

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛИТИ З РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ ЗМІННОЇ КРИВИЗНИ

В інженерній практиці вже давно вживаються конструкції у вигляді плит, підкріплених кільцевими ребрами жорсткості. Задача розрахунку таких плит стала предметом досліджень ряду авторів. Зокрема, для плит, підкріплених круговими ребрами жорсткості різними методами одержані розв'язки задачі згину для багатьох випадків навантаження.

Методом рядів такі розв'язки одержані Г. М. Савіним [1], Д. В. Вайнбергом [2], Н. П. Флейшманом [3, 4, 5] та ін. В роботах [1] (глава VII, §§ 1—6) і [2] кільця жорсткості розглядались як тонкі плити, прогини яких задовольняють рівнянню Софі Жермен. В роботах [1] (глава VII, § 7), [3], [4], [5] припускається, що ці кільця являються тонкими пружними стержнями. Останнє припущення дозволило поставити і розв'язати для ряду частинних випадків задачу про оптимальне підкріплення краю кругового отвору в тонкій плиті.

Методом початкових параметрів К. А. Кітовер [6] розв'язав задачу осесиметричного згину круглої плити, підсиленої кількома концентричними ребрами жорсткості.

Задачі згину плит, підкріплених ребрами жорсткості змінної кривизни, є багато труднішими.

В ряді робіт [7, 8, 9] М. П. Шереметев вперше сформулював у функціях комплексної змінної граничні умови задачі згину тонкої плити, криволінійний край якої підкріплений пружним кільцем. Зокрема, для безмежної ізотропної плити з однорідним напруженим станом на безмежності М. П. Шереметевим [8, 9] одержано точний розв'язок задачі згину (методом інтегралів типу Коші) для випадку, коли плита ослаблена круговим отвором з підкріпленням краєм і наближений розв'язок (методом послідовних наближень) для плити з підкріпленням еліптичним отвором. Там же [8, 9] розв'язана задача згину для безмежної анізотропної плити з підкріпленням круговим отвором.

Питання про еквівалентне підкріплення криволінійного отвору в анізотропній або ізотропній плиті кільцем жорсткості змінного перерізу розглянуто автором в статті [10].

В даній роботі (короткий виклад див. [11]) досліджується згин плити, підсиленої кількома кільцевими ребрами жорсткості змінної кривизни.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тонку пружну ізотропну плиту, серединна площа якої займає деяку кінцеву багатозв'язну область S площини $z = x + iy$ з границею L , що складається із сукупності простих замкнутих кри-

вих L_j ($j=1, 2, \dots, m+1$) (див. рис. 1), із яких L_{m+1} охоплює всі останні. Плита підсилена l -кільцевими криволінійними ребрами жорсткості із другого матеріалу, осяові лінії яких позначимо через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$. Лінія $\Gamma = \sum \gamma_k$ розбиває область S на $l+1$ областей так, що $S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_l$. Для простоти припустимо, що області S_k ($k=1, 2, \dots, l$) однозв'язні, а область S_0 багатозв'язна і обмежена сукупністю кривих Γ' і $L = \sum L_j$.

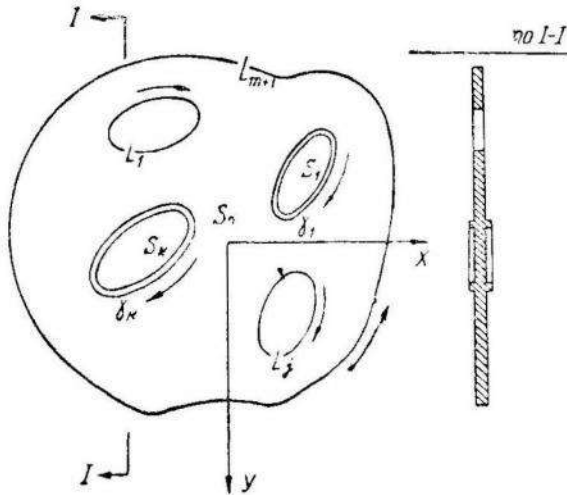


Рис. 1.

Допустимо також, що границі L і Γ' не дотикаються і не перетинаються.

