,0486 \zeta^6 - \right.$$

$$-0,0224\zeta^8 + 0,0182\zeta^{10}),$$

$$\psi(\zeta) = \frac{NA^2}{8}(-\zeta^2 + 0,6180 + 0,4711\zeta^{-2} - 0,3102\zeta^{-4} + 0,0486\zeta^{-6} +$$

$$+ 0,0224\zeta^{-8} - 0,0182\zeta^{-10}) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta).$$

Между функциями напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ существует зависимость

$$\psi(\zeta) = -\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta). \quad (4)$$

Эта зависимость не случайна: при растяжении и сдвиге имеет место аналогичное соотношение

$$\psi(\zeta) = \pm \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta). \quad (4a)$$

Зависимость (4—4a) между функциями напряжений $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, насколько нам известно, нигде не отмечена. Пользуясь равенством (4—4a), можно определить функцию $\psi(\zeta)$ быстрее, чем это делается обычно.

Имея функции напряжений, можно вычислить напряжения на гранях выреза и в области, причем для нахождения контурных напряжений достаточно знать одну функцию $\varphi(\zeta)$.

Характер распределения напряжений по контуру рассмотрим на частных примерах при отношении сторон прямоугольного выреза $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$.

Нами приняты в дальнейшем следующие обозначения:

x, y — декартовы координаты на плоскости z ; начало координат расположено в центре отверстия;

ρ, θ — полярные координаты на плоскости ζ ;

θ_0 — полярный угол на плоскости ζ , соответствующий вершине угла прямоугольного выреза на плоскости z ;

ρ, θ — криволинейная ортогональная система координат на плоскости z ;

$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ — напряжения в пластинке, отнесенные к координатам ρ, θ ;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — напряжения в пластинке, отнесенные к декартовым координатам x, y ;

σ_y^c — напряжение в сплошной пластинке.

Значения напряжений σ_θ на гранях вырезов $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ приведены в таблицах 1 и 2. В первой графе даны значения полярного угла θ на плоскости ζ ; во второй и третьей — декартовы координаты x и y соответствующей точки на плоскости z ; наконец в четвертой — значение контурного напряжения σ_θ в долях NA .

По данным вычислений построены эпюры распределения контурных напряжений σ_θ , представленные на рис. 3 и 4. Пунктирной линией очерчены эпюры распределения напряжений в сплошной балке. Кривые

напряжений оборваны в сжатой зоне, где они образуют петлю; в точках, симметричных относительно нейтральной плоскости, напряжения отличаются лишь знаком.

Таблица 1 и рис. 3 соответствуют прямоугольному вырезу с отношением сторон $a:b \approx 2$

Таблица 1

Напряжения σ_θ на гранях прямоугольного отверстия
с отношением сторон $a:b \approx 2$

θ°	x	y	σ_θ в долях NA	θ°	x	y	σ_θ в долях NA
	в долях A				в долях A		
I	II	III	IV	I	II	III	IV
0°	1,148	0,000	1,67	38°	1,128	—0,570	1,08
10°	1,144	—0,199	1,55	39°	1,122	—0,572	0,33
20°	1,145	—0,390	1,66	40°	1,114	—0,573	—0,20
25°	1,149	—0,466	2,06	41°	1,106	—0,575	—0,52
30°	1,151	—0,523	3,09	45°	1,064	—0,575	—0,91
32°	1,149	—0,540	3,71	50°	0,991	—0,570	—0,86
33°			3,97	60°	0,786	—0,567	—0,72
34°	1,145	—0,553	4,02	70°	0,546	—0,573	—0,54
35°	1,142	—0,558	3,74	80°	0,283	—0,571	—0,27
36°	1,139	—0,563	3,04	90°	0,000	—0,567	0,00
37°	1,134	—0,567	2,06				

Как видно из таблицы 1 и рис. 3, на среднем участке грани, параллельной нейтральной плоскости, напряжения σ_θ мало изменяют свою величину, превышая примерно в 1,5 раза напряжения σ_y^c в сплошной пластинке (коэффициент концентрации $k = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c} = 1,47$). Длина

