Ученые записки Львовского Государственного Университета имени Ивана Франко
Том XXXVIII, 1956 Серия механико-математическая Выпуск 7

С. Я. ЛУРЬЕ

ТРИ ЭТЮДА К АРХИМЕДУ

I. ЭЛЛИПС В ГРЕЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДО АРХИМЕДА

В предисловии к сочинению «О квадратуре параболы» Архимед пишет: «Они (т. е. математики прежнего времени) пытались найти квадратуру площади, заключенной между сечением целого конуса (*υπο... τασ ολου του κωνου τομασ*) и прямой линией, причем они принимали предпосылки, с которыми трудно согласиться» (*ουκ ευπαραχωρητα*). Речь здесь может итти только о квадратуре эллиптического сегмента или полуэллипса, так как в предшествующих строках говорится о квадратуре круга; несколько ниже Архимед говорит, что квадратуру параболы он нашел впервые, так как до него «никто даже не пытался» это сделать, а квадратуру гиперболы не пытались, да и не могли найти ни Архимед, ни Аполлоний, так как эта квадратура, выражаемая формулой $\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{ab}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$, не может быть осуществлена античными средствами. Остается только эллипс. Но выражение «сечение *целого* конуса» бессмысленно вообще и особенно в применении к эллиптическому *сегменту*. Это заметил уже в 1795 г. ученый рецензент издания Архимеда, сделанного Торелли (6[1], стр. 610—623). Он констатировал здесь явное искажение текста переписчиком и предлагал читать *τασ οξυγονιου κωνου τομασ*, «сечения остроугольного конуса», т. е. эллипса, и эту конъектуру принял переводчик Архимеда Nizze [8, стр. 4]. Однако последующие издатели и исследователи отвергли эту поправку: палеографически между этими словами нет сходства, а прилагательное *οξυγωνιου* при *κωνου* так часто встречается у Архимеда, что нет основания думать, чтобы переписчик не понял его и заменил словом *ολου*. Поэтому в настоящее время это место считается искаженным. «Я не вижу, какими средствами можно исцелить это место», — замечает Гейберг [17, стр. 149], а в своем издании Архимеда [7, т. I, стр. 263] он говорит, что нам ничего не известно о попытках найти квадратуру эллипса до Архимеда. Но другой крупный специалист по античной геометрии Г. Р. Цейтен [27, стр. 466] справедливо замечал по этому поводу: «Весьма вероятно, что эллипс был уже ранее известен грекам, в строительном искусстве которых цилиндр столь обычен, и притом известен как *сечение цилиндра*. Такое ранее знакомство с эллипсом вряд ли могло итти по более простому пути, чем этот». Там же, на стр. 46, Цейтен замечает еще: «Стереометрическое исследование эллипса первоначально имело более простой вид, а такой простой вид оно имеет, когда эллипс рассматривается как *сечение цилиндра*, как параллельная

[1] В тексте цифры в скобках указывают на список литературы в конце статьи. По техническим причинам греческий текст дан без надстрочных знаков.

проекция круга». Сходное замечание он делает, наконец, и в своем общем курсе «Истории математики в древности». [3, стр. 135]: «Наше объяснение предполагает, что эти кривые были известны уже раньше и выражались, разумеется, геометрическим образом... Это можно, повидимому, утверждать, относительно эллипса, который могли рассматривать как сечение цилиндра». А также: «Площадь эллипса... нетрудно получить, если сравнить фигуры, вписанные в эллипс и в окружность, построенную на одной из осей эллипса, как на диаметре...» (стр. 128).

Эти чисто априорные замечания, сделанные датским математиком на основании наблюдений над общим ходом развития математических идей, как мы увидим, прекрасно подтверждаются фактическим материалом.

Прежде всего, есть все основания предполагать, что не только греки V века, но уже древние египтяне занимались квадратурой эллипса. В задачах 48 и 50 папируса Райнд при определении площади круга сторона квадрата, равновеликого кругу, принимается равной $\frac{8}{9}$ диаметра, следовательно, $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Беглый черновой рисунок (рис. 1), приложенный

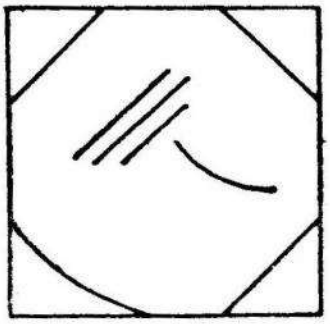

Рис. 1. Из журнала „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik“ 1, 4, стр. 448, рис. 18.

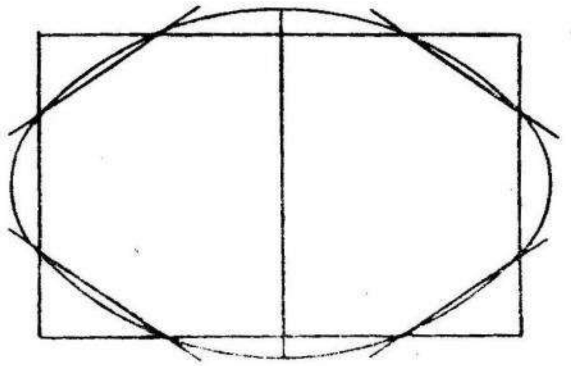

Рис. 2. Из журнала „Zeitschrift für die ägyptische Sprache“, 34, 1, 1896, табл. VI, фиг. VII.

к задаче 48, дает намек на способ получения этого отношения: внутри квадрата по углам проведены четыре косые линии. На основании этого чертежа Нейгебауэр [21, стр. 429] заключил, что каждая сторона квадрата разделялась на 3 равные части, точки деления соединялись и получался неправильный восьмиугольник, площадь которого принималась равной площади круга, вписанного в этот квадрат. Однако в этом случае получалось бы, что сторона квадрата, равновеликого кругу, равна не $\frac{8}{9}d$, а $\frac{d}{3}\sqrt{7}$. Мне удалось найти, как мне кажется, правильное восстановление хода рассуждений в египетской задаче на основании чертежа эллипса из храма в Луксоре эпохи Нового царства (после Рамзеса III), [10, стр. 75 и сл.] (рис. 2). Здесь начерчен эллипс, оси которого относятся, как 3 : 2, симметрично пересеченный прямоугольником, причем эллипс рассекает каждую из сторон прямоугольника в отношении 1 : 2 : 1; точки пересечения соединены, образуя неправильный восьмиугольник. Борхардт замечает по этому поводу следующее: «Я не считаю невозможным, что мы имеем дело с попыткой найти площадь эллипса с радиусами в 1 и $1^1/_2$ локтя, аналогичную известной из Лондонского математического папируса задаче нахождения площади круга. В нашей задаче площадь эллипса $\left[ab\pi = 1.1\frac{1}{2}\pi = 4{,}71 \text{ кв. локтей}\right]$, повидимому, принимается равной площади прямоугольника $\left[1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{3}{4} = 4{,}58 \text{кв. локтей}\right]$». (Борхардт дает здесь результаты точного измерения при $\pi = 3{,}14159...$; погрешность равна всего $\frac{1}{36}$).

Если $\frac{\pi}{4}$ принималось и в этом случае равным $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, то эллипс должен выступать за прямоугольник на $^1/_9$ каждой из своих полуосей, что весьма близко к размерам, данным на чертеже. Я сделал отсюда обратное заключение: что и неряшливый черновой чертеж круга в задаче 48 папируса Райнд надо толковать таким же образом, как Борхардт толкует чертеж эллипса. При таком чертеже (рис. 3) сразу же и без всяких натяжек получается, что сторона квадрата l равна $\frac{8}{9}\,d$ (диаметра круга). Действительно, в треугольнике βEN радиус $= \beta E = \frac{d}{2}$, сторона $\beta N = \frac{l}{4}$; $NE = \frac{l}{2}$; по теореме Пифагора: $\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{16} = \frac{d^2}{4}$ или $4l^2 + l^2 = 4d^2$, откуда $d = \frac{l\sqrt{5}}{2}$. В древности

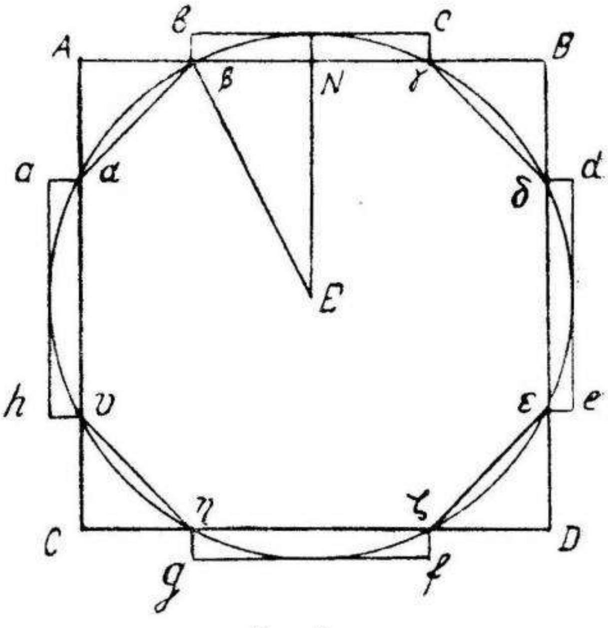

Рис. 3.

$\sqrt{n}$ находили из формулы $b^2 = na^2 \pm 1$; где членом ± 1 пренебрегают. Так, Алкархи (4), следующий за античными источниками, говорит (стр. 29): «Если тебе угодно получить более точный результат..., то помножь число, из которого надо извлечь корень, на какой угодно полный квадрат... Сделав это, извлеки корень из произведения и раздели его на корень из квадратного числа, на который число было помножено»... Этот прием был применен Платоном для получения $\sqrt{2}$ (Resp., p. 546 C); из текста видно, что прием этот был в его время общеизвестным. Герон (Метрика, III, 46), имеющий для своих приближенных вычислений египетские источники, получает по этой формуле

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2.25}{25}} \simeq \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}, \quad \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3.16}{16}} \simeq \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4};$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5.16}{16}} \simeq \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}.$$[1]

[1] См. М. Я. Выгодский [1, стр. 228—229]. Единственное дошедшее до нас приближенное вычисление корня в вавилонской математике [2б, стр. 54] дает для $\sqrt{2}$ значение, также соответствующее этой формуле $b^2 = n^2 + 1$ ($17^2 = 2.12^2 + 1$; $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2.144}{144}} \simeq \sqrt{\frac{289}{144}} = \frac{17}{12}$ или 1.25), хотя способ, каким вавилоняне получали это значение, нам неизвестен. См. М. Я. Выгодский, 1, стр. 124.

Если мы подставим это значение $\frac{9}{4}$ в уравнении $d = \frac{l\sqrt{5}}{2}$, то получим $d = \frac{9}{8} l$, $l = \frac{8}{9} d$, и, следовательно, NM равна $\frac{1}{9}$ радиуса.