В областях S_k ($k=0, 1, 2, \dots, l$) до плити прикладено задане довільне поперечне навантаження (розподілений тиск $q_k(x, y)$ і зосереджені сили), а на границі L задані зовнішні згинаючі моменти $m(s)$ і зусилля $p(s)$

$$M_n(s) = m(s),$$

$$N_n + \frac{\partial H_{n\tau}(s)}{\partial s} = p(s) \text{ на } L. \quad (1.1)$$

Ребра жорсткості розглядаються як пружні тонкі кільця постійної жорсткості на

згин та кручення, поведінка яких може бути описана теорією малих деформацій тонких криволінійних стержнів (див., напр., [12])

Припустимо також, що одна з головних осей інерції поперечних перерізів цих кілець жорсткості лежить в площині xoy . В цьому випадку ця головна вісь інерції в кожному поперечному перерізі співпадає з головною нормаллю до осі γ_k ($k=1, 2, \dots, l$) кільця. В зв'язку з малою шириною поперечних перерізів підкріплюючих кілець, припустимо, що спай між областями S_0 і S_k ($k=1, 2, \dots, l$) має місце відповідно по кривих γ_k , тобто вздовж осяових ліній ребер жорсткості, які розмежовують ці області.

Згинаючі моменти і зусилля, які діють на k -те кільце з боку області S_0 , позначимо через $m_{0k}(s)$ і $p_{0k}(s)$, а зусилля що діють на те ж кільце з боку області S_k — через $m_{kk}(s)$ і $p_{kk}(s)$ ($k=1, 2, \dots, l$). s — дуга контура γ_k , яка відраховується від деякої довільно вибраної початкової точки за годинниковою стрілкою. Якщо яке-небудь навантаження прикладено безпосередньо до ребра жорсткості, тобто вздовж γ_k , то на підставі прийнятих вище припущень воно може бути віднесено до будь-якої із сусідніх областей S_0 або S_k . Додатній напрямок перелічених вище сил і моментів схематично показаний на рис. 2, де наведено перетин плити вздовж лінії I—I (див. рис. 1).

Очевидно, що k -те кільце знаходиться під дією сумарного навантаження

$$\begin{aligned} m_k(s) &= m_{0k}(s) - m_{kk}(s); \\ p_k(s) &= p_{0k}(s) - p_{kk}(s). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Або, іншими словами, при переході з області S_0 в область S_k згина-

ючі моменти і перерізуючі сили терплять стрибки (поки що невідомі) $m_\kappa(s)$ і $p_\kappa^1(s)$.

Під дією навантаження (1.2) кільце деформується разом з плитами, що примикають до нього. На контурі γ_κ , очевидно, повинні задовольнятися умови рівності прогинів і деформацій

$$w_0 = w_\kappa = \Delta_\kappa; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_\kappa}{\partial n} = \Theta_{\tau\kappa}, \quad (1.4)$$

де w_0 — прогин плити в області S_0 ; w_κ — прогин в області S_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, l$); Δ_κ — прогин точок κ -го кільця; n — нормаль, зовнішня відносно

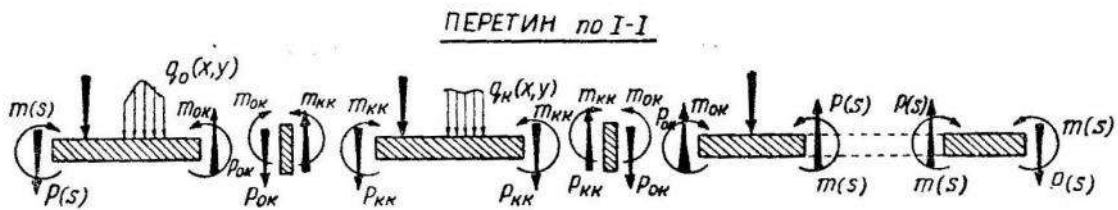


Рис. 2.

області S_0 ; $\Theta_{\tau\kappa}$ — кут кручення пружної лінії кільця, тобто кут повороту нормального перетину кільця навколо дотичної τ до контура γ_κ . Дотична направляється в бік зростання дуги s (див. рис. 1).

Продиференціюємо умову (1.3) по s . Тоді можна записати умову рівності деформацій у вигляді слідувочої комплексної комбінації:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial n} + i \frac{\partial w_0}{\partial s} &= \frac{\partial w_\kappa}{\partial n} + i \frac{\partial w_\kappa}{\partial s} \text{ на } \gamma_\kappa; \\ \frac{\partial w_\kappa}{\partial n} + i \frac{\partial w_\kappa}{\partial s} &= \Theta_{\tau\kappa} - i \Theta_{n\kappa} \text{ на } \gamma_\kappa, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $\Theta_{n\kappa} = -\frac{d\Delta_\kappa}{ds}$ — кут згину кільця, тобто кут повороту дотичної до осі кільця навколо нормалі в даній точці. За додатній напрямок відліку кутів $\Theta_{\tau\kappa}$ і $\Theta_{n\kappa}$ прийнято напрямок проти ходу годинникової стрілки.

