Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

І. О. ПРУСОВ

ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА З ПІДКРІПЛЕНИМ КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Рішення подібної задачі дано І. Г. Арамановичем [4] за методом Д. Й. Шермана. Нами дається рішення цієї задачі методом лінійного спряження, який вперше запропонував Н. І. Мусхелішвілі [1, 2] для півплощини і пізніше узагальнив І. Н. Карцивадзе [3] для однозв'язних областей, що відображаються на круг раціональною функцією.

Нехай пружна невагома півплощина $y<0$ на глибині h має отвір радіуса 1, в який впаяне кільце сталого перерізу з внутрішнім контуром радіуса r. Позначимо через L, L_1 і L_0 відповідно границю півплощини, контура спая і внутрішнього контура кільця (рис.).

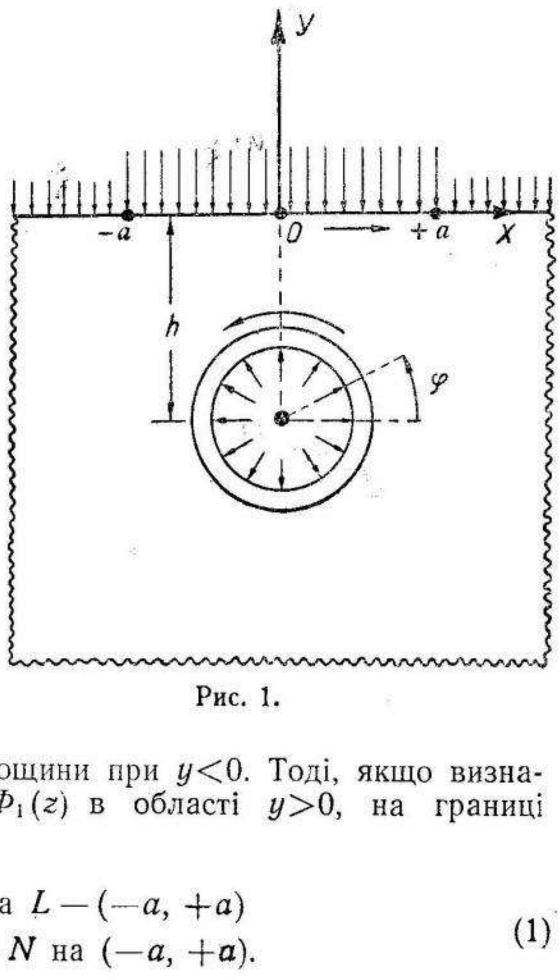

Рис. 1.

Знайдемо пружний стан півплощини і кільця, якщо на L за винятком відрізка $(-a, +a)$, на відрізку $(-a, +a)$ і на L_0 відповідно діє тиск q, $q+N$ і P.

Нехай $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ — функції напруг Колосова-Мусхелішвілі, визначені в області півплощини при $y<0$. Тоді, якщо визначити відомим способом [2] функцію $\Phi_1(z)$ в області $y>0$, на границі півплощини одержимо умову

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=\begin{cases} q \text{ на } L-(-a,+a)\\ q+N \text{ на } (-a,+a). \end{cases} \qquad (1)$$

Рівнянню (1) задовільнимо, поклавши

$$\Phi_1(z)=-\frac{1}{2}q+\frac{N}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a}+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa(z-z_0)^{-\kappa}+b_\kappa(z+z_0)^{-\kappa}] \quad \text{при } y<0; \qquad (2)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2}q + \frac{N}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a} + \sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa(z-z_0)^{-\kappa} + b_\kappa(z+z_0)^{-\kappa}]$$

$$\text{при } y > 0, \qquad (3)$$

де $z_0 = -ih$, a_κ і b_κ — невідомі постійні, які мають дійсне значення при κ парному і уявне — при κ непарному.

Функцію $\Psi_1(z)$ знайдемо по формулі $\Psi_1(z) = -\Phi_1(z) - \bar{\Phi}_1(z) - z\Phi'_1(z)$ при $y<0$, що, враховуючи (2) і (3), дає

$$\Psi_1(z) = -\frac{Naz}{\pi i(z^2-a^2)} + \sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(a_\kappa + z_0 a_{\kappa-1}) - \bar{b}_\kappa](z-z_0)^{-\kappa} +$$

$$+ \sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(b_\kappa - z_0 b_{\kappa-1}) - \bar{a}_\kappa](z+z_0)^{-\kappa}. \qquad (4)$$