Новое подтверждение этой моей реконструкции я нашел в задаче индийского математического сборника «Сульвасутры» [25, стр. 252—253], которая, может быть, составлена еще в V в. до н. э. и может прямо или через посредство греков восходить к египетской математике; ритуальный характер этой задачи (она касается, как и греческая Делосская задача, формы алтаря) говорит о ее древности. Она дошла до нас в трех редакциях — у всех трех авторов Сульвасутр — у Баудхайана, Апастамба и Катьяяна почти в одних и тех же выражениях. Даю ее в редакции Apastamba: «Caturaçram mandalam cikīrsan madhyānt kōtyām nipātayet: pārçvatah parikṛsyā, 'tiçayatṛtīyena saha maṇḍalam parilikhēt sā nitya maṇḍalam, yāvad dhiyatē tāvad āgantu». «Если ты хочешь превратить квадрат в круг, то натяни веревку от центра к одному из углов, тащи ее вокруг стороны, и [затем] опиши круг [половиной стороны квадрата] вместе с третьей частью куска, остающегося в излишке. Эта веревка образует круг как раз такой величины, как квадрат; действительно, от квадрата отнимается как раз столько[1], сколько прибавляется к нему»[2].

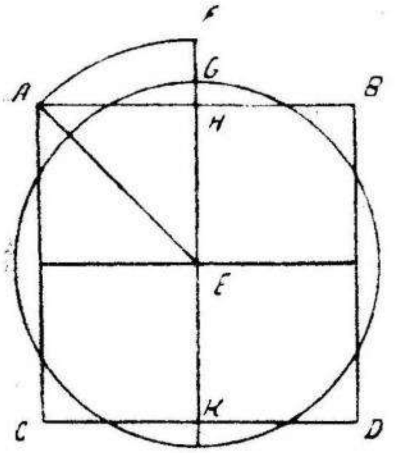

Рис. 4. Из журнала „Journal of the Asiatic Society of Bengal" 1875, P. 1, № III, табл. XV, фиг. 10.

Совершенно неожиданно для меня оказалось, что приложенный к этому правилу чертеж (там же, табл. XV, фиг. 10, см. здесь рис. 4) тождествен с тем чертежом, который я предположительно восстановил на основании сопоставления чертежа эллипса у Борхардта с чертежом круга в задаче 48 пап. Райнд. Здесь (рис. 2) квадрат начерчен как раз так, что он пересекает круг в 8 точках, делящих его стороны почти точно в отношении 1 : 2 : 1. Правда, радиус круга здесь получается не путем деления стороны, а тем, что отрезок HF делят на 3 части так, что $HG = \frac{1}{3} HF$, и затем радиусом EG описывают круг, но, если мы вычислим отношение GH к HE, то получим $EF = AE = HE\sqrt{2} \simeq \frac{17}{12} HE$; $HF \simeq \frac{5}{12} HE$, $HG = \frac{1}{3} HF \simeq \frac{5}{36} HE$, EM[3] $= EG = EH + HG = \frac{41}{36} HE$; $MH^2 =$

---

[1] По углам квадрата.

[2] Сегменты круга, лежащего вне квадрата.

В 1901 г. Bürk переиздал этот памятник (25). Ничем существенным этот перевод от перевода Thibaut не отличается. Bürk (т. 55, стр. 551, 553, 548) стремится показать, что эта задача заимствована из Taitt. Sutra, т. е. составлена уже в X—VIII вв. до н. э.

[3] Точка M — пересечение окружности с AH.

$= EM^2 - EH^2 = \left[\left(\frac{41}{36}\right)^2 - 1^2\right] EH^2 = \frac{385}{1296} EH^2; MH = EH\sqrt{\frac{385}{1296}} \simeq \frac{19}{36} EH,$ т. е. AB разделится окружностью в соотношении 17 : 38 : 17, что очень близко к 1 : 2 : 1. Принимая во внимание приближенный характер вычислений и в египетской, и в индийской математике, этой разницей можно пренебречь.

Как же египтяне пришли впервые к уравнению $l = \frac{8}{9} d$? Здесь возможны разные предположения. Так, например, самый чертеж 3 наводит нас на следующую мысль: в математике древнего Востока господствующим принципом при определении площадей был принцип средних величин, когда между двумя величинами, из которых одна больше, а другая меньше искомой, бралось среднее арифметическое[1]. Круг находится между фигурой $AbcBdeDfgCha$ и восьмиугольником $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$. Но площадь первой фигуры равна $\frac{9}{8} l^2$, площадь восьмиугольника $= \frac{7}{8} l^2$; круг находится между ними и поэтому его площадь равна среднему арифметическому этих величин, т. е. l^2. Возможен и другой путь. Площадь квадрата равна l^2. Площадь фигуры $a\alpha\beta b c\gamma\delta d e\varepsilon\zeta f g\eta\vartheta h$ также равна l^2. Естественно было прийти к мысли, что и площадь круга, лежащего между обводом той и другой фигуры, также равна l^2.

Если это так, то сравнение чертежа круга с чертежом эллипса невольно наводит на мысль, что эллипс, сохранивший в горизонтальном направлении все размеры круга, а в вертикальном сокративший их в отношении 2 : 3, рассматривался египтянами, как «тень», отбрасываемая солнечными лучами от круга, т. е. как его параллельная проекция, которая, повидимому, была известна египтянам.

Египтяне употребляли особый термин ỉdb, выражавший отношение большей стороны прямоугольника к меньшей или большего катета прямоугольного треугольника к меньшему (см., например, задачи 7, 16, 17 папируса M); этот ỉdb, очевидно, соответствовал тангенсу угла, лежащего против большей стороны. Умножая площадь прямоугольника на ỉdb, получали площадь квадрата, построенного на большей стороне прямоугольника, и, наоборот, деля площадь квадрата на ỉdb, получали площадь прямоугольника. Точно так же могли египтяне поступать и в случае с эллипсом: для нахождения площади эллипса делить площадь круга $\left(\frac{8}{9} d\right)^2$ на ỉdb $\left(= \frac{d}{d_1}\right.$, если d_1 — малая ось эллипса$\left.\right)$ и получать числовое значение, соответствующее $\left(\frac{8}{9}\right)^2 dd_1$. Ср. Диоген Лаэрций, 1,27 (=Плиний, Естеств. история XXXVI, 82): «Фалес отправился в Египет и учился у жрецов... он измерил... пирамиды по тени, подстерегши время, когда тень от человека равна его росту», Плутарх, «Пир семи мудрецов», 2, р. 147А (обращение к Фалесу): «Поставив посох рядом с тенью, которую отбрасывала пирамида, когда вследствие падения луча образовалось два треугольника, ты показал, что тень так же относится к тени, как пирамида к посоху». Пусть эти рассказы легендарны в подробностях, но они могут отражать то обстоятельство, что учение о проекции было уже в начале VI века заимствовано греками у египтян. В частности, тот факт, что эллипс

[1] См. (2), стр. 21.

является проекцией круга, был хорошо известен авторам трудов по оптике и греческим художникам; можно думать, что он был уже известен Агафарху, а от него Демокриту[1] (см. стр. 11). Так, в «Оптике» Дамиана [11, стр. 28, 20] мы читаем: «И круг художник иногда изображает не как круг, а как эллипс (*οξυγωνιου κωνου τομην*)[2], таким он кажется, если помещен на большой высоте» (*αναστηματι*).

Проще всего было бы, конечно, предположить, что греки сравнивали круг и его проекцию — эллипс — в двух сечениях цилиндра, проходящих через один и тот же диаметр, одно перпендикулярно, другое — наклонно к оси. Но было ли грекам до Архимеда известно, что наклонное сечение цилиндра представляет собою эллипс?

На этот вопрос мы можем с полным правом ответить утвердительно. Сам Архимед говорит об этом, как об общеизвестном факте, не находя нужным его доказывать (de con. et sphaer., prooem., [7, т. II, стр. 260, 3]): «если рассечь цилиндр, то сечениями будут или круги, или сечения остроугольных конусов» (т. е. эллипсы). Точно так же Евклид уже отождествлял сечение конуса с сечением цилиндра, непараллельным его основанию, равно как и с тем эллипсом, который был известен в обиходе и который назывался *θυρεοσ* [7, т. VIII, стр. 651]: «Если конус или цилиндр будет пересечен плоскостью не параллельно основанию, то в сечении образуется сечение остроугольного конуса, которое тождественно с *θυρεοσ* (*ηϲισ ισιν ομοια θυρεωι*). Что же такое *θυρεοσ*? Обычно его переводят словом «щит» (например, Heath в своем указателе). Но мы, кажется, вправе утверждать, что этот смысл слово *θυρεος* впервые получило в середине III века, после вторжения галлов в Грецию, по примеру которых были введены в обращение эти щиты.[3] До этого времени слово *θυρεοσ* известно в художественной литературе только из Гомера («Одиссея», 9, 240, 313, 340), где оно означает огромный продолговатый камень, служащий вместо дверей в пещере Полифема. В одной надписи с острова Делоса (19, надп. 289, строка 68) оно употребляется для обозначения овальной побрякушки, подвешиваемой к ожерелью. Гейберг [16, стр. 88] высказал (к сожалению, голословно) мнение, что *θυρεοσ* было названием, которым Менехм обозначал эллипс; это утверждение повторили за ним Зуземиль [26, том I, 751, п. 220] и Цейтен [27, стр. 466]. Heath [15], сам себе противореча, переводит в тексте книги трижды (I, 439, II, 111, 195) *ομοιον τωι θυρεωι* «похожий на щит» (что̀, как мы видели, неверно), а в указателе стр. 565В отмечает: „*θυρεοσ* — старое название эллипса, old name for ellipse»). Отметим, что уже Гейберг сделал ту же, как мне кажется, ошибку, что и Heath, переведя здесь *ομοιοσ* слово «похожий» и сделав отсюда вывод, что Эвклид отличал эллипс, как коническое сечение, от *θυρεοσ* «возникшего обычным путем». Это наверно потому, что *ομοιοσ* в греческом языке очень часто означает не «подобный», а «тождественный».[4] Архимед сплошь и рядом употребляет слова *ομοιοσ* и *ομοιωσ* в смысле полного совпадения. Так как в данном случае у Эвклида речь идет о тождественности формы, а не величины, то слово *ομοιοσ* — самое подходящее.

---

[1] Ср. [12] стр. 14—15, отрывок 39.

[2] Обратим внимание на доаполлониевскую терминологию. Очевидно, Дамиан списывал с доаполлониевского источника.

[3] См. Diodor. V, 39, IX, 11, Polyaen. IV, 17, Ditt. Syll.[2] 673, PSI 4, 428, 36, IG. II 445, 446, 448, 449, VII 2716, Plut. Crass. 25, Philop. 9, Pyrrh. 26, Polyb. 10,13,2; 5,53,8; 2,30,3; 6,23,2. Epistula ad Ephes. 6,16. A. Bauer, [9], S. 451.