В граничних умовах (1.5) доцільно зробити деякі перетворення. Для цього зауважимо, що

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n},$$

а також, що на контурі γ_κ

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}.$$

Склавши комплексну комбінацію

$$\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} = i \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

де t — афікс точки контура Γ , $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$, і приймаючи до уваги що $t\dot{t}=1$, перепишемо умову (1.5) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} &= \frac{\partial w_\kappa}{\partial x} + i \frac{\partial w_\kappa}{\partial y} \text{ на } \gamma_\kappa \\ \frac{\partial w_\kappa}{\partial x} - i \frac{\partial w_\kappa}{\partial y} &= -i\dot{t}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) \text{ на } \gamma_\kappa. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Як відомо [13], розв'язок поставленої задачі зводиться до визначення функцій $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ ($\kappa=0, 1, \dots, l$) від комплексного змінного $z=x+iy$, регулярних відповідно в кожній з областей S_κ ($\kappa=0, 1, 2, \dots, l$), крім тих точок, де прикладені зосереджені сили. Ці функції визначаються із граничних умов задачі (1.1), (1.2), (1.6), а через них прогин плити в області S_κ ($\kappa=0, 1, 2, \dots, l$) виражається формулою

$$w_\kappa = w_\kappa^1 + w_\kappa^0 = 2\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_\kappa(z) + \chi_\kappa(z)] + w_\kappa^0(x, y), \quad (1.7)$$

де $\chi_\kappa(z) = \int \psi_\kappa(z) dz$, а $w_\kappa^0(x, y)$ — який-небудь частинний розв'язок диференціального рівняння згину тонкої плити

$$D\Delta\Delta w_\kappa = q_\kappa(x, y). \quad (1.8)$$

Тут $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість; E — модуль Юнга; ν — коефіцієнт Пуассона; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Для спрощення дальших викладок і без обмеження загальності приймемо як частковий розв'язок $w_\kappa^0(x, y)$ ($\kappa=0, 1, 2, \dots, l$), розв'язок задачі для випадку відсутності ребер жорсткості.

Тоді

$$w_\kappa^1 = 2\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_\kappa(z) + \chi_\kappa(z)]$$

буде являти собою додатковий прогин, визваний в плиті наявністю ребер жорсткості. Цьому додатковому прогину відповідатимуть певні додаткові деформації і внутрішні зусилля в плиті. Функції $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ будуть, очевидно, функціями голоморфними у відповідних областях S_κ ($\kappa=0, 1, 2, \dots, l$). Через ці функції граничні умови (1.1), (1.2) і (1.6) можуть бути записані відповідно так:

$$\begin{aligned} -z\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t) &= -iC_{1j}\bar{t} + C_{2j} \\ &\text{на } L_j (j=1, 2, \dots, m+1); \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} -z\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t) &= -z\overline{\varphi_\kappa(t)} + \bar{t}\varphi_\kappa'(t) + \psi_\kappa(t) - \\ &- I_\kappa |2D(1-\nu)| \text{ на } \gamma_\kappa (\kappa=1, 2, \dots, l); \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t) = \overline{\varphi_\kappa(t)} + \bar{t}\varphi_\kappa'(t) + \psi_\kappa(t) \text{ на } \gamma_\kappa; \quad (1.11)$$

$$\overline{\varphi_\kappa(t)} + \bar{t}\varphi_\kappa'(t) + \psi_\kappa(t) = \frac{\dot{t}}{2i}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) - \frac{\partial w_\kappa^0}{\partial t} \text{ на } \gamma_\kappa, \quad (1.12)$$

де t — афікс точки контура L' ; τ — афікс точки на L ; $\kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}$; C_{1j} і C_{2j} — відповідно дійсна і комплексна сталі, які потрібно визначити.

$$I_\kappa = I_\kappa(t) = I_\kappa(s) = - \int_0^s \left[m_\kappa(s_1) - i \int_0^{s_1} p_\kappa(s_2) ds_2 \right] \bar{t} ds_1. \quad (1.13)$$

Функції $I_\kappa(t)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, l$), які залежать від стрибка навантаження вздовж γ_κ , поки що невідомі.

Умова (1.9) виражає те, що додаткові зусилля в плиті, які викликані наявністю ребер жорсткості, задовольняють нульовим граничним умовам на L . Умова (1.10) виражає наявність стрибків додаткових внутрішніх зусиль в плиті при переході через контур γ_κ . Умова (1.11) рівносильна рівності додаткових деформацій в сусідніх областях плити вздовж γ_κ , а остання умова (1.12) виражає рівність деформацій кільця і плити.

Права частина (1.12) залежить від деформацій кільця, які, очевидно, є функціями від його навантаження $m_\kappa(s)$ та $p_\kappa(s)$ і визначаються при інтегруванні основних рівнянь теорії малих деформацій тонких криволінійних стержнів.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАНИЧНОЇ УМОВИ (1.12) І ДЕЯКІ ВИСНОВКИ

Для перетворення умови (1.12) розглянемо рівновагу і деформацію тонкого пружного кільця γ_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, l$), яке знаходиться під дією навантаження $m_\kappa(s)$ і $p_\kappa(s)$ (1.2).