этого участка составляет около 70% от полной длины стороны. Далее следует сначала, на небольшом участке, постепенное, а затем резкое повышение напряжений, которые вблизи вершины угла при $\theta = 34^\circ$ (вершине угла соответствует полярный угол $\theta_0 = 36^\circ$) достигают своего наибольшего значения 4,02 NA с коэффициентом концентрации

$k_{\max} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c} = 3,50$. Затем напряжения круто падают и меняют знак,

переходя через нуль вблизи углового закругления. Наибольшее по абсолютной величине напряжение обратного знака составляет 80% от напряжения в сплошной пластине. На остальном протяжении сторон, перпендикулярных нейтральной плоскости, напряжения изменяются почти по прямой линии до своего нулевого значения на нейтральной оси. Таким образом, на этом участке эпюра аналогична эпюре в сплошной пластине, но знак напряжений обратный.

Интересно провести сравнение между напряжениями на гранях рассматриваемого выреза и выреза в виде эллипса с тем же отношением осей и аналогично расположенного. Распределение напряжений по контуру такого начертания, данное Н а й м а н о м, представлено на рис. 3а. Максимальное контурное напряжение соответствует точке, лежащей на большой оси эллипса. Оно приблизительно в два раза превышает напряжения в соответствующей точке прямоугольного выреза и лишь на 18% ниже наибольшего напряжения в углах прямоугольника.

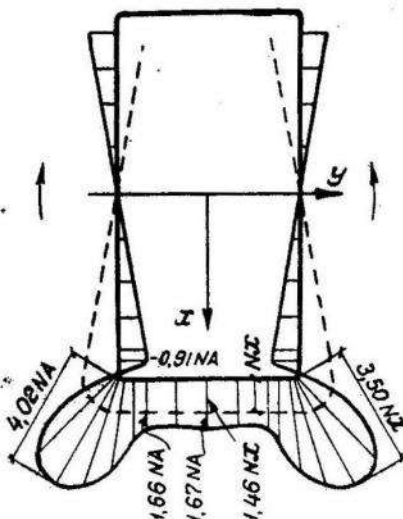


Рис. 3.

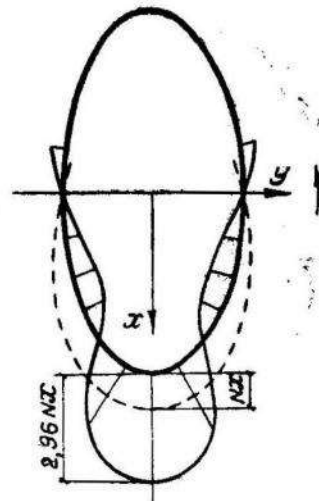


Рис. 3а.

Сплошная линия — эпюра напряжений σ_θ по контуру отверстия. Пунктирная линия — эпюра напряжений σ_{xy} в тех же точках сплошной пластинки

Таблица 2 и рис. 4 (верхний) соответствуют изгибу пластинки с вырезом при отношении сторон $a:b=1:2$.

Таблица 2

Напряжения σ_θ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:2$

θ°	x	y	σ_θ в долях NA	θ°	x	y	σ_θ в долях NA
	в долях A				в долях A		
I	II	III	IV	I	II	III	IV
0°	0,567	0,000	0,61	54°	0,563	— 1,139	0,91
10°	0,571	— 0,282	0,64	55°	0,558	— 1,142	0,50
20°	0,573	— 0,546	0,66	56°	0,553	— 1,145	0,07
30°	0,567	— 0,786	0,63	58°	0,540	— 1,149	0,28
40°	0,570	— 0,991	0,72	60°	0,523	— 1,151	0,47
45°	0,575	— 1,064	0,94	65°	0,466	— 1,149	0,43
49°	0,575	— 1,106	1,27	70°	0,390	— 1,145	0,35
50°	0,573	— 1,114	1,37	80°	0,199	— 1,144	0,19
51°	0,572	— 1,122	1,41	90°	0,000	— 1,148	0,00
52°	0,570	— 1,128	1,39				
53°	0,567	— 1,134	1,22				

Общий характер эпюры тот же, что и в предыдущем случае. Наиболее опасная точка с напряжением $\sigma_\theta = 1,41 NA$ с коэффициентом

концентрации $k_{\max} = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{cy}} = 2,5$ расположена в пределах углового закругления. Для эллипса с