[4] „Es drückt auch die vollkommenste Übereinstimmung aus = ο αυτος „derselbe", Ilias, 18, 329, Odyss. 16, 184, Plato Phaedr. p. 271 A: εν και ομοιον" (Passow). Ср. He-

Прокл [22, стр. 126, 19] показывает с несомненностью, что *θυρεοσ* означало *эллипс,* но не как линию, а как фигуру (ср. наши выражения «окружность» и «круг»). Эллипс же, как линия (то, что впоследствии называлось *η οξυγωνιου κονου τομη*) именовался в этом старом языке «линией *θυρεοσ*'а», *η του θυρεου γραμμη*: *εν γαρ τωι θυρεωι περιεχεται γωνια υπο του αξονοσ και τησ του θυρεου γραμμησ* («в *θυρεοσ* угол ограничен осью и линией, *θυρεοσ*'а»). Там же (стр. 103, 6, 9, 10) *η του θυρεου γραμμη,* сопоставляется с окружностью круга (*η κυκλικη γραμμη, η περιφερεια*). В другом месте (стр. 111,6) *η του θυρεου γραμμη* сопоставляется с окружностью круга, циссоидой, конхоидой, параболой и гиперболой, откуда ясно, что под этим термином разумеется определенная кривая, а не неопределенная замкнутая кривая, «овал», как думали Liddel и Scott. Но решающим является его указание на стр. 126, 22: «если круг пересечется с *θυρεοσ*, то получается угол, ограниченный окужностью и эллипсом» (*τησ ελλειψεωσ*): здесь *θυρεοσ* есть фигура, ограниченная *эллипсом.*

Итак, Эвклид в приведенном месте утверждает, что эллипс, получающийся в сечении конуса и цилиндра, тождественен с той фигурой, которую называют также *θυρεοσ*. Так как слово *θυρεοσ* употреблялось только у Гомера и в ионийском диалекте (Делос), то, очевидно, это слово введено в математический обиход ионийцем и, может быть, непосредственно заимствовано у Гомера.

Эвклид, как мы видели, подобно Архимеду, уже отождествлял косое сечение цилиндра с сечением остроугольного конуса. Жившие еще раньше математики считали эти два сечения различными, хотя и сходными по виду кривыми. Об этом сообщает поздний автор Серен [24, стр. 1]: «Я вижу, что многие авторы геометрических трудов полагают, что косое сечение цилиндра (*την του κυλινδρου πλαγιαν τομην*) есть нечто иное, чем сечение конуса, именуемое эллипсом (*ελλειψεωσ*)".

После того как мы убедились, что априорная реконструкция Цейтена (см. стр. 6) вполне подтверждается историческими фактами, вернемся к испорченному месту в сочинении Архимеда «О квадратуре параболы». Мы видели уже, что чтение *τασ ολου του κωνου τομασ* невозможно и представляет собою явное искажение текста переписчиком. Чтение *τασ οξυγωνιου κωνου τομασ* слишком далеко от рукописной традиции этого места и само по себе, как уже было отмечено Гейбергом и Цейтеном, мало вероятно. После сказанного естественнее всего полагать, что у Архимеда читалось «сечение цилиндра», ибо его противники, применявшие «предпосылки, с которыми нелегко согласиться», это, скорее всего, атомисты, а в эпоху их деятельности вряд ли могла уже итти речь о конических сечениях. Комментаторы Илиады, так называемый схолий *ABT* и Евстафий (p. 925), в примечании к стиху 137 XIII песни «Илиады» по поводу гомеровского слова *ολοοιτροχοσ* «круглая каменная глыба» замечают: *Δημοκριτοσ δε το κυλινδρικον σχημα ολοοιτροχον καλει*, «Демокрит же называет (геометрическую) фигуру «цилиндр» — *ολοοιτροχοσ*» (как известно, Демокрит был горячим поклонником Гомера и заимствовал у него ряд слов, использованных им как научные термины: *ειδωλον, αλλοφρονειν ινδαλλεοθαι* и др.). В палеографии XIII—XVI вв. (см. Шубарт, [23], 322, табл. III, Леман, [20]; Гейберг [17] стр. 115), слово *ολοιτροχον* выгля-

---

rodot. VIII 80; Thucyd. II, 44; VI, 78, 87 и выражение ισος και ομοιος (Euripides, Phoenissae, 501; Herodot. 6, 51; Demosthenes, p. 551,9 et passim).

дело бы примерно так же, как слово *ολου του κωνου*[1], или очень сходно с ним. Как указывает Гейберг в той же книге (17, стр. 125—168), в рукописях Архимеда имеется целый ряд однотипных искажений: если переписчик встречает неразборчивое или редкое, непонятное ему, слово, он заменяет его другим, более обычным в греческом языке, хотя бы совершенно неуместным. Так вместо *κα*, «бы», характерного для дорийского диалекта Архимеда, переписчик в целом ряде мест (7, стр. 5, 19; 37, 11; 41, 7; 222—223, 273, 46; 259, 36; 261, 12; 275, 3 и 4) пишет *και* («и») или *κατα* («под», «согласно»), не обращая внимания на получающуюся бессмыслицу; стр. 103, 14 вместо трудного слова *τετραπλασιοπλευρουσ* «с числом сторон, делящимся на четыре», написано нелепое *τετραγωνουσ*, «четырехугольных»; стр. 55,25: вместо *του στερεου σαμειον* «точка тела» читается непонятное в данном контексте *το ετερον σαμειον* «другая точка», вместо непонятной ему формы *κομιζομεσ, δοκιμαζομεσ* (стр. 218, 11 и др.), «мы получаем», «мы считаем» переписчик пишет *κομιζοντεσ, δοκιμαζοντεσ* «получающие», «считающие» и т. д. Поэтому вполне понятно, что и в нашем случае переписчик, встретив незнакомое и непонятное ему слово, решил, что имеет дело с опиской и переделал его на простое греческое выражение, не считаясь с тем, что оно не дает смысла в данном контексте.

Если это так, то, очевидно, Архимед, употребив этот специфически демокритовский термин, имел в виду атомистических математиков, которые, находя площадь эллипса, рассматривали его как сечение *ολοιτροχου*, не отождествляя его с сечением конуса; и именно их он обвиняет в том, что они в этом случае употребляли предпосылки, «с которыми трудно согласиться».

В этюде «Механический метод Архимеда» (ниже, стр. 17) мы покажем, что здесь имеются в виду атомистические предпосылки и каковы эти атомистические аксиомы. Из собранного там материала мы убедимся в следующем: говоря о том, что его предшественники находили площадь «сечения цилиндра», т. е. эллипса, Архимед скорее всего имел в виду либо представление об эллипсе как о многоугольнике с очень большим числом сторон, либо разложение эллипса на ряд «сплошь заполняющих» его ординат, перпендикулярных к большой оси, из которых он «сложен». Поскольку речь идет об эллипсе как о цилиндрическом сечении, более вероятно, что предшественники Архимеда шли по второму пути; это, повидимому, подтверждается и решением задачи нахождения площади эллипса, данным Архимедом в 4-ой теореме его книги «О коноидах и сфероидах». Здесь нахождение площади эллипса основано на следующей теореме: если построить круг и эллипс, имеющий большую ось, совпадающую с диаметром круга, то каждый перпендикуляр к этой оси, проведенный от окружности круга до оси, разделится обводом эллипса в одном и том же отношении (7, т. 1, стр. 257, 5): *επει γαρ αι ΕΘ, ΚΛ καθετοι εισ τον αυτον λογον τετμηνται κατα τα ΜΒ*).

Это положение дается без всяких доказательств, как общеизвестный факт. По вопросу о том, откуда взял его Архимед, мнения ученых разошлись: Цейтен [27, стр. 28, 135] полагал, что Архимед выводил это свойство эллипса из сравнения фигур, вписанных в эллипс и окружность, построенную на одной из осей, как на диаметре, ибо эти кривые были уже известны раньше открытия теории конических сечений. Этот подход к эллипсу как

---

[1] По техническим причинам здесь не может быть дано воспроизведение этих слов в их средневековой палеографии.

к цилиндрическому сечению, т. е. как к параллельной проекции круга, служил Архимеду лишь эвристическим средством, нуждающимся в дальнейшем доказательстве (27, стр. 46), Гейберг же (18, стр. 48—49, прим. 6) полагал, что это постоянное отношение между соответственными ординатами круга и эллипса было у Архимеда просто выводом из «уравнения» эллипса, согласно которому квадраты ординат эллипса равны произведению соответствующих отрезков оси, помноженному на некоторый постоянный для каждого эллипса параметр $\left(\frac{b}{a}\right)^2$*. Поскольку в круге квадрат каждого перпендикуляра, опущенного на диаметр, совпадающий с одной из осей эллипса, равен произведению отрезков этого диаметра, нетрудно уже было заключить, что отношение каждой ординаты в эллипсе к соответствующей ординате в круге равно постоянной величине, $\frac{b}{a}$. Однако нельзя не указать на то, что это правило изложено у Архимеда, как нечто само собой подразумевающееся, без ссылки на *Στοιχεια Κωνικα*, а не как один из выводов «уравнения» эллипса. К этому надо еще добавить следующее. Архимед называет эллипс «сечением остроугольного конуса», параболу — «сечением прямоугольного конуса», а гиперболу «сечением тупоугольного конуса». Естественно было бы, чтобы он называл и тела, полученные от вращения этих фигур вокруг своей оси, соответственно остроугольным, прямоугольным и тупоугольным коноидом. Однако это верно только для параболоида и гиперболоида вращения; эллипсоид же Архимед называет не «остроугольным коноидом», а «удлиненным (или сплющенным) сфероидом» Это естественно в том случае, если он по традиции рассматривал эллипсоид не как результат вращения конического сечения, а как удлиненный (*παραμηκησ*) шар, а эллипс, следовательно, как удлиненный (*παραμηκησ*) круг. И действительно, такой эпитет эллипса сохранен нам Диодором (V, 39, 7): *παραμηκησ θυρεοσ*.

Но дело не в этом: если уже Эвклиду (в его «Феноменах», см. выше) было известно, что эллипс как сечение конуса (*οξυγωνιου κωνου τομη*) с уравнением (применяя наши обозначения) $y^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 x\,(2a - x)$ тождествен с эллипсом — сечением цилиндра с уравнением $y_{\text{эллипса}} = \frac{b}{a}\, y_{\text{круга}}$, а его более далеким предшественникам это *не было известно*, то, очевидно, незадолго до Эвклида из второго уравнения было выведено первое или наоборот. Значит, Архимед и в том случае, если бы он перенял из старой математики пропорциональность, изложенную в 4-ой теореме «Коноидов и сфероидов», в ответ на предложение доказать эту теорему прибег бы к помощи уравнения «сечения остроугольного конуса». Поэтому спор между Цейтеном и Гейбергом по существу является беспредметным.