Позначимо через

$$\vec{\Theta}_\kappa(s) = \Theta_{\tau\kappa} \vec{\tau} + \Theta_{n\kappa} \vec{n} + \Theta_{b\kappa} \vec{b}$$

вектор повороту рухомих осей натурального тригранника з ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ при деформації кільця. Орт бінормалі $\vec{b}$ направлений вниз так само, як і вісь OZ . Крім того, введемо вектор

$$\vec{\varepsilon}_\kappa(s) = \delta\omega_{\tau\kappa} \vec{\tau} + \delta\omega_{n\kappa} \vec{n} + \delta\omega_{b\kappa} \vec{b},$$

де $\delta\omega_{n\kappa}$, $\delta\omega_{b\kappa}$, $\delta\omega_{\tau\kappa}$ — прирости головних компонентів кривизни і кручення кільця. Між векторами $\vec{\Theta}_\kappa(s)$ і $\vec{\varepsilon}_\kappa(s)$ існує відома залежність Клебша [12], а саме

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\tau\kappa} &= \frac{d\Theta_{\tau\kappa}}{ds} + \omega_{n\kappa} \Theta_{b\kappa} - \omega_{b\kappa} \Theta_{n\kappa}; \\ \delta\omega_{n\kappa} &= \frac{d\Theta_{n\kappa}}{ds} + \omega_{b\kappa} \Theta_{\tau\kappa} - \omega_{\tau\kappa} \Theta_{b\kappa}; \\ \delta\omega_{b\kappa} &= \frac{d\Theta_{b\kappa}}{ds} + \omega_{\tau\kappa} \Theta_{n\kappa} - \omega_{n\kappa} \Theta_{\tau\kappa}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $\omega_{n\kappa}$, $\omega_{b\kappa}$ та $\omega_{\tau\kappa}$ — головні компоненти кривизни і кручення кільця.

З другого боку компоненти вектора $\vec{\varepsilon}_\kappa(s)$ зв'язані з компонентами головного моменту

$$L_\kappa = L_{\tau\kappa} \vec{\tau} + L_{n\kappa} \vec{n} + L_{b\kappa} \vec{b}$$

внутрішніх сил, які діють в перетині s кільця, співвідношеннями Кірхгофа.

$$\delta\omega_{\tau\kappa} = \frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa}; \quad \delta\omega_{n\kappa} = \frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa}, \quad \delta\omega_{b\kappa} = \frac{L_{b\kappa}}{B_\kappa}, \quad (2.2)$$

де $L_{n\kappa}$ і $L_{b\kappa}$ — згинаючі моменти; $L_{\tau\kappa}$ — крутящий момент; A_κ і B_κ — жорсткості кільця на згин навколо осей $\vec{n}$ і $\vec{b}$; C_κ — жорсткість на кручення.

Рівняння рівноваги елемента стержня мають вигляд

$$\frac{d\vec{V}_\kappa}{ds} + \vec{p}_\kappa = 0; \quad \frac{d\vec{L}_\kappa}{ds} + (\vec{\tau}_\kappa \vec{V}_\kappa) + \vec{m}_\kappa = 0, \quad (2.3)$$

де $\vec{V}_\kappa$ — головний вектор внутрішніх зусиль, які діють в перерізі s кільця, $\vec{p}_\kappa$ і $\vec{m}_\kappa$ — зовнішня сила і згинаючий момент, що діють на одиницю довжини осі даного елемента кільця.

У нашому випадку (1.2)

$$\vec{p}_\kappa = p_\kappa(s) \vec{b}; \quad \vec{m}_\kappa = m_\kappa(s) \vec{\tau}. \quad (2.4)$$

Крім того,

$$\omega_{\tau\kappa} = 0; \quad \omega_{n\kappa} = 0; \quad \omega_{b\kappa} = \frac{1}{\varrho_\kappa}; \quad (2.5)$$

через те, що кожне підкріплююче кільце має сталий поперечний переріз, а його вісь γ_κ є плоскою кривою із змінним радіусом кривизни ϱ_κ . Приймаючи до уваги (2.5), перепишемо перші два співвідношення (2.1) так:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\tau\kappa}}{ds} &= \delta\omega_{\tau\kappa} + \Theta_{n\kappa} \cdot \frac{1}{\varrho_\kappa}; \\ \frac{d\Theta_{n\kappa}}{ds} &= \delta\omega_{n\kappa} - \Theta_{\tau\kappa} \cdot \frac{1}{\varrho_\kappa}. \end{aligned}$$