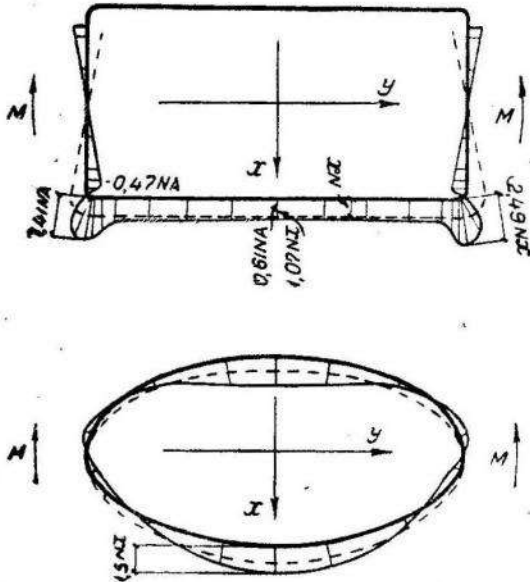


Рис. 4

Сплошная линия — эпюра напряжений σ_θ по контуру отверстия; пунктирная линия — эпюра напряжений σ_{cy} в тех же точках сплошной пластинки.

плоскости ζ , отвечающее вершине угла прямоугольника на плоскости ζ ; в графах третьей и четвертой даны значения θ_m полярного угла θ и $k_{\max}$, соответствующие наибольшему значению контурного напряжения σ_θ ; наконец в графе пятой — значение коэффициента концентрации k при $\theta = 0$.

Из таблицы 3 можно сделать следующие выводы:

1. Точки с наибольшей концентрацией контурных напряжений расположены в пределах углового закругления вблизи вершины угла.
2. Максимальный коэффициент концентрации $k_{\max}$ зависит от отношения сторон $a:b$ прямоугольника и увеличивается вместе с этим отношением. Однако изменение $k_{\max}$ сравнительно невелико:

при $a:b=4,35$	$k_{\max}=3,80$
$a:b=1,0$	$k_{\max}=2,67$
$a:b=1:4,35$	$k_{\max}=2,24$

3. Коэффициент концентрации напряжений k в середине сторон, параллельных нейтральной плоскости, также растет при увеличении отношения сторон выреза $a:b$. При уменьшении отношения $a:b$ этот коэффициент стремится к единице.

4. В горном деле при определении напряжений на гранях выра-

го закругления. Для эллипса с отношением осей 2:1, ориентированного так же, как рассматриваемый контур, распределение напряжений представлено на рис. 4 внизу. Максимальное напряжение в 1,4 раза больше напряжения в соответствующей точке прямоугольного выреза и в 1,7 раза меньше напряжения в углах последнего.

Для пластинок с прямоугольными проемами с другим отношением сторон $a:b$ характер распределения напряжений по контуру отверстия при изгибе такой же, как в двух приведенных эпюрах ($a:b=2$ и $1:2$). В таблице 3 даны значения наибольших коэффициентов концентрации $k_{\max}$ и коэффициентов концентрации k при $\theta=0$ (посередине грани, параллельной нейтральной плоскости). В графе первой таблицы 3 приведено отношение сторон $a:b$ проема; в графе второй — значение полярного угла θ_0 на

Таблица 3
Наибольшие коэффициенты концентрации контурных напряжений $k_{\max}$ и коэффициенты концентрации k посередине грани, параллельной нейтральной плоскости, для отверстий с различным отношением сторон

$a : b$	θ_0	При наибольшем значении σ_θ			При $\theta = 0$ k	$a : b$	θ_0	При наибольшем значении σ_θ			При $\theta = 0$ k
		$k_{\max}$	θ_m					$k_{\max}$	θ_m		
I	II	III	IV		V	I	II	III	IV		V
4,35	27°	3,80	25°		1,47	1 : 1,42	49°30'	2,53	47°		1,16
2,93	31°30'	3,53	29°		1,47	1 : 1,52	50°24'	2,49	47°		1,14
2,52	33°18'	3,51	31°		1,47	1 : 2,02	54°	2,49	51°		1,07
2,02	36°	3,50	34°		1,46	1 : 2,52	56°42'	2,41	54°		1,04
1,52	39°36'	3,25	37°		1,40	1 : 2,93	58°30'	2,31	55°		1,02
1,42	40°30'	3,16	37°		1,38	1 : 4,35	63°	2,24	59°		
1,00	45°	2,67	42°		1,27						