Как бы то ни было, начав с того, что все ординаты круга разделяются в одном и том же отношении обводом эллипса (а именно, что они относятся как бо́льшая ось эллипса к малой), Архимед далее рассуждает так: он вписывает в круг и эллипс многоугольники и разбивает их на части хордами, проведенными через вершины перпендикулярно к диаметру; получается ряд узких трапеций, а по краям — треугольники. Нетрудно доказать, что площадь каждой такой трапеции в круге так относится к площади каждой такой трапеции в эллипсе, как большая ось к малой, а значит, и все эти треугольники и трапеции в круге относятся ко *всем* этим треугольникам и трапециям в эллипсе, как большая ось

* Где b и a — полуоси эллипса.

к малой: далее, переход к криволинейной фигуре совершается при помощи доказательства от обратного и приведения к абсурду. Архимед обстоятельно и красноречиво на множестве примеров показывает в своем «Эфоде», каковы были те первоначальные решения, от которых он затем приходил к своим треугольникам, трапециям и к reductio ad absurdum; первоначально он не доказывал (**απεδ εικνυε**), а показывал (**εφαινε**) эти теоремы, сравнивая не *все трапеции*, а *все ординаты, все прямые,* составляющие ту и другую криволинейную фигуру; разумеется, ни в каком reductio ad absurdum здесь не было нужды. Для ясности достаточно сравнить совершенно тождественные теоремы — теорему I «Эфода» и теорему XIV «Квадратуры сечения прямоугольного конуса» (с леммами к ней, теоремами V—XIII). И здесь и там одним и тем же способом, при помощи уравновешивания отдельных элементов на весах, находится площадь параболического сегмента, но в «Эфоде» этими элементами являются прямые (ординаты), а в «Квадратуре параболы» они заменены уже, как в нашей теореме, треугольниками и трапециями, причем для перехода к криволинейной фигуре приходится прибегнуть к доказательству от противного, вследствие чего доказательство теоремы, занимавшее 2 странички, теперь занимает 10 страниц. Вряд ли можно сомневаться, что в том доказательстве для площади эллипса, которое Архимед исправил, сделав его научным доказательством, рассуждение велось так: каждая ордината круга так относится к каждой ординате эллипса, как $a : b$, значит, и *все вместе* ординаты круга относятся ко *всем вместе* ординатам эллипса, как $a : b$; а поскольку и круг и эллипс состоят или сложены (**συγκεινται, συνεστηκασι**)из этих наложенных друг на друга ординат и сплошь заполнены ими **συνεπληρωθησαν**), площади и этих фигур относятся друг к другу, как $a : b$.

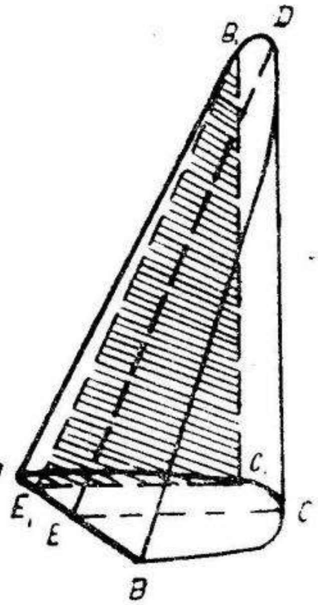

Рис. 5

Итак, развитие учения об эллипсе до Архимеда можно представить себе следующим образом. Уже древние египтяне умели находить с хорошим приближением площадь эллипса, рассматривая его как «тень» (параллельную проекцию) круга, и поэтому получали площадь эллипса тем же путем, что и площади других «теней», т. е. помножая или деля площадь круга на idb (тангенс угла между плоскостями круга и эллипса). В эпоху расцвета атомистической математики было обнаружено, что эллипс (**θυρεοσ**) — это косое сечение цилиндра (**ολοιτροχοσ**). Поскольку **ολοιτροχοσ** искусственный термин, заимствованный из древнеионийского диалекта (может быть, даже прямо из Гомера), засвидетельствован для Демокрита, можно предположить, что и вышедшее из употребления гомеровское слово **θυρεοσ** (овальный камень для закрывания дверей пещеры) был введен в употребление как геометрический термин им же. Обратим внимание на то, что во вводном послании и в теоремах XII—XV «Эфода» рассматривается тело, образуемое частью поверхности цилиндра и двумя плоскостями — перпендикулярной и наклонной к оси цилиндра, пересекающимися по диаметру кругового сечения (рис. 5). Такое тело у нас носит название «цилиндрического копыта» (onglet, sabot). При этом последняя из теорем о копыте доказана чисто атомистическим методом, без помощи рычага. Теперь вспомним, что, по утверждению Архимеда, его предшественники находили квадратуру площади, ограниченной сечением цилиндра (т. е. эллипсом) и прямой, причем применяли предпосылки, «с которыми нелегко согласиться», т. е. скорее всего атомистические. Такая площадь как раз и образует косую поверхность ABD цилиндрического копыта $ABCD$. Архимед представляет себе в этих теоремах «цилиндрическое копыто», как сложенное и сплошь заполненное вертикальными плоскостями ECD, $E_1C_1D_1$ и т. д., плотно прилегающими друг к другу; несомненно, так же должен был рассуждать и Демокрит или кто-либо другой из атомистов, исходивший из тех же предпосылок; все эти плоскости имеют форму треугольников, подобных друг другу. В самом деле, угол DEC, $D_1E_1C_1$ и т. д. между гипотенузой (ED, E_1D_1) каждого такого треугольника, лежащей в эллиптической плоскости, и катетом (EC, E_1C_1), лежащим в круговой плоскости, всегда один и тот же, ибо все плоские углы одного и того же двугранного равны между собой. Значит, отношение каждой ординаты эллипса (D_1E_1) к соответственной ординате круга (E_1C_1) — определенная постоянная величина; полуэллипс сложен из таких ординат и весь заполнен ими («недопустимая предпосылка»), точно так же и круг. «Как один к одному, так и все ко всем» (т. е. сумма предыдущих членов пропорции так относится к сумме последующих, как каждый предыдущий к каждому последующему); значит, и все ординаты эллипса, т. е. площадь полуэллипса, ADB, так относится ко всем ординатам круга, т. е. к площади полукруга ACB, как каждая ордината к каждой. Но одной из таких ординат в эллипсе будет DE — одна из полуосей его, а соответствующая ордината в круге EC будет равна другой из полуосей, ибо $EB = EC$, как радиусы круга; значит, площадь эллипса относится к площади круга, имеющему с ней общую ось, как оси эллипса. Так должна была выглядеть соответствующая теорема об эллипсе до открытия конических сечений. Как мы видели, и после открытия конических сечений на первых порах считали, что эллипс θυρεοσ как цилиндрическое сечение не тождественен с «сечением остроугольного конуса». В течение IV века, еще до Эвклида, эта тождественность была доказана, т. е., как мы говорили уже, была доказана тождественность «уравнения» θυρεοσ'а с «уравнением» сечения остроугольного конуса; одновременно старые атомистические методы интегрирования были отброшены и заменены методом исчерпания с доказательством от противного; прямые линии с сверхчувственно малой, неделимой шириной были заменены трапециями. Архимед восстановил в правах старый, ненаучный, но наглядный и удобный атомистический метод интегрирования, *но только как метод нахождения решений,* правильность которых для каждого отдельного случая должна была затем доказываться строго геометрическим способом.

II. МЕХАНИЧЕСКИЙ МЕТОД В «ПОСЛАНИИ К ЭРАТОСФЕНУ» («ЭФОДЕ») АРХИМЕДА

Для того чтобы определить, какой конкретный смысл вкладывает автор в то или иное понятие и что̀ он считает в нем существенным, необходимо, чтобы это определение было *адэкватным,* т. е. чтобы оно вполне подходило для всех тех случаев, которые автор сам подводит под это понятие, и исключало бы те из них, которые сам автор под это понятие не подводит.

Разумеется, если Архимед называет свой метод *механическим,* то он теснейшим образом связан в его концепции с механикой, но нередки случаи, когда термин, возникший для одного круга предметов, сохраняется и после того, как его объем и содержание существенно изменяются. Если мы сравним вводное послание к сочинению о «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» с вводным посланием к «Эфоду», то увидим, что объем и характер понятий, к которым прилагается эпитет «механический», в обоих сочинениях весьма различен: «рассмотрение при помощи механики» (*δια των μηχανικων θεωρηθηναι*) в «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» имеет другое значение, чем «показывание при помощи механики» (*δια των μηχανικων φανηναι*) в «Эфоде».

Во введении к «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» Архимед стремится показать, что его метод математически безукоризненен и основан на аксиомах, не уступающих по убедительности аксиоме Эвдокса; хотя он и дает рядом с «механическим» и обычное «геометрическое» доказательство, но ни одним словом, ни одним намеком не указывает на то, что механический метод недостаточно научен, и видит в обоих методах две разных формы доказательства (7, т. 1, стр. 265—266): *τασ αποδειξεισ πρωτον... δια των μηχανικων... μετα ταυτα δε και... δια των γεωμετρουμενων*). Наоборот, во введении к «Эфоду» Архимед усиленно подчеркивает нестрогий, эвристический, предварительный характер «механического» метода, сравнивая его с «показыванием» теоремы у Демокрита, и противопоставляет ему строгий, геометрический метод, являющийся продолжением метода Эвдокса.

Ясно, что под «механическим» решением в том и другом сочинении подразумеваются разные вещи. Действительно, в «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» в параболический сегмент вписывается и вокруг него описывается ряд трапеций и треугольников, имеющих определенную ширину, находится центр тяжести каждой из них, они уравновешиваются на рычаге другими фигурами и т. п. Поскольку Архимед считал, что и его система статики также построена строго геометрически (несколько «очевидных» аксиом; определения; строго логически выведенные из них теоремы), во всех этих рассуждениях нет ничего, что он мог бы признать нестрогим. Напротив, в «Послании к Эратосфену» фигура разбивается на прямые, «из которых она *состоит»,* тело — на круги, *«которыми оно заполнено»,* и т. д. Это явно нестрогое доказательство с точки зрения той геометрии, которой посвятил себя Архимед, и, естественно, что он такой «механический метод» считает пригодным только как предварительный прием, наводящий математика на решение, правильность которого должна быть доказана строго геометрически.