Складаючи комплексну комбінацію останніх рівнянь, знаходимо

$$\frac{d}{ds} (\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) = \delta\omega_{\tau\kappa} - i\delta\omega_{n\kappa} + \frac{i}{\varrho_\kappa} (\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}). \quad (2.6)$$

Помножимо обидві сторони (2.6) на $\dot{t} ds$ і проінтегруємо їх по s в границях від 0 до s . Одержимо

$$\int_0^s \frac{d}{ds} (\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) \dot{t} ds = \int_0^s (\delta\omega_{\tau\kappa} - i\delta\omega_{n\kappa}) \dot{t} ds + i \int_0^s \frac{1}{\varrho_\kappa} (\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) \dot{t} ds.$$

Обчислюючи тепер перший інтеграл по частинах і враховуючи, що

$$\frac{d\dot{t}}{ds} = \frac{d}{ds}(\dot{x} - i\dot{y}) = \ddot{x} - i\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\varrho_\kappa} - i\frac{\dot{x}}{\varrho_\kappa} = -\frac{i\dot{t}}{\varrho_\kappa}, \quad (2.7)$$

знаходимо

$$(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa})\dot{t} = \int_0^s (\delta\omega_{\tau\kappa} - i\delta\omega_{n\kappa})\dot{t} ds + C_{3\kappa}, \quad (2.8)$$

де $C_{3\kappa} = (\Theta_{\tau\kappa}^\circ - i\Theta_{n\kappa}^\circ)\dot{t}_0$ — комплексна стала інтегрування. Підставляючи (2.2) в (2.8), одержимо

$$(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa})\dot{t} = \int_0^s \left(\frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} - i\frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} \right) \dot{t} ds + C_{3\kappa}. \quad (2.9)$$

Для того, щоб виразити інтеграл в правій частині (2.9) через навантаження на кільце (2.4), спроекуємо друге рівняння (2.3) на рухомі осі $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$.

Приймаючи до уваги, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\varrho_\kappa}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{\varrho_\kappa}; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = 0,$$

одержуємо

$$\frac{dL_{\tau\kappa}}{ds} = \frac{L_{n\kappa}}{\varrho_\kappa} - m_\kappa(s); \quad \frac{dL_{n\kappa}}{ds} = -\frac{L_{\tau\kappa}}{\varrho_\kappa} + V_{b\kappa}. \quad (2.10)$$

де $V_{b\kappa}$ — перерізуюча сила, яка діє в перерізі s кільця.

Помножимо тепер обидві частини першого рівняння (2.10) на $\dot{t}ds$ і проінтегруємо їх в границях від 0 до s

$$\int_0^s \frac{dL_{\tau\kappa}}{ds} \dot{t} ds = \int_0^s \frac{L_{n\kappa}}{\varrho_\kappa} \dot{t} ds - \int_0^s m_\kappa(s) \dot{t} ds.$$

Вичисляючи перший інтеграл по частинах і враховуючи (2.7), а також те, що $\dot{t}\dot{t} = 1$, знаходимо

$$L_{\tau\kappa} = -i\dot{t} \int_0^s L_{\tau\kappa} \frac{\dot{t}}{\varrho_\kappa} ds + \dot{t} \int_0^s \left[V_{b\kappa} - \frac{L_{\tau\kappa}}{\varrho_\kappa} \right] \dot{t} ds + C'_{\kappa} \dot{t}, \quad (2.11)$$

де C'_{κ} — комплексна стала інтегрування.

Поступаючи аналогічно з другим рівнянням (2.10), одержуємо

$$L_{n\kappa} = -i\dot{t} \int_0^s L_{n\kappa} \frac{\dot{t}}{\varrho_\kappa} ds + \dot{t} \int_0^s \left[V_{b\kappa} - \frac{L_{\tau\kappa}}{\varrho_\kappa} \right] \dot{t} ds + C''_{\kappa} \dot{t} \quad (2.12)$$

де C''_{κ} — також комплексна стала інтегрування. Множачи (2.12) на i і віднімаючи його з (2.11), одержуємо далі

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = -\dot{t} \int_0^s [m_{\kappa}(s) + iV_{b\kappa}] \dot{t} ds + C_{4\kappa} \dot{t}, \quad (2.13)$$

де $C_{4\kappa} = (L_{\tau\kappa}^{\circ} - iL_{n\kappa}^{\circ}) \dot{t}_0$ — нова комплексна стала. Інтегруючи перше рівняння (2.3) з врахуванням (2.4), маємо

$$V_{b\kappa} = - \int_0^s p_{\kappa}(s) ds + V_{b\kappa}^{\circ},$$

де $V_{b\kappa}^{\circ}$ — дійсна стала. Підставляючи одержане значення $V_{b\kappa}$ в (2.13) знаходимо

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = -\dot{t} \int_0^s [m_{\kappa}(s_1) - i \int_0^{s_1} p_{\kappa}(s_2) ds_2] \dot{t} ds_1 - i\dot{t} V_{b\kappa}^{\circ} (\bar{t} - \bar{t}_0) + C_{4\kappa} \dot{t}, \quad (2.14)$$

де t_0 — афікс точки $s=0$.