боток и в гидротехническом строительстве при нахождении контурных напряжений в отверстиях плотин обычно пренебрегают значением изгиба и учитывают лишь осевое сжатие. Вычисленные нами коэффициенты концентрации показывают, что при достаточном удалении проемов от дневной поверхности или вершины плотины, что обычно имеет место, удельное значение чистого изгиба мало сравнительно с равномерной деформацией и указанное выше пренебрежение может быть в этих случаях оправдано.

Напряжения в области вычислены нами в табличной форме только для пластинок с прямоугольным отверстием с отношением сторон $a:b=2$ и $a:b=1:2$ и притом лишь для двух сечений, совпадающих с осями симметрии проема. Результаты вычислений приведены в таблицах 4 и 5. По данным вычислений построены кривые распределения напряжений в области по указанным сечениям, представленные на рис. 5 и 6. Пунктирной линией начерчены эпюры в сплошных балках.

Таблица 4 и рис. 5 соответствуют отношению сторон $a:b=2$. По сечению $K-K$, нормальному к нейтральной плоскости, на расстоянии от нее, равном высоте отверстия a , напряжения $\sigma_0 = \sigma_y$ только на 1 % выше напряжений σ_y^c в сплошной пластинке $\frac{\sigma_0}{\sigma_y^c} = 1,01$. До-

полнительное же нормальное напряжение $\sigma_p = \sigma_x$ в этой точке составляет около 3% от σ^c . В нейтральной плоскости (сеч. $L-L$) возникают касательные напряжения, которые достигают своего наибольшего значения 0,22 МА на расстоянии, равном ширине отверстия b , от центра выреза; на расстоянии же a от последнего они имеют величину 0,10 МА.

По скорости затухания возмущения, вызванного отверстием в нормальных напряжениях вдоль оси, перпендикулярной к нейтральной плоскости, и по распределению дополнительных касательных напряжений по нейтральной плоскости можно судить о зоне влияния выреза и отсюда — о справедливости полученных зависимостей для конечных областей. Нормальные напряжения в контурных точках указанного сечения не являются наибольшими контурными напряжениями. Надо полагать, что район влияния отверстия возле точек с максимальными напряжениями будет меньше.

Из рассмотренной картины распределения напряжений видно, что здесь контурные условия соблюдаются довольно точно и в том случае, если высота балки превосходит высоту отверстия лишь в два раза.

Для прямоугольного проема с отношением сторон $a:b \approx 1:2$ результаты вычислений сведены в таблицу 5, а эпюра распределения напряжений представлена на рис. 6. В этом случае граничные условия на наружном контуре выполняются достаточно точно, если высота балки лишь в 2,6 раза превосходит высоту выреза a или в 1,3 раза — его большее измерение b .

Приведенная картина распределения напряжений по двум сечениям позволяет утверждать, что полученные нами зависимости для деформации чистого изгиба пластинки с прямоугольным проемом с отношением сторон $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ справедливы и тогда, когда размеры отверстия значительны по сравнению с размерами пластинки. Полагаем, что это заключение может быть распространено и на изгиб пластинок с другим соотношением сторон прямоугольного выреза.

Таблица 4

Напряжения в области по сечениям, совпадающим с осями симметрии
прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 2$

p	Сечение K—K ($\theta = 0$; $y = 0$)						Сечение L—L ($\theta = 90^\circ$; $x = 0$)				
	x	$\sigma_\theta = \sigma_y$	σ_y^c	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c}$	$\sigma_\rho = \sigma_x$	$\tau_{\rho\theta} = \tau_{xy}$	y	σ_x	σ_y	$\tau_{xy} = \tau_{\rho\theta}$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1,0	1,147 A	1,67 NA	1,15 NA	1,45	0,00	0	—0,567 A	0	0	0,00	
0,9	1,269 "	1,67 "	1,27 "	1,31	0,04 NA	0	—0,741 "	0	0	—0,13 NA	
0,8	1,414 "	1,73 "	1,41 "	1,23	0,05 "	0	—0,936 "	0	0	—0,20 "	
0,7	1,589 "	1,81 "	1,59 "	1,14	0,07 "	0	—1,165 "	0	0	—0,22 "	
0,6	1,817 "	1,94 "	1,82 "	1,07	0,08 "	0	—1,451 "	0	0	—0,19 "	
0,5	2,135 "	2,19 "	2,135 "	1,03	0,07 "	0	—1,827 "	0	0	—0,14 "	
0,4	2,614 "	2,62 "	2,61 "	1,00	0,07 "	0	—2,366 "	0	0	—0,09 "	