Не менее любопытно следующее. Во введении к «Эфоду» Архимед пишет: «Мы излагаем прежде, чем другое, то, что и мы прежде, чем другое, показали при помощи механики — а именно, что всякий параболический сегмент составляет $^4/_3$ треугольника... а потом и каждую (другую) из теорем, найденных посредством вышеназванного метода; а в конце книги мы предлагаем геометрические доказательства названных теорем». Как мы хорошо знаем, геометрическое доказательство теорем о площадях (см. соч. «О шаре», «О коноидах» и др.) состоит в том, что в данную кривую (или тело) вписывается и вокруг нее описывается ступенчатая фигура, а затем путем приведения к абсурду доказывается, что разница между площадями (объемами) этих фигур меньше любой, заранее заданной величины. Такое доказательство в «Эфоде» содержит только теорема XV; она сильно повреждена, но все же можно еще видеть, что в ней дано геометрическое доказательство теоремы об объеме «цилиндрического копыта», «механическое доказательство» которой дается в теореме XIV (леммами к последней являются теоремы XII и XIII). Таким образом, из трех частей «Эфода», на которые указывает введение к сочинению (7, т. II, стр. 430, 19), первая охватывает только теорему I (о площади параболы), вторая — теоремы II—XIV, третья — теорему XV и весь утерянный конец сочинения. Теорема XIV относится, следовательно, еще ко второй, *механической* части «Эфода». Гисз (14, стр. 436) кратко констатирует такое положение вещей: «Теорема XIV... хотя и не содержит ничего, что относилось бы к механике, но все еще относится к той категории теорем, доказательства которых Архимед считает нестрогими, так как в них принимается, что тела действительно сложены из параллельных друг другу плоскостей — сечений, а вспомогательная парабола — из параллельных друг другу прямых, лежащих в ней. Теорема же XV дает строгое геометрическое доказательство».

Итак, теперь. в отличие от «квадратуры сечения конуса», Архимед к категории «механических теорем» уже относит не разложение фигуры на ряд конечных трапеций, а теоремы, где фигура разлагается на элементы, имеющие одним измерением меньше, чем сама фигура, хотя бы в этих теоремах никаких рычагов и вообще ничего механического не фигурировало, как в разбираемой теореме XIV.

И в этих «механических» теоремах доказательство ведется по строгим правилам геометрической логики, а убедительность аргументации не оставляет желать ничего лучшего. Очевидно, дело в основных аксиомах или «предпосылках», «допущениях» ($\lambda\eta\mu\mu\alpha\tau\alpha$). С точки зрения античной геометрии, эти допущения должны обладать непосредственной очевидностью, которой, следовательно, не обладали те допущения, из которых исходил Архимед, применяя «механический» метод. Что же это за предпосылки?

Во вводном послании к сочинению «О коноидах» Архимед (см. ниже) симметрично противопоставляет старой квадратуре сегмента эллипса, основанной на «неприемлемых предпосылках», свою квадратуру сегмента параболы, основанную на вполне приемлемой предпосылке:

«Они пытались найти квадратуру площади, ограниченной сечением цилиндра и прямой, принимая предпосылки, с которыми нелегко согласиться».

«Квадратура сегмента, ограниченного сечением прямоугольного конуса,.. найдена нами.., причем принимается следующая предпосылка...»

При таком противопоставлении естественно предположить, что предпосылка, о которой говорит Архимед, была улучшенной и исправленной заменой старой предпосылки, «с которой нелегко согласиться». Это априорное предположение подтверждается тем, что в сочинении Эвклида «О делении струны» (Sectio canonis, 13, т. VI, стр. 158) действительно сохранялась доэвдоксовская аксиома, вполне аналогичная аксиоме Архимеда:

Sectio Canonis

«Должно утверждать, что (величины) состоят из частиц, когда при помощи (последовательного) складывания или вычитания они достигают требуемой величины, а все те величины, которые сложены из частиц, относятся друг к другу, как (целые) числа».

Euclid. V, 4 (ex Eudoxo, cf. Archimed. [7], v. II, p. 264, 21 = de sphaera et cylindro, I, prooemium, 7, v. I, p. 4):

«Разница между неравными площадями, на которую большая превосходит меньшую, может, будучи складываема с самой собой, превзойти всякое заданное конечное число... Говорят, что две величины имеют отношение между собою, если меньшую из них можно повторить столько раз, что результат будет равен или больше большей».

Сравнение этих двух аксиом показывает, что аксиома Эвдокса—Архимеда является полемикой со старой, атомистической (*εκ μοριων συγκειμενα*) аксиомой, ибо обе имеют целью обосновать предельный переход при нахождении площадей и объемов тел, которые не могут быть найдены без инфинитезимальной процедуры. Даже глагол «быть составляемой» (*συντιθεσθαι*) применен в обеих аксиомах, но характерно, что в атомистической аксиоме меньшая величина *достигает* (*τυγχανειν*) большей, а у Эвдокса и Архимеда *превышает* (*υπερεχειν*) большую.

Как известно, нахождение площадей криволинейных фигур или объемов криволинейных тел у Архимеда производится двумя способами: либо фигура или тело разбивается на ряд элементов, каждый из которых имеет малую ширину или толщину; либо эти элементы таковы, что первый имеет сравнительно большую величину, а каждая следующая меньше предыдущей. Каждый из этих способов применялся, как мы увидим, и в атомистической математике, и основывался на своей специфической аксиоме. Аксиому, на которой основано доказательство по второму способу, сохранил Эвтокий (7, т. III, стр. 6, 10). Здесь речь идет об аксиоме Архимеда: «Прямая есть кратчайшее расстояние между точками». Эвтокий, который плохо разбирается в принципиальной методологической разнице между эвдоксовой и атомистической геометрией, замечает, что это положение можно и не принимать за аксиому, а его можно доказать строго геометрическим способом, если принять другое «очевидное предложение» (*εννοια*, ср. *κοιναι εννοιαι* у Эвклида): «...ведь, можно, проведя из каждой точки (кривой в соседнюю с ней точку) прямые, получить (ломаную) линию, составленную из прямых, совпадающих с этой (кривой)... Нет ничего нелепого в том, чтобы присоединить (к числу аксиом) и такие очевидные предложения», и дальше (7, т. III, стр. 12): «так как на кривой берутся непрерывно следующие друг за другом точки и между ними проводятся прямые, то получаются (ломаные) линии, сложенные из прямых, ...тождественных с упомянутыми кривыми, поскольку всякая прямая мыслится как непрерывное следование точек...»[1]

На эту аксиому ссылается Антифонт в своем замечательном исследовании о квадратуре круга. Теорема Антифонта в полном виде процитирована в еврейской средневековой рукописи Альфонсо; текст и перевод опубликованы мною (2а, стр. 150 и 184, прим. 27): «Антифонт делил пополам каждую дугу, прилегающую к каждой из сторон (вписанного в круг многоугольника). Он не переставал поступать так.., пока не приходил к выводу, что путем деления он достиг тех частиц, из которых состоит как прямая, так и окружность круга».

Другой вид интеграционной процедуры еще играл большую роль у Архимеда. Воспитанный на науке Эвдокса, он считал этот второй способ атомистического доказательства недостаточно убедительным и противопоставлял ему точное «геометрическое» доказательство (см. 7, т. II, стр. 428, 26). «Многое из того, что прежде было мною показано (сдела́но ясным) при помощи механического метода, затем было доказано геометрически, так как аргументация при помощи первого приема лишена (строгого) доказательства. Вот почему и в том случае, когда речь идет о теоремах, (строгое) доказательство которых впервые нашел Эвдокс, именно, что конус — третья часть цилиндра, а пирамида — третья часть призмы... немалую роль надо отвести и Демокриту, который впервые показал (сделал ясным) это положение для указанного тела без (строгого) доказа-

[1] На это место у Эвтокия обратил мое внимание М. Я. Выгодский.

тельства. Я сам оказался в таком положении, ибо теоремы, которые я сейчас публикую, я нашел при помощи сходного с прежним метода...» И ниже (7, т. II, стр. 438, 16): «Это... не доказано, а только в некотором отношении показывает, что вывод правилен».

Для всякого непредубежденного читателя ясно, что Архимед отождествлял свой метод предварительного эвристического нахождения решения со способом Демокрита, а свой способ окончательного строгого решения — со способом Эвдокса: не случайно в одном и том же словесном периоде и для предварительного решения Архимеда, и для решения Демокрита употреблены выражения *φαινω* или *φαινομαι* «показываю», вместо *αποδειχνυμι* — «доказываю» — для строгого решения; не случайно здесь и метод Демокрита и архимедов предварительный метод охарактеризованы как *χωρισ αποδειξεωσ*, «без доказательства», т. е. без строгого доказательства, ср. Эвдем у Прокла, комм. к Эвклиду, I, 15 p. 299, ed. Friedlein: «Это найдено... впервые Фалесом, а научное доказательство дал автор «Начал».

Так как сам Архимед называет этот предварительный метод механическим, то, как можно было бы думать, недостаточную строгость этого приема Архимед видел в том, что две фигуры мыслятся подвешенными к разным плечам неравноплечного рычага. Мы показали, что это неверно: этот прием применен в сочинении «О квадратуре сечения прямоугольного конуса», но никаких оговорок о его недостаточной строгости здесь не делается. Дело в том, что в «Эфоде» в основу этого метода положена аксиома, признаваемая ненаучной. На какую же аксиому опиралась эта процедура?

Эта аксиома засвидетельствована у Аристотеля как атомистическая («О небе» III, I, 299a 6): «Тому же учению свойственно складывать тела из плоскостей, плоскости — из линий, линии — из точек»; Аристотель ссылается при этом на свою книгу *Περι κινησεωσ*, т. е. на Phys., VI, 1, p. 231 a 24 слл., b 18[1], откуда с несомненностью следует, что он имеет в виду атомистов.[2] Полемику к этой основной предпосылке атомизма мы находим у комментатора Эвклида[3]: «Между линией и поверхностью, равно как и между поверхностью и телом нет никакого отношения: на какое бы большое число мы ни умножали линию, она всегда останется все той же линией и никогда не станет равной поверхности, а тем более никогда не превзойдет ее. То же относится к поверхности; (другое дело), если бы можно было (рассекая плоскость прямыми), разбить ее на прямые... Но даже если бесконечное число раз рассекать (плоскость) прямыми она не распадется на прямые». Насколько популярна среди математиков была до Эвдокса эта аксиома атомической математики, видно из следующей полемики Платона в «Законах» (VII, 21, p. 820 AB): «Что касается отношения линий и площадей к телам или площадей и линий друг к другу, то разве мы, все греки, не думаем, что их возможно измерять одни другими?.. Но это никак невозможно...»

Эта аксиома атомистической математики звучала, следовательно, примерно так: «Тело складывается из плоскостей, плоскость — из линий, линия — из точек (или из неделимых)». Ссылку на эту аксиому мы находим и у Демокрита, и в указанном сочинении Архимеда. См. Plutarch.

---

[1] См. Alexandr. de sensu, 113,3; Simpl. in Phys, 923,7.

[2] См. Aristot. de caelo, III, 4, 299a 8, 303a 3, 20 и De sensu, 6, 445, 18 со ссылкой на то же место «Физики», где речь идет об атомистах, о Левкиппе и Демокрите.

[3] Схолий к Эвклиду, V, def. 4, 20 и XI, def. 3, 7, т. V, стр. 298 и 594; ср., схолий к Эвклиду, X, 1, где упомянуты «демокритовцы» (οι Δημοκριτειοι).