Приймаючи до уваги (1.14), позначимо

$$I_{\kappa}^*(s) = \dot{t} [I_{\kappa}(s) - iV_{b\kappa}^{\circ} (\bar{t} - \bar{t}_0) + C_{4\kappa}]. \quad (2.15)$$

Тоді (2.14) запишеться у вигляді

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = I_{\kappa}^*(s)$$

Звідси

$$\begin{aligned} L_{\tau\kappa} &= \frac{1}{2} [I_{\kappa}^*(s) + \overline{I_{\kappa}^*(s)}], \\ L_{n\kappa} &= \frac{1}{2i} [\overline{I_{\kappa}^*(s)} - I_{\kappa}^*(s)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Підставляючи (2.16) в (2.9), одержуємо

$$\theta_{\tau\kappa} - i\theta_{n\kappa} = \frac{1}{2} \int_0^s J_{\kappa}(s) ds + C_{3\kappa}, \quad (2.17)$$

де позначено

$$J_{\kappa}(s) = \left[I_{\kappa}^*(s) \left(\frac{1}{C_{\kappa}} + \frac{1}{A_{\kappa}} \right) + \overline{I_{\kappa}^*(s)} \left(\frac{1}{C_{\kappa}} - \frac{1}{A_{\kappa}} \right) \right] \dot{t}. \quad (2.18)$$

Значить, гранична умова (1.12) може бути записана остаточно у вигляді

$$\overline{\varphi_{\kappa}(\bar{t})} + \bar{t} \varphi'_{\kappa}(t) + \psi_{\kappa}(t) = \frac{1}{4i} \int_0^s J_{\kappa}(s) ds + \frac{C_{3\kappa}}{2i} - \frac{\partial w_{\kappa}^{\circ}}{\partial \bar{t}} \text{ на } \gamma_{\kappa}. \quad (2.19)$$

Для визначення сталих інтегрування $C_{4\kappa}$ і $V_{b\kappa}$ користуємося умовами однозначності деформацій і прогинів кільця, які легко виводяться із (2.9), (2.16) і (2.17) і після деяких перетворень приймають відповідно вигляд

$$\int_{\gamma_\kappa} J_\kappa(s) ds = 0; \quad \text{Im} \int_{\gamma_\kappa} t J_\kappa(s) ds = 0. \quad (2.20)$$

Цікаво зауважити, що для визначення внутрішніх зусиль в пружному кільці γ_κ достатньо визначити лише функцію $I_\kappa^*(s)$ (2.15) через яку моменти $L_{\tau\kappa}$, $L_{n\kappa}$ і перерізуюча сила $V_{b\kappa}$ в кільці виражаються за формулами (див. (2.16) і (2.10))

$$L_{\tau\kappa} = \text{Re} I_\kappa^*(s); \quad L_{n\kappa} = -\text{Im} I_\kappa^*(s); \quad (2.21)$$

$$V_{b\kappa} = \frac{1}{\varrho_\kappa} \text{Re} I_\kappa^*(s) - \text{Im} I_\kappa^{*'}(s) \quad (2.22)$$

Внутрішні моменти в кільці вигідно виражати також і за іншими формулами, які одержуються з (2.9) і (1.6) у вигляді

$$\frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} + i \frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} = -\frac{1}{2} \left(\Delta w_\kappa + 4t^2 \frac{\partial^2 w_\kappa}{\partial t^2} \right), \quad (2.23)$$

де замість w_κ можна писати також w_0 (див. (1.4)). Після ряду перетворень формулі (2.23) можна придати вигляд

$$\frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} + i \frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} [M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}]. \quad (2.24)$$

Оскільки величина моментів $L_{n\kappa}$ і $L_{\tau\kappa}$ не повинна залежати від вибору області S_0 або S_κ , в якій розглядаються моменти M_n , M_τ і $H_{n\tau}$, ми робимо висновок, що права частина (2.24) залишається інваріантною при переході через γ_κ з області S_κ в область S_0 , тобто

$$\left\{ \frac{1}{Eh^3} [M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}] \right\}^- = \left\{ \frac{1}{Eh^3} [M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}] \right\}^+. \quad (2.25)$$

Тут і в дальшому значками $+$ (плюс) або $-$ (мінус) позначені граничні значення при $z \rightarrow t$ відповідно зліва або справа від γ_κ , тобто з області S_0 або S_κ .