Для суждения о зоне влияния прямоугольных проемов при чистом изгибе воспользуемся, кроме приведенных данных, результатами Г. Н. Савина. В его работе приведены для отверстий квадратного и прямоугольного с отношением сторон $a:b \approx 1:3,3$ картины

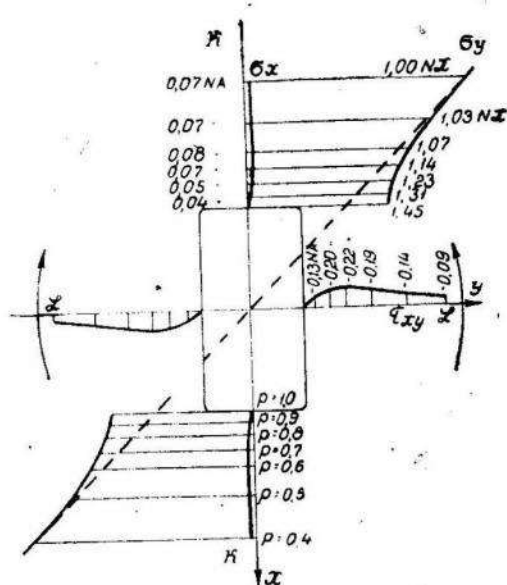


Рис. 5

Сплошная линия — эпюры напряжений в пластинке с отверстием; пунктирная линия — эпюра напряжений σ_y в сплошной пластинке.

отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:3,3$ это расхождение в указанной точке еще меньше.

Суммируя изложенное, можно сделать следующие заключения о зоне влияния прямоугольных проемов в рассматриваемой их ориентации, когда ось отверстия лежит в нейтральной плоскости, при деформации чистого изгиба.

1. Влиянием отверстий с отношением сторон $a:b \approx 1-1:3$ на напряженное состояние пластины можно практически пренебречь на расстоянии от нейтральной плоскости, равном высоте выреза. На расстоянии же, равном 1,5 высоты проема, наличие последнего не отражается сколько-нибудь заметно на распределении напряжений. Это заключение подтверждено экспериментами.

2. Из рассмотрения картины распределения напряжений в области для проемов с отношением сторон $a:b \approx 2$ и $a:b \approx 1:2$ (рис. 5 и 6)

напряженных состояний (графики равных главных напряжений $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$), соответствующие формулам автора, а также построенные на основании экспериментальных данных, полученных по заданию автора в лаборатории оптического метода Днепропетровского государственного университета. При экспериментах высота моделей бралась равной трем высотам проема. Для рассматриваемой нами ориентации отверстий (одна из осей симметрии выреза совпадает с нейтральной плоскостью) эксперименты подтвердили точность решения Г. Н. Савина при упомянутом соотношении размеров балки и отверстия. Из графиков равных $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ для квадратного выреза видно также, что на расстоянии от нейтральной плоскости, равном высоте проема, главное напряжение $\sigma_{\max}$ превосходит напряжение в сплошной балке приблизительно на 50%. Для

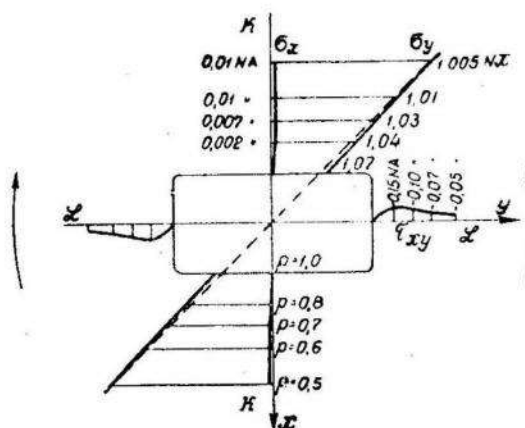


Рис. 6.