De comm. notitis , 39, 1079 D (цитата из Демокрита, 12, стр. 173, отрывок 155): «Если конус будет разрезаем плоскостью параллельно основанию... то окажется, что он... *сложен* (*συγκειμενοσ*) из кругов» Архимед, 7, т. II, стр. 436, 24: «Треугольник *ΓZA сложен* из тех прямых, что в треугольнике *ΓZA*, а сегмент *ABΓ сложен* точно так же из прямых, взятых внутри параболы *ΞO*»; стр. 442, 24: «Так, как цилиндр сплошь *заполнен* взятыми (таким способом) кругами, как (заполнены ими) и шар и конус»; стр. 450, 26: «Так как и цилиндр, и сфероид, и конус сплошь *заполнены* взятыми (таким способом) кругами»; стр. 458, стр. 1: «Так как цилиндр и сегмент прямоугольного коноида *сплошь заполнены* (кругами)»; стр. 462, 20: «Так как сегмент и конус *сплошь заполнены* кругами, то *все* круги, что в сегменте, уравновесят *все* круги, что в конусе»; стр. 468, стр. 1: «Так как полушар и конус *сплошь заполнены* кругами, то *все* круги в полушаре и конусе... уравновесят *все* круги в конусе...»; стр. 478, 14: «Точно так же и *все* круги, что́ в сегменте *BA* и в конусе *AE*..., уравновесят *все* круги, что в конусе *AE*»; стр. 490, 24: «Значит, и *все* параллелограммы, образующиеся в полуцилиндре.., уравновесят... *все* параллелограммы, образующиеся в сегменте». Но наиболее интересна для нас теорема XIV, где интегрирование происходит совсем, как у Демокрита, без всяких рычагов, и, следовательно, дает нам наилучшее представление об этой процедуре у атомистов. Стр. 498, 9: «Параллелограмм *ΔH сплошь заполнен* прямыми, проведенными параллельно *KZ*, а сегмент... отрезками прямых, проведенных внутри сегмента...; там же, 21: «*все* треугольники, что в призме, так относятся ко *всем* треугольникам, отсекаемым внутри отсеченного сегмента цилиндра, как *все* прямые в параллелограмме ко *всем* прямым и т. д. Но из треугольников, что в призме, *сложена* призма...» и т. д.

Совершенно ясно, что здесь не подразумеваются под «кругами» — сегменты с небольшой высотой и круговым основанием, а под «прямыми» — трапеции с небольшой высотой. В этом случае Архимеду незачем было бы извиняться за применение недоказательного метода. Такими узкими трапециями он действительно оперирует в сочинении о «Квадратуре параболы», но в этом случае Архимеду приходится устанавливать, что центр тяжести лежит где-то между параллельными основаниями трапеции, и применять доказательство от противного. В «Эфоде» же центр тяжести лежит на самой прямой, круге и т. д. Значит, Архимед, говоря «круг», «прямая», и подразумевает то самое, что он говорит; конечно, он при этом, как мы видим, прекрасно сознает, что это недопустимо с точки зрения строгой математики.

О том, что здесь перед нами действительно ссылки на аксиомы, «с которыми нелегко согласиться», свидетельствует следующее: как мы видели, аргументацию при помощи атомистического, механического метода Архимед считает не (строгим) доказательством (**αποδειξισ**), а только «показательством» (**το αποφαινειν**) без (строгого) доказательства (**χωρισ αποδειξεωσ**). Поэтому вполне понятно и последовательно, что обычная заключительная формула греческих теорем: «что́ и требовалось доказать» (**οπερ εδει δειχθηναι**) — для теорем, не доказанных (**ου δειχθεντα**), а лишь «показанных», «сделанных ясными» (**φανεντα**) при помощи «механической» аргументации, оказывалась неуместной и в 1 теореме «Эфода» была соответственно заменена другой: «Итак, это ясно» (**τουτο ουν φανηρον εστιν**), см. теор. 1 «Эфода» с характерным применением термина **φαινειν** «показывать», вм. **δεικνυναι** «доказывать». Но в дальнейшем тексте Архимед забывает об этом самоограничении: когда он дает решения задач этим нестрогим методом, он не только ссылается, как мы видели, на атомистическую предпосылку о структуре пространства, но и употребляет на каждом шагу выражения: *ωσ εδειξαμεν* («как мы доказали»), *ομοιωσ δε δειχθησεται* («таким же образом будет доказано»), [7, т. II, стр. 442, 15, 18—19; 456, 28—29; 462, 12; 490, 14 и т. д.], а теорему II и III даже заканчивает сакраментальной формулой: «что и требовалось доказать» (*οπερ εδει δειχθηναι*). Ясно, что он здесь применяет старую трафаретную формулу доказательства, забывая о том, что она уже не соответствует его новым предпосылкам. Благодаря этому мы получаем ясное представление, как аргументировала доэвдоксова геометрия при нахождении площадей и объемов.[1]

III. АРХИМЕД И АПОЛЛОНИЙ

Оставляя в стороне те остроумные и правдоподобные догадки, которые высказал в свое время Гульч по поводу полемики Аполлония с Архимедом в связи с его «Измерением круга» и «Числом песчинок», я основываюсь только на твердо установленных фактах. То, что Аполлоний был современником Архимеда, можно считать несомненным. Гераклид, биограф Архимеда (скорее всего, как предполагают Гейберг и другие исследователи, — то же лицо, что и друг или ученик Архимеда, который упоминается во вводном письме к сочинению «О спиралях»), говорит,[2] что расцвет Аполлония (*γεγονε*) приходился на царствование Птолемея Эвергета (247—222 гг. до н. э.), а согласно сообщению Птолемея Хенна[3], Аполлоний был знаменит (*περιβοητοσ*) в царствование Птолемея Филопатора (222—201 гг. до н. э.). Наконец, Папп (VII, 35, р. 678, 10) сообщает, что Аполлоний учился (*συσχολασε*) очень долгое время в Александрии вместе с учениками Эвклида, а так как Эвклид жил при Птолемее I и выпустил свой труд около 300 года, то Аполлоний вряд ли мог быть значительно моложе Архимеда. Поэтому нет никакого основания отбрасывать свидетельство Гераклида, сохраненное в том же месте Эвтокия. Здесь Гераклид утверждает, что «теоремы о конических сечениях первым открыл Архимед, а Аполлоний присвоил себе эти теоремы, когда обнаружил, что Архимед их не издал». Правда, Эвтокий замечает, что Гераклид «говорит неправду» (*ουκ αληθευει*), но он вовсе не хочет этим сказать, как думает Гейберг [17, стр. 31], что Архимед не дал доказательств теорем о конических сечениях или что Аполлоний их не знал. Он категорически (и, вероятно, совершенно справедливо) отрицает факт плагиата со стороны Аполлония, но в отношении Архимеда он, повидимому, подтверждает сообщение Гераклида: во-первых, говорит он, Архимед в своих сочинениях неоднократно ссылается на «Начала конических сечений» как на более раннее сочинение (Эвтокий хочет этим, очевидно, сказать, что сочинение Архимеда Аполлоний вправе был считать опубликованным — *εκδεδομενον* — поскольку Архимед ссылается на него в своих книгах, и потому имел право использовать его — упоминание имен предшественников с точки зрения античной литературной этики, как известно, не было обязательным); во-вторых, «сам Аполлоний вовсе не пишет, что он (излагает) свои открытия», — наоборот, тщательно подчеркивает, что он в основном лишь систематизирует открытия своих пред-

[1] Мы игнорируем «возражения» Зубова в виду грубых передержек и некомпетентности этого автора.

[2] Eutocius in Apollonium, I, 1, № 5, т. II, стр. 169.

[3] Photius, Bibliotheca, 151b

шественников[1]; по обеим этим причинам о плагиате, как справедливо указывает Эвтокий, конечно, не может быть и речи.

Но самый факт существования сочинения Архимеда, посвященного элементам конических сечений, и факт совпадения между какими-то местами труда Архимеда и труда Аполлония этими возражениями не опровергается, а подтверждается. Если, как полагал сам же Гейберг, биограф Архимеда Гераклид то же лицо, что и друг Архимеда Гераклид, которому, как мы видим из вводного послания к сочинению «О спиралях», была доверена публикация сочинений Архимеда, то кому было лучше знать, чем ему, было ли у Архимеда сочинение такого содержания и были ли совпадения между ним и книгой Архимеда.

Повидимому, с точки зрения античной литературной этики, считалось недопустимым использовать чужую работу, ставшую известной частным образом, прежде чем она была опубликована официально (*ἐκδέδοται*). Но, если даже в наше время не всегда можно считать установленным, опубликовано ли уже ученым его открытие (считать ли, например, опубликованием университетские лекции, доклады в ученых обществах, сообщения в служебных отчетах и т. д.), то что же сказать о древности, где не существовало книгопечатания и в то же время (как мы узнаем от тех же Архимеда и Аполлония) были в большой моде предварительные, неофициальные публикации? С другой стороны, характерной особенностью научного развития в бурные эпохи его роста является то, что некоторые идеи как бы носятся в воздухе и одновременно приходят в голову нескольким гениальным мыслителям, что затем неизбежно порождает споры о приоритете и плагиате (ср. споры между Кавальери и Ферма, Ньютоном и Лейбницем и т. д.). Это обвинение тем более понятно, что Архимед в своих сочинениях ни разу не упоминает Аполлония (хотя упоминает Конона и Эратосфена), и, наоборот, Аполлоний, ссылаясь на того же Конона, Эвдема и Филонида, ни разу не называет Архимеда. Очевидно, дружеских отношений между ними не было.

Гейберг [17, там же] пытается еще из самого способа цитирования «Начал конических сечений» у Архимеда заключить, что он имеет в виду на свое сочинение, а сочинение Эвклида или Аристея: «Архимед ни разу не говорит «как мы доказали» или «как было доказано в прежде опубликованных нами книгах», а только «как доказано в «Началах конических сечений». Однако, тщательно сопоставив соответствующие места Архимеда, мы увидим, что, говоря о своих работах, он никогда не употребляет личного оборота, а всегда говорит, как в разбираемом нами случае: «как было доказано в такой-то книге», без личного местоимения[2], так что эта формула не говорит в пользу того, что имеется в виду чужое сочинение. Если же нет оснований сомневаться ни в том, что Архимед написал «Начала конических сечений» (хотя, может быть, и не успел издать публично, а после выхода в свет книги Аполлония издание стало устаревшим и излишним), ни в том, что в труде Аполлония могли быть совпадения с этой книгой, то позволительно поставить и обратный вопрос: поскольку

[1] Кстати, это неверно, а Аполлоний, несомненно, преуменьшает свои заслуги.

[2] Квадратура сечения прямоуг. конуса 6 [7, т. II, стр. 274, 7—8]: «Ибо это доказано уже в «Механике», там же, стр. 274, 15: «Это также было доказано», там же, стр. 280, 15: «Ибо это доказано уже в «Механике», Коноиды, 2 [7, т. I, стр. 270, 1]: «Ибо это доказано уже в опубликованных книгах «О спиралях», Эфод. 14 [7, т. II, стр. 500, 1]: «Это уже доказано в книгах, опубликованных прежде», там же, 15, стр. 504, 19: «Это уже было доказано». Во всех этих местах имеются в виду другие сочинения самого же Архимеда.