В окремому випадку круглого ребра жорсткості радіуса R , що знаходиться в умовах симетричного відносно центра навантаження, маємо

$$L_{\tau\kappa} = H_{n\tau}^+ = H_{n\tau}^- = 0; \\ L_{n\kappa} = R(M_n^+ - M_n^-). \quad (2.26)$$

Отже, із (2.25) одержуємо при $(Eh^3)^+ = (Eh^3)^-$, що

$$L_{n\kappa} = \frac{R}{\nu} (M_\tau^+ - M_\tau^-). \quad (2.27)$$

Враховуючи (2.26), виводимо із (2.24) для осесиметричного випадку, що при $M_n^- = 0$, тобто, коли кільце, яке підкріплює край кругового отвору в плиті, вільне від зовнішнього навантаження,

$$\left(\frac{M_n}{M_\tau}\right)^+ = \frac{\delta_1}{1 - \nu^2 + \nu\delta_1}, \quad (2.28)$$

де $\delta_1 = A/RD$.

Якщо $M_n^+ = 0$, тобто кільце (вільне від зовнішніх зусиль) підкріплює край круглої плити, то з (2.24) одержуємо, що

$$\left(\frac{M_\tau}{M_n}\right)^- = \frac{\nu^3 + \nu\delta_1 - 1}{\delta_1}. \quad (2.29)$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

В граничних умовах поставленої задачі (1.9), (1.10), (1.11) і (2.19) фігурують поки що невідомі функції I_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, l$).

Відносно ж шуканих функцій $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, l$), можна сказати, що вони голоморфні відповідно в кожній з областей S_κ , на які розбивається область S лінією Γ . Але ці функції зазнають розриви при переході через Γ . Якщо ввести дві функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, кусочно голоморфні в області S з лінією стрибків Γ , можна переписати вищевказані граничні умови у вигляді

$$-\kappa \overline{\varphi(\tau)} + \bar{\tau} \varphi'(\tau) + \psi(\tau) = -iC_{1j} \bar{\tau} + C_{2j} \text{ на } L_j \\ (j=1, 2, \dots, m+1); \quad (3.1)$$

$$-\kappa \overline{\varphi^+(t)} + \bar{t} \varphi'^+(t) + \psi^+(t) = \\ = -\kappa \overline{\varphi^-(t)} + \bar{t} \varphi'^-(t) + \psi^-(t) + (\kappa+1) \overline{g(t)} \quad \text{на } \Gamma; \quad (3.2)$$

$$\overline{\varphi^+(t)} + \bar{t} \varphi'^+(t) + \psi^+(t) = \varphi^-(t) + \bar{t} \varphi'^-(t) + \psi^-(t) \quad \text{на } \Gamma; \quad (3.3)$$

$$\overline{\varphi^-(t)} + \bar{t} \varphi'^-(t) + \psi^-(t) = P(t) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.4)$$

Через $g(t)$ і $P(t)$ позначені невідомі функції, які на кожному контурі γ_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, l$) приймають відповідно значення

$$g_\kappa(t) = -\frac{1}{8D} \bar{I}_\kappa; \\ P_\kappa(t) = \frac{1}{4i} \int_0^s J_\kappa(s) ds + \frac{1}{2i} C_{3\kappa} - \frac{\partial w_\kappa^\circ}{\partial t}. \quad (3.5)$$

За допомогою формул (2.18) і (2.15) легко виразити $P_\kappa(t)$ через $g_\kappa(t)$ і навпаки. Так, наприклад,

$$P_{\kappa}(t) = \frac{1}{2i} C_{3\kappa} - \frac{\partial w_{\kappa}^{\circ}}{\partial t} + \frac{1}{4i} \int_0^S \left\{ \left(\frac{1}{C_{\kappa}} + \frac{1}{A_{\kappa}} \right) [C_{4\kappa} - iV_{b\kappa}^{\circ}(\bar{t} - \bar{t}_0) - 8D\overline{g_{\kappa}(\bar{t})}] + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{C_{\kappa}} - \frac{1}{A_{\kappa}} \right) \dot{\bar{t}} [\bar{C}_{4\kappa} + iV_{b\kappa}^{\circ}(t - t_0) - 8Dg_{\kappa}(t)] \right\} ds. \quad (3.6)$$

Розглянемо спочатку умови (3.2) і (3.3). Віднімаючи з першої другу і переходячи до спряжених значень, знаходимо¹

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = -g(t) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.7)$$

Приймаючи до уваги (3.7), із (3.3) виводимо далі

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = h(t) \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.8)$$

де

$$h(t) = \overline{g(\bar{t})} + \bar{t} g'(t); \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.9)$$

Таким чином, для визначення функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ ми прийшли до двох задач лінійного спряження (3.7) і (3.8). Розв'язуючи ці задачі, знаходимо [14]

$$\varphi(z) = \varphi^{\circ}(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{t - z}, \\ \psi(z) = \psi^{\circ}(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t) dt}{t - z}, \quad (3.10)$$

де $\varphi^{\circ}(z)$ і $\psi^{\circ}(z)$ — невідомі функції, які голоморфні у всій області S і підлягають визначенню.