Сплошная линия — эпюры напряжения в пластинке с отверстием; пунктирная линия — эпюра напряжения σ_y в сплошной пластинке.

Таблица 5

Напряжения в области по сечениям, совпадающим с осями симметрии
прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1:2$

ρ	Сечение $K-K$ ($\theta = 0; y = 0$)						Сечение $L-L$ ($\theta = 90; x = 0$)				
	x	$\sigma_\theta = \sigma_y$	σ_y^c	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_y^c}$	$\sigma_p = \sigma_x$	$\tau_{p\theta} = \tau_{xy}$	y	σ_x	σ_y	$\tau_{xy} = \tau_{p\theta}$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1.0	0,567 A	0,61 NA	0,57 NA	1,07	0,00	0	— 1,147 A	0	0	0,00	
0.8	0,936 "	0,98 "	0,94 "	1,04	0,002 NA	0	— 1,414 "	0	0	— 0,15 NA	
0.7	1,165 "	1,20 "	1,16 "	1,03	0,007 "	0	— 1,589 "	0	0	— 0,10 "	
0.6	1,451 "	1,47 "	1,45 "	1,01	0,01 "	0	— 1,817 "	0	0	— 0,07 "	
0.5	1,827 "	1,84 "	1,83 "	1,005	0,01 "	0	— 2,135 "	0	0	— 0,05 "	

можно заключить, что отношение высоты зоны влияния отверстия по оси симметрии проема, нормальной к нейтральной плоскости, к высоте отверстия уменьшается с увеличением отношения сторон $a:b$.

3. На основании пункта 2 и рис. 5 и 6 можно сделать вывод, что при отношении сторон $a:b > 1$ влиянием проема на распределение напряжений можно пренебречь на расстоянии от его центра, равном высоте отверстия.

Экспериментальными данными для отверстий при отношении сторон $a:b > 1$ мы не располагаем.

4. Зона влияния прямоугольных проемов при изгибе меньше, чем при растяжении (сжатии), поэтому при внецентренном сжатии зона влияния будет определяться осевой деформацией.

Наибольшие коэффициенты концентрации $k_{\max}$ соответствуют точкам, лежащим в пределах углового закругления вблизи вершины угла прямоугольного отверстия, и зависят от кривизны закругления. Величина радиуса закругления в углах рассматриваемого нами контура зависит от числа членов ряда, сохраняемого в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$. Чем меньше членов ряда оставлено в отображающей функции, тем более контур, полученный при отображении, отличается от прямоугольника и тем меньше кривизна угловых закруглений. Соответственно этому с уменьшением количества членов в $z = \omega(\zeta)$ уменьшается и величина коэффициента концентрации $k_{\max}$. Беря в функции $\omega(\zeta)$ шесть, пять и четыре члена ряда, мы проследили изменение $k_{\max}$ с изменением радиусов закруглений для прямоугольных отверстий с отношением сторон $a:b \cong 1; 1,5$ и $1:1,5; 2,0$; и $1:2,0; 2,5$ и $1:2,5; 2,9$ и $1:2,9$. Эти данные носят несколько условный характер, так как радиус закруглений в углах контура переменный. При этом наблюдается значительное расхождение между наибольшей кривизной в вершине угла и кривизной в точке, которой соответствует наибольшая концентрация напряжений σ_θ . Из рассмотрения приводимых ниже таблиц можно заключить, что величина коэффициента концентрации $k_{\max}$ зависит как от величины наименьшего радиуса, так и от величины радиуса закругления смежных точек. Несмотря на отмеченное обстоятельство, результаты наших вычислений могут иметь некоторое значение для приближенного суждения о зависимости концентрации напряжений от кривизны закругления при изгибе пластины с прямоугольным проемом, поскольку других данных по этому вопросу в настоящее время не имеется.