Архимед и Аполлоний были гениальными современниками, нельзя ли обнаружить в трудах Архимеда следы влияния Аполлония?

Гейберг обнаружил в трудах Архимеда (в ряде случаев совершенно справедливо) ряд интерполяций: замечания, сделанные читателями позднего времени на полях, затем были приняты за исправление пропусков в самом тексте и вставлены в текст. Это очень обычный случай, особенно в сочинениях математического и технического характера. Но далеко не все вычеркивания Гейберга обусловлены необходимостью; он доказал (17, стр. 69) наличие их лишь для сочинений «О шаре и цилиндре» и «Об измерении круга»; в ряде других случаев можно было бы обойтись и без этих вычеркиваний. Дело в том, что в 1879 г., когда Гейберг сделал эти исправления в своей книге «Quaestiones Archimedeae», такие исправления были в большом ходу, так как тогда исходили из представления, что все античные тексты дошли до нас безнадежно испорченными, и каждый ученый старался по мере своих сил их «исправить». Папирусные находки показали, что тексты древних авторов дошли до нас сравнительно в хорошей сохранности и что в их исправлении надо быть крайне осторожными.

Здесь, не касаясь сочинений «О шаре» и «Об измерении круга», я буду говорить о вычеркиваниях Гейберга лишь в тех местах, где употреблены специфические термины, введенные в употребление впервые Аполлонием. Конечно, вполне естественно, что поздние интерполяторы применяют вошедшие в общее употребление уже в их время термины Аполлония и что таким образом эти термины могли проникнуть и в текст Архимеда. Но разве это только единственная возможность? И если в ряде случаев сам же Гейберг оставляет нетронутыми места со специфической терминологией Аполлония, если, с другой стороны, некоторые вычеркнутые им места написаны на дорийском диалекте, на котором поздние интерполяторы, как известно, не писали, то позволительно усомниться в правомерности этой процедуры, тем более, что я имею в виду сочинения «О квадратуре сечения прямоугольного конуса», «О коноидах и сфероидах» и «Послание к Эратосфену» — наиболее трудные, не преподававшиеся в школах и потому очень мало подвергавшиеся комментированию, интерполированию и искажению.

В чем состоят основные нововведения Аполлония? Он прежде всего как бы окончательно оторвал изучение конических сечений от изучения свойств конуса. Доказательство он ведет не стереометрически, на конусе, а планиметрически, руководствуясь свойствами конических сечений на плоскости. Для него параметр параболы — уже не удвоенный отрезок оси ее от вершины параболы до оси конуса, а прямая в построенном искусственно на плоскости параболы прямоугольнике, отличающаяся тем свойством, что абсцисса, «будучи приложена к ней», равна квадрату ординаты — и только. В гиперболе квадрат ординаты больше этого прямоугольника, в эллипсе — меньше. Поэтому конические сечения он уже не представляет себе как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей, и называет их не «сечением остроугольного конуса», «сечением прямоугольного конуса» и «сечением тупоугольного конуса», а, по указанному выше планиметрическому свойству, «эллипсом» («недостатком»), «параболой» («произведением»), «гиперболой» («превышением»). Параметр по тем же причинам он называет линией, с помощью которой получается квадрат (***παρ' ἣν δύναται***), или же, имея в виду указанный чертеж вспомогательного прямоугольника, он называет абсциссу — продольной стороной (*η ορθια*), а параметр — поперечной стороной (*η πλαγια*). Аполлоний в связи с большой общностью его доказательств внес и другие терминологические изменения. Так, Архимед называл диаметром конического сечения то, что мы — его осью; диаметры параболы он называет «прямыми, параллельными диаметру», а диаметры других конических сечений вовсе не имеют у него особого названия; осью Архимед называет ось вращения или ось сегмента тела вращения. Аполлоний уже употребляет термины «ось» и «диаметр», как их употребляем теперь мы, иногда называя, впрочем, ось также главным диаметром (*αρχικα*). Наконец, для ординаты он придумал особое название — «проведенная по порядку» (*τεταγμενοσ κατηγμενη* = лат. ordinata).

Я готов был бы еще согласиться с Гейбергом в том, что Архимед вряд ли стал бы употреблять такие выражения как «эллипс» и «парабола», ибо они были, быть может, слишком специфичны для Аполлония. В некоторых случаях даже можно доказать, что мы имеем дело с интерполяцией. Так, во всех рукописях одно из сочинений Архимеда названо «Квадратурой параболы» (*Τετραγωνισμοσ τησ παραβολησ*). Не говоря уже о том, что заглавия в античных сочинениях часто позднего происхождения, комментатор Архимеда Эвтокий [7, т. III, стр. 342], ссылаясь на 17-ю и 24-ю теоремы этого сочинения, сохранил нам еще старое название: *εν τωι Περι τησ του ορθογωνιου κωνου τομησ*, «О сечении прямоугольного конуса».

Точно так же можно согласиться считать интерполяцией чтение в соч. «О коноидах» теоремы IX, т. I, стр. 298, 26. Здесь после слов «относится к квадрату $A\Delta$ (*ποτι το απο* $A\Delta$), написанных на дорийском диалекте, вставлено ненужное и бессмысленное «эллипса» (*τησ ελλειψεωσ*) на аттическом диалекте.

Но вопрос о Conoid., 9, там же, стр. 300, 8, уже более труден. Здесь читается: «Итак, ясно, что цилиндр, охватывающий эллипс AB» и т. д. (*δηλον δη, οτι και ο κυλινδροσ ο περιλαμβανων ταν ελλειψιν* AB...)

Гейберг предлагает зачеркнуть слова *ταν ελλειψιν* AB. Но, во-первых, выражение *ο περιλαμβανων* «охватывающий» без прямого дополнения несколько неуклюже; во-вторых, *ταν ελλειψιν* — дорическая форма, и, если мы хотим видеть здесь интерполяцию, то должны предположить, что поздний переписчик, внесший по ошибке примечание (схолию) в текст, еще знал дорический диалект и подделывался под него. Нельзя считать такое предположение убедительным.

Недостаточно также убеждает меня и вычеркивание слов «круг или эллипс» в Conoid., там же, стр. 293, 9: «Пусть будет описан вокруг диаметра EB круг или эллипс: (в таком-то случае) — круг, (в таком-то случае) — сечение остроугольного конуса» (*γεγραφθω περι διαμετρον ταν* EB *κυκλοσ η ελλειψισ· ει μεν ... κυκλοσ, ει δε μη ... οξυγωνιου κωνου τομα*).

Я не вижу ничего невероятного в том, что Архимед, располагая двумя выражениями для эллипса и считая их синонимами, употребил их рядом в одной и той же фразе; без слов «круг или эллипсис», конечно, можно обойтись, но они нисколько не мешают.

Сходно обстоит дело и со словом «парабола», встречающимся в «Послании к Эратосфену». Это послание написано (по крайней мере, в дошедшем до нас виде) на общегреческом языке (*κοινη*), и здесь языковые критерии отпадают. Как и в предыдущем примере, в одной и той же фразе читается и «сечение прямоугольного конуса» и «парабола»: «из прямых, проведенных между сечением прямоугольного конуса и прямой

ЕН, составляется сегмент параболы» (*εκ δε των μεταξυ τησ του ορθογωνιου κωνου τομησ και τησ ΕΗ το τμημα τησ παραβολησ*). Нет ничего невозможного в том, что здесь под «параболой» Архимед понимает фигуру, а под «сечением прямоугольного конуса» ее обвод, подобно тому как у Прокла «эллипсом» назван обвод эллипса, а словом *θυρεοσ* обозначена фигура (см. выше). Точно так же и в теореме I, там же, стр. 436, 1, читаем: «Так как *ГВА* — парабола» (*επει ουν παραβολη... η ΓΒΑ*). Здесь Гейберг поступает непоследовательно: если во втором месте он устранял слово «парабола», то здесь он оставляет его в тексте, делая в примечании непонятное замечание: «Это след (?) интерполяции».

Еще хуже обстоит дело с типичным аполлониевым термином *πλαγια πλευρα*, «поперечная сторона», для параметра, и *ορθια πλευρα*, «продольная сторона», для абсциссы. В сочинении «О коноидах» [25, там же, т. II, стр. 376, 23], Гейберг вычеркивает целую фразу, служащую для объяснения пропорции $(Z\Delta \times B\Delta):(ZE \times BE)$ в гиперболе, где отрезок $B\Theta$, т. е. полуось, еще не имел технического названия у Архимеда и назывался описательно: «прямая, приданная к оси» (*α ποτεουσα τωι αξονι*), а так как он входит в эту формулу, «имея избытком квадратную фигуру $B\Delta^2$ или BE^2», то поясняется: «прямая, в два раза большая, чем приданная (подразумевается «к оси»), т. е. чем радиус, есть поперечная сторона фигуры» (*α γαρ διπλασια τασ ποθεουσασ, τουτεστι τασ εκ του κεντρου, πλαγια εστι του ειδουσ πλευρα*). Конечно, это может быть поздняя схолия, но остается непонятным, для чего комментатор разъясняет термин «приданная», которого в этом месте Архимед не употребляет, и для чего ему подделываться под язык Архимеда и писать комментарий на дорийском диалекте. Как раз такой же перевод Архимедова термина для параметра на язык Аполлония, но не для гиперболы, а для параболы, встречаем мы в том же сочинении «О коноидах» III, 16, там же, т. I, стр. 272, 16; здесь Архимедов термин «удвоенная прямая, проведенная до оси конуса» объясняется как «прямая, помноженная на которую абсцисса равна квадрату ординаты» (*παρ' αν δυνανται αι απο τασ τομασ α διπλασια τασ μεχρι του αξονοσ*); *παρ' αν δυνανται* — выражение, не встречающееся больше нигде у Архимеда, но обычное у Аполлония. Однако, эту фразу Гейберг не вычеркивает и даже не подвергает никакому сомнению.

Остается еще сказать о нескольких чуждых Архимеду в его обычном словоупотреблении, но характерных для Аполлония терминах, которые Гейберг не решается вычеркивать, хотя их употребление противоречит их обычному смыслу у Архимеда. Это, кроме аполлониева термина для ординат, — *τεταγμενωσ κατηγμεναι*,[1] — еще наиболее интересные для нашего вопроса обозначения оси и диаметра.

Как мы говорили уже, Аполлоний для главного диаметра в параболе или для главных сопряженных диаметров в эллипсе и гиперболе либо употреблял выражение *αξων* (ось), т. е. то же выражение, что и мы, либо называл их главными диаметрами (*αρχικα*), а диаметрами — все прочие диаметры, кроме главных; наоборот, для Архимеда существует только один диаметр в параболе, который он поэтому и называет *α διαμετροσ* с артиклем (Quadr. parabol., 1, 2, 3, 4 и др.; Conoid. 11), в эллипсе —только два диаметра (т. е. оси): больший диаметр *α μειζων διαμετροσ* и меньший диаметр (*α ελασσων διαμετροσ*), ср. выражение *αι διαμετροι* в Quadr. parab. 6 и 7). Эти обозначения встречаются на каждом шагу

[1] Planor. equilibr., 10, там же, т. II, стр. 206, 10; Ephod., 1, там же, т. II, стр. 436, 2.