Підставляючи функцію (3.10) в граничну умову (3.1), одержуємо

$$-\kappa \overline{\varphi^{\circ}(\tau)} + \bar{\tau} \varphi^{\circ\prime}(\tau) + \psi^{\circ}(\tau) = \Phi(\tau) - iC_{1j} \bar{\tau} + C_{2j} \quad \text{на } L_j \quad (3.11) \\ (j = 1, 2, \dots, m+1),$$

$$\text{де} \quad \Phi(\tau) = \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{g(t)} d\bar{t}}{\bar{t} - \bar{\tau}} + \frac{\bar{\tau}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{(t - \tau)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t) dt}{t - \tau}. \quad (3.12)$$

Отже, функції $\varphi^{\circ}(z)$ і $\psi^{\circ}(z)$ визначаються розв'язком першої основної задачі згину плити, серединна площа якої займає багато-зв'язну область S , що обмежена контуром L . Розв'язуючи цю задачу, ми знаходимо функції $\varphi^{\circ}(z)$ і $\psi^{\circ}(z)$, а потім з (3.10) — кусочно голоморфні функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, які виражені через $g(t)$.

Підставляючи знайдені функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ в останню граничну умову (3.4), права частина якої також містить $g(t)$ (див. (3.6)), одер-

¹ Граничну умову (3.7) можна одержати й іншим шляхом, якщо виходити з інваріантності (2.25).

жимо інтегральне рівняння на Γ для визначення функції $g(t)$. Знаючи $g(t)$, ми із (3.10) остаточно визначимо функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$.

Якщо контур L_{m+1} відсутній, тобто область S — безмежна площа з отворами, все сказане вище може бути застосовано з незначними змінами.

Зауваження. Якщо контур L не вільний, а на ньому задані величини $w_0(s)$ і $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ (n — зовнішня нормаль до L) то, очевидно, все сказане вище залишається в силі, крім граничної умови (3.1), яка повинна бути замінена умовою

$$\overline{\varphi(\tau)} + i\varphi'(\tau) + \psi(\tau) = 0. \quad (3.13)$$

Після підстановки функцій (3.10) в (3.13), одержуємо в цьому випадку

$$\overline{\varphi^\circ(\tau)} + i\varphi^{\circ'}(\tau) + \psi^\circ(\tau) - \Phi_*(\tau) \quad \text{на } L, \quad (3.14)$$

$$\text{де } \Phi_*(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{g(t)} d\bar{t}}{\bar{t} - \tau} + \frac{\tau}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{(t - \tau)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t) dt}{t - \tau}. \quad (3.15)$$

Отже, для визначення функцій $\varphi^\circ(z)$ і $\psi^\circ(z)$ доводиться розв'язувати на цей раз другу основну задачу згину плити. Після визначення цих функцій обчислюємо $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ за формулами (3.10), а потім підставляємо останні в (3.4) для визначення невідомої функції $g(t)$.

Якщо контур L плити шарнірно опертий, то гранична умова (3.1) замінюється відомими граничними умовами вільного спираання краю плити (див., напр. [15]), а далі робимо так само, як і вище.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
2. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд. АН УРСР, 1952.
3. Флейшман Н. П. К вопросу о подкреплении круговых отверстий упругими кольцами. Автореферат диссертации, Львов, 1950.
4. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. XXII, серія фізико-математична, в. 5, 1953, стор. 84—95.
5. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. XXIX, серія механіко-математична, в. 6 (1), 1954, стор. 105—111.
6. Китовер К. А. Круглые тонкие плиты. Л., 1953.
7. Шереметев М. П. Доповіді АН УРСР, № 6, 1950.
8. Шереметев М. П. Укр. мат. журн., т. V, № 1, 1953, стор. 58—79.
9. Шереметев М. П. Пластины с подкрепленным краем. Автореферат диссертации. Институт механики АН СССР, 1953.
10. Флейшман Н. П. Доповіді АН УРСР, № 4, 1954, стор. 311—4.
11. Флейшман Н. П. Доповіді та повідомлення ЛДУ, в. 6, ч. 2, 1955, стор. 92—5.
12. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. II, гл. XI. Машгиз, 1952.
13. Лехницкий С. Г. Прикладная математика и механика, т. 2, в. 2, 1938, стор. 181—210.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
15. Лурье А. И. Известия Ленинградского политехнического института, т. XXXI, 1928, стор. 305—320.