Результаты вычислений сведены в таблицы 6 — 10. В графе второй приведено число членов ряда, оставленных в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$. В графах третьей и четвертой даны максимальный коэффициент концентрации $k_{\max}$ и соответствующее значение угла $\theta = \theta_m$. В графах пятой и последующих даны значения отношения радиуса закругления R к полусумме полудлин сторон $\frac{R}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)}$ для вершины угла прямоугольного выреза при $\theta = \theta_0$ и для $\theta = \theta_m$, соответствующего максимальной концентрации напряжений. Наконец, в последней графе приведено среднее значение отношения $\frac{R}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)}$ для значений

$\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_m$.

Таблица 6

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях квадратного отверстия при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в ото- бражающей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ $\theta_o = 45^\circ$	$\theta_m = 43^\circ$	$\theta_m = 42^\circ$	$\theta_m = 38^\circ$	$\frac{R}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_o и θ_m	Среднее значение
		$k_{\max}$	θ_m						
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
I	4	3,17	43°	2,8%	4,15%				3,5%
	3	2,67	42°	4,9%		9,0%			6,95%
	2	2,21	38°	12,0%			23,5%		17,75%
	2	1,63		25%	по Найману				

Таблица 7

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b \approx 1,5$ и $a:b \approx 1:1,5$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в обра- жающей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) \%$ Отношение в $\%$ радиуса закругления к полусумме полуширин сторон отверстия							Среднее значение R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 39^\circ 36'$ ($50^\circ 24'$)	$\theta_m = 37^\circ$	$\theta_m = 36^\circ$	$\theta_m = 35^\circ$	$\theta_m = 47^\circ$	$\theta_m = 46^\circ$	$\theta_m = 44^\circ$	
		III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	
1,5	6	3,25	37°	4,0%	5,4%						4,7%
	5	2,67	36°	5,9%		12,9%					9,4%
	4	2,58	35°	10,5%			12,0%				11,25%
1:1,5	6	2,49	47°	4,0%				9,4%			6,7%
	5	2,44	46°	5,9%					10,0%		7,95%
	4	1,91	44°	10,5%						26,5%	18,5%

Таблица 8

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2$ и $a:b=1:2$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов ряда в отображающей функции $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)}$ % Отношение в % радиуса закругления к полусумме полуэллипсов отверстия						Среднее значение R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 36^\circ$ (54°)	$\theta_m = 34^\circ$	$\theta_m = 33^\circ$	$\theta_m = 51^\circ$	$\theta_m = 49^\circ$	$\theta_m = 47^\circ$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
2	6	3,50	34°	3,5 %	4,1 %					3,8 %
	5	2,85	33°	5,2 %		9,6 %				7,4 %
	4	2,72	33°	8,5 %		8,5 %				8,5 %
1:2	6	2,49	51°	3,5 %			6,9 %			5,2 %
	5	2,16	49°	5,2 %				12,8 %		9,0 %
	4	1,86	47°	8,5 %					20,5 %	14,5 %

Таблица 9

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2,5$ и $a:b=1:2,5$ при различной кривизне угловых закруглений

$a:b$	Число членов в $z = \omega(\zeta)$	При наибольшем значении σ_θ		$\frac{R}{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)}$ — отношение в % радиуса закругле- ния к полусумме полуудлин сторон отверстия					Среднее значение R $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$ для θ_0 и θ_m
		$k_{\max}$	θ_m	$\theta_0 = 33^\circ 18'$ ($56^\circ 42'$)	$\theta_m = 31^\circ$	$\theta_m = 29^\circ$	$\theta_m = 54^\circ$	$\theta_m = 51^\circ$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
2,5	6	3,51	31°	3,6 %	5,7 %				4,65 %
	5	3,08	29°	6,85 %		10,7 %			8,8 %
	4	3,22	29°	7,2 %		9,3 %			8,25 %
1:2,5	6	2,41	54°	3,6 %			5,5 %		4,55 %
	5	1,97	51°	6,85 %				17,2 %	12,0 %
	4	1,85	51°	7,2 %				20,5 %	13,85 %

Таблица 10

Наибольшие коэффициенты концентрации напряжений $k_{\max}$ на гранях прямоугольного отверстия с отношением сторон $a:b=2,9$ и $a:b=1:2,9$ при различной кривизне угловых закруглений