в сочинениях «О сечении прямоугольного конуса» и «О коноидах». Только в применении к сегменту параболы термином «диаметр» не обозначается ось самой параболы; здесь диаметром называется диаметр, сопряженный с основанием сегмента,[1] но и в этом случае диаметр только один. Прочие диаметры параболы Архимед называет «прямыми, параллельными диаметру» (много раз в «Квадратуре сечения прямоугольного конуса»), противопоставляя их диаметру[2]. Как называл Архимед неглавные диаметры эллипса и гиперболы — неизвестно, так как нигде их обозначения не сохранились.

Тот факт, что Архимеду известны свойства «второстепенных» диаметров конических сечений, разумеется, еще ничего не говорит о влиянии на него Аполлония. Несомненно, уже до Аполлония и Архимеда были известны особенности и свойства касательных к коническим сечениям, прямых, параллельных этим касательным, прямых, проведенных из центра кривой в точку касания в центральных конических сечениях, и прямых, проведенных параллельно оси в параболе, но вряд ли кому-либо могло прийти в голову рассматривать их, как нечто вполне аналогичное главным диаметрам (осям) и проведенным к ним ординатам. Целый ряд теорем о касательных конических сечений у Архимеда делает несомненным, что уже до него была доказана возможность проведения таких касательных в любой точке кривой и показано, как это можно сделать на чертеже. Для параболы Архимед[3] ссылается на теорему, согласно которой эта кривая рассекает подкасательную пополам; в сочинении «О плавающих телах» (II, 10) неоднократно требуется провести касательную к параболе. Но доказательство этой теоремы могло отличаться от доказательства у Аполлония (I, 33 и 35, 5, т. I, стр, 98, 105) и потому нет основания думать о влиянии последнего.

Точно так же, если Архимед на каждом шагу говорит о касательных к центральным коническим сечениям, то, несомненно, он мог доказать возможность проведения касательных в любой точке кривой и умел их строить. А для этого ему должно было быть известно основное свойство такой касательной, а именно — что ордината, проведенная на ось из точки касания, делит ось в гармоническом отношении (Аполлоний, I, теоремы 34 и 36, там же, стр. 101 и 107). При знании этой пропорции построение касательной к эллипсу (или гиперболе) при помощи циркуля и линейки не представляет трудностей, а если касательная проведена, то, соединив точку касания с центром и проведя из центра параллельную к этой касательной, сразу же находим две прямые, соответствующие тому, что Аполлоний называет сопряженными диаметрами. Но и в этом случае теорема могла быть доказана уже ранее Архимеда или самим Архимедом; поэтому говорить о влиянии Аполлония не приходится. Точно так же еще до Аполлония могло быть известно, что прямая, соединяющая точки касания двух параллельных касательных к эллипсу, проходит через центр («О коноидах», 16, 7, т. I, стр. 324, Аполлоний II, 27, 5, т. I, стр. 239), что прямая, проведенная из центра к точке касания, делит все хорды, параллельные этой касательной, пополам («О коноидах», 20, там же, стр. 340). Больше подозрения в смысле заимствования у Аполлония внушает мне теорема, устанавливающая для эллипса полную равноправность тех двух

[1] См. определение сегмента в кн. «О коноидах», теор. III, 7, т. I, стр. 279, 3—4.

[2] «Квадратура сечения прямоуг. конуса» 1, там же, т. II, стр. 266, 7; 2, стр. 266, 22, 4, 268, 7: α ΒΔ παρα ταν διαμετρον η αυτα α διαμετρος.

[3] «Квадратура сечения прямоуг. конуса», 2, там же, 5. «О коноидах», 13. «О плавающих телах», II, 8 и др.

центральных хорд, которые Аполлоний называет сопряженными диаметрами («О коноидах», теорема 19, там же, стр. 336); здесь in nuce уже заключена вся система диаметров Аполлония.

Но важнее следующий формальный факт. Как мы видели, Архимед называет диаметрами то, что Аполлоний называет осями.

Наряду с весьма многочисленными примерами такого обозначения, есть несколько случаев, когда Архимед придерживается аполлониевой терминологии. Так, в соч. De planorum aequilibriis (II, 10; 7, т. II, стр. 206) ось параболы называется, как и у Аполлония, главным диаметром ***αρχικα***, что предполагает существование других, неглавных диаметров, тем не менее эти второстепенные диаметры продолжают называться по старинке «линиями, параллельными диаметру» (***ητοι αρχικα τασ τομασ η παρα ταν διαμετρον***).

В трех местах сочинения «О коноидах» [15, 26 и 28, 7, т. 1, стр. 320, 27; 348, 25; 404, 28] под диаметрами понимаются не оси гиперболоида и эллипсоида, а те прямые, которые называет диаметрами Аполлоний. В самом деле, в теор. 15 проводится сечение через вершину конуса, объемлющего коноид (т. е. через точку пересечения асимптот) и произвольную точку на коноиде, а затем утверждается, что прямая, проведенная через вершину этого конуса и взятую произвольную точку, и будет диаметром гиперболы. Точно так же в теореме 26, касающейся гиперболы, и в теореме 28, касающейся эллипса, слово ***διαμετροι*** обозначает не оси, а любой из диаметров, resp. — любую пару сопряженных диаметров. Наконец, как справедливо отмечает сам же Гейберг, если в теореме 8 (т. II, стр. 292, 5) того же сочинения Архимед говорит о «втором диаметре, сопряженном с AB» (***τασ ετερασ διαμετρου, α εστι συζυγησ ται AB***), то «это показывает, что слово ***διαμετροσ*** употреблялось не только для осей, но и для других диаметров, и имело, вероятно, уже тогда тот же смысл, что у Аполлония I, опр. 4—6, 5, т. I, стр. 6—8».

Поскольку этих последних мест не решается вычеркивать ни один из издателей, мы вправе поставить вопрос: как объяснить, что выдающийся математик, придающий столь большое значение стройности системы аксиом, определений и доказательств, дает термины, покоющиеся на разных предпосылках и подчас исключающие друг друга. И является ли случайностью, что в тех единичных случаях, в которых Архимед отступает от привычной для него терминологии, он дает терминологию, в точности совпадающую с терминологией Аполлония?

Если не считать *все* эти места интерполяцией (а на это не решается даже Гейберг), то само собой напрашивается следующее объяснение: значительно более удобная, передовая и универсальная терминология Аполлония была хорошо известна Архимеду и имела большой успех среди математиков его времени. Как всякому специалисту, Архимеду нелегко было отказаться от привычной, установившейся в науке терминологии в угоду терминологии его молодого современника, повидимому, не внушавшего личных симпатий Архимеду, тем более, что в своей популярной книге Аполлоний использовал ряд открытий Архимеда. Но Архимед так хорошо освоился с терминологией Аполлония, что изредка невольно на нее сбивается. Я мог бы сослаться как на параллель на Кавальери, который с таким же упорством избегал новой алгебраической терминологии и символики, и, тем не менее, чувствуя превосходство алгебраических методов, не остался последовательным до конца, и подчас невольно сбивается на алгебру (см. мою вступительную статью к книге Б. Кавальери, Геометрия неделимых, М., 1940, стр. 68).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире, М., 1941.

2. С. Я. Лурье. Приближенные вычисления в древней Греции. Архив истории науки и техники, вып. 4, 1935.

2а. С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов, М., 1935.

2б. О. Нейгебауер. Лекции по истории античных математических наук, т. I. Догреческая математика (перевод С. Я. Лурье), М., 1937.

3. Г. Г. Цейтен. История математики в древности (перевод П. Юшкевича), М., 1932.

4. Alkarkhi. Kâfi fil Hisab, deutsch von Ad., Hochheim, Halle, 1878.

5. Apollonius Pergaeus, cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, Lipsiae, т. I, 1891, т. II, 1913.

6. Archimedes. Opera omnia edidit Torellius. Oxonii, 1792. Рец.: Jenaer Litteraturzeitung, 1795, п. 172—173, стр. 610—613.

7. Archimedes. Opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit I. L. Heiberg, Lipsiae, v. I, 1910; v. II, 1913; v. III. Eutocii Ascalonitae commentarii in Archimedem, 1881.

8. Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt von Nizze. Stralsund, 1824.

9. Bauer A. Die griechischen Kriegsaltertümer, München, 1893; Iw. Müller, Handbuch der Altertumswissenschaft, IV, 1, 2.

10. Borchardt. Eine Zeichnung an einer Mauer des Luqsortempels. Zeitschrift für ägyptische Sprache, 34, 1896.

11. Damianus. Optica, edidit R. Schoene, Berlin, 1897.

12. H. Diels. Die Fragmente der Vorsokratiker, 5 te Aufl, von Kranz, B. II, Berlin, 1935.

13. Euclidis opera ediderunt et latine interpretati sunt I. L. Heiberg und H. Menge, v. 1—VIII, 1883—1916; v. V, Scholia in Euclidem, 1888; v. VIII. Euclidis Phaenomena, ed. H. Menge, 1916.

14. Th. Heath. Archimedes Werke, deutsch von Kliem, Berlin, 1914.

15. Th. Heath. A History of Greek Mathematics, vol. I., Oxford, 1912.

16. I. L. Heiberg. Literarische Studien über Euclid, Leipzig, 1882.

17. I. L. Heiberg. Quaestiones Archimedeae., Kopenhagen, 1879.

18. I. L. Heiberg. Über die Kegelschnitte im Altertum. Zeitschrift für die Mathematik und Physik, XXV, 1880.

19. Inscriptiones Deli insulae, fasc. 2, Berlin, 1912 = Inscriptiones Graesae, vol. XI, fasc. 2.

20. O. Lehmann. Die tachygraphische Abkürzungen der griechischen Handschriften, Leipzig, 1880.

21. O. Neugebauer. Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, I, 4, 1931.

22. Proclus, Commentarius in I librum Euclidis, edidit Friedlein, Lipsiae, 1873.

23. Wilh. Schubart. Griechische Paläographie, München 1925 = Iwan Müller, Handbuch der Altertumwissenschaft, I, 4, 1.

24. Serenus. Opuscula, edidit Heiberg, Lipsiae, 1896.

25. The Sulvasutras by G. Thibaut. Journal of the Asiatic Society of Bengal, part I, from 1875, Calcutta 1875. — Herausgegeben und übersetzt von Bürk, Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft, 55, 1901, s. 579 (Text), 56, 1902, H. I. (Übersetzung).

26. F. Susemihl. Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit, B. I, Leipzig, 1891.

27. H. G. Zeuthen. Die Lehre von den Kugelschnitten im Altertum, Kopenhagen, 1886.