I	II	III	При наибольшем значении σ_θ		$\theta_0 = 31^\circ 30'$ ($58^\circ 30'$)	R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ % Отношение в % радиуса закругления к полусумме полуширин сторон отверстия					Среднее значение R $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$ для θ_0 и θ_m	
			$k_{\max}$	θ_m		$\theta_m = 29^\circ$	$\theta_m = 27^\circ$	$\theta_m = 55^\circ$	$\theta_m = 53^\circ$	$\theta_m = 52^\circ$		
a:b	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI		
2,9	6	3,53	29°	4,1%	6,4%						5,25%	
	5	3,33	27°	6,6%		9,6%					8,1%	
	4	3,31	27°	6,6%		9,8%					8,2%	
1:2,9	6	2,31	55°	4,1%			7,0%				5,55%	
	5	1,86	53°	6,6%				18,5%			12,55%	
	4	1,85	52°	6,6%					22,7%		14,65%	

В таблице 6 для квадратного проема в нижней горизонтальной графе вписаны данные, полученные Н а й м а н о м, исследовавшим влияние квадратного отверстия с радиусом закругления в вершине угла, равным 25% от полудлины стороны квадрата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. — Некоторые основные задачи математической теории упругости.
 2. Савин Г. Н. — Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, вып. 20 (1937).
 3. Савин Г. Н. — Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, вып. 10 (1936).
 4. Найман М. И. — Напряжения в балке с криволинейным отверстием. Труды ЦАГИ, вып. 313 (1937).
-

НАУЧНАЯ ХРОНИКА

Защита кандидатских диссертаций в объединенном Ученом Совете механико-математического и физического факультетов ЛГУ за 1953 год

№ п/п	Фамилия диссертанта	Тема диссертации	Руководитель	Оппоненты	Дата защиты
1	Ю. Ю. Трохимчук	„К теории ядра последовательностей Римановых поверхностей и теории граничных свойств аналитических функций“.	Профессор Л. И. Волковский	Проф. А. С. Кованько Проф. Я. Б. Лопатинский Проф. А. И. Маркушевич	30/III
2	Н. Н. Калинин	„Изгиб тонких плит ослабленных двумя равными круговыми отверстиями“.	Проф. Г. Н. Савин	Проф. А. Ю. Ишлинский Доц. О. С. Парасюк	18/V
3	С. Д. Эйдельман	„Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения“.		Проф. Я. Б. Лопатинский Проф. А. С. Кованько	19/X

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Л. Рвачева. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений	5
А. С. Кованько. О компактности систем почти-периодических функций	45
Б. М. Левитана	50
Л. И. Волковский. О дифференцируемости квазиконформного отображения	58
П. П. Белинский. Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке	71
Г. Л. Буймола. Дослідження первинних помилок геометричних побудов	82
И. Г. Соколов. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций	88
А. Н. Костовский. О возможности решения задач на построение одним циркулем с ограниченным раствором ножек	98
И. А. Прусов. Влияние пружины на динамические напряжения в шахтных подъемных канатах	105
Н. П. Флейшман. Изгиб бесконечной плиты с подкрепленным круговым отверстием	112
В. Н. Кожевникова. Распределение напряжений возле прямоугольного отверстия в бесконечной пластинке, изгибаемой в своей плоскости	131
Научная хроника	

Технический редактор Т. Н. Петрова.

Корректор С. Я. Михайленко

БГ 13231. Подписано к набору 21. VI. 1954 г. Подписано к печати 8. XII. 1954 г.
Формат бум. $70 \times 108^{1/16}$ — 4,125 бум. л. — 11,3 печ. л. Учетно-издат. л. — 11,18,
Зак. 437. Цена 5 руб. 50 коп. Тираж 500

Типография Научно-технической книги, Главиздата Министерства культуры УССР,
Львов, Чайковского, 27.

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
42	5—8 сверху	под интегралом $\int$	y
68	9 сверху	$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w - w_0}{z} = 0, \infty^*$	$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w - w_0}{z} \neq 0, \infty^*$
72	9 "	$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - w_1 = 0$	$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - w_1^2 = 0$
80	11 "	$K_n = \overline{R + 1}$	$K_n = \frac{l}{R + 1}$
89	5 "	ABR	$AB \leq R$
92	7 снизу	(Y, YA)	(Y, YX)

Ціна 5 крб. 50 коп.