Введемо заміну $z = \xi + z_0$. Тоді з (2) і (4) одержимо

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta + z_0) = -\frac{1}{2}q + \frac{N}{2\pi i}\ln\frac{\zeta + z_0 - a}{\zeta + z_0 + a} +$$

$$+ \sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa\zeta^{-\kappa} + b_\kappa(\zeta + 2z_0)^{-\kappa}] \quad \text{при } |\zeta| > 1; \qquad (5)$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_1(\zeta + z_0) + \bar{z}_0\Phi'_1(\zeta + z) = \frac{Na(\zeta + 2z_0)}{\pi i[(\zeta + z_0)^2 - a^2]} +$$

$$+ \sum_{\kappa=2}^{\infty}\{[(\kappa-1)(a_\kappa + 2z_0 a_{\kappa-1}) - \bar{b}_\kappa]\zeta^{-\kappa} + [(\kappa-1)b_\kappa - \bar{a}_\kappa](\zeta + 2z_0)^{-\kappa}\}. \qquad (6)$$

При ζ по модулю, близькому до одиниці, з (5), і (6), якщо розкласти праві частини по степенях ζ, одержимо

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}(M_\kappa + A_\kappa)\zeta^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty}a_\kappa\zeta^{-\kappa} \quad (|\zeta| > 1); \qquad (7)$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}(T_\kappa + B_\kappa)\zeta^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(a_\kappa + 2z_0 a_{\kappa-1}) - \bar{b}_\kappa]\zeta^{-\kappa} \quad (|\zeta| > 1), \quad (8)$$

де

$$M_0 = -\frac{1}{2}\left(q + \frac{Na}{\pi}\right); \; M_\kappa = (-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{N}{2\pi i\kappa}\left[\frac{1}{(z_0-a)^\kappa} - \frac{1}{(z_0+a)^\kappa}\right] \quad (\kappa \geqslant 1);$$

$$T_\kappa = (-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{N}{2\pi i}\left[\frac{z_0+a}{(z_0-a)^{\kappa+1}} - \frac{z_0-a}{(z_0+a)^{\kappa+1}}\right] \quad (\kappa \geqslant 0);$$

$$A_\kappa = (-1)^\kappa\sum_{n=2}^{\infty}(2z_0)^{-\kappa-n}C_{n+\kappa-1}^{\kappa}b_n;$$

$$B_\kappa = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^\kappa (2z_0)^{-\kappa-n} C^{\kappa}_{n+\kappa-1} [(n-1) b_n - \bar{a}_n];$$

α — кут між прямими, що проходять через центр колового отвору і точки $-a$ і $+a$ на прямолінійному контурі L.

Поширюючи визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta|<1$, з (7) і (8) при $|\zeta|<1$ знайдемо

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \{(\kappa-1)(\bar{M}_\kappa + \bar{A}_\kappa)\zeta^{-\kappa} + [(\kappa+1)(\bar{a}_{\kappa+2} - 2z_0 \bar{a}_{\kappa+1}) - b_{\kappa+1}]\zeta^\kappa\} -$$

$$- \sum_{\kappa=2}^{\infty} (\kappa+1)\bar{a}_\kappa \zeta^\kappa - (\bar{T}_{\kappa-2} + \bar{B}_{\kappa-2})\zeta^{-\kappa}]. \qquad (9)$$

Нехай $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ — функції напруг в кільці, визначені при $|\zeta|<1$. Тоді, поширюючи визначення функції $\Phi_1(\zeta)$ на область $|\zeta|>1$, на контурі спая одержимо граничні умови

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi}; \qquad \Phi_1^+(\sigma) = \Phi_1^-(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi};$$

$$\varkappa\Phi^-(\sigma) + \Phi^+(\sigma) = 2\mu g'(\sigma); \qquad \varkappa_1\Phi_1^+(\sigma) + \Phi_1^-(\sigma) = 2\mu_1 g'(\sigma). \quad (10)$$

Звідки, після деяких перетворень, маємо

$$[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)]^+ - [\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)]^- = 0 \qquad \text{на } L_1; \qquad (11)$$

$$[\Phi_1(\sigma) - r_1\Phi(\sigma)]^+ + r_2[\Phi_1(\sigma) - r_1\Phi(\sigma)]^- = 0, \qquad \text{на } L_1, \qquad (12)$$

де

$$r_1 = \frac{1+\varkappa}{(1+\varkappa_1) r_0}; \qquad r_2 = \frac{r_0 + \varkappa}{1 + r_0\varkappa_1}; \quad r_0 = \frac{\mu}{\mu_1};$$

$\varkappa$ і μ, $\varkappa_1$ і μ_1 — пружні постійні пластинки і кільця.

Рівняння (11) і (12) задовольняються, якщо покласти

$$\Phi_1(\zeta) + \Phi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P_\kappa \zeta^\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad (|\zeta| \lesseqgtr 1), \qquad (13)$$

$$\Phi_1(\zeta) - r_1\Phi(\zeta) = \begin{cases} \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} P'_\kappa \zeta^\kappa + \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} & (|\zeta|<1), \\ -\dfrac{1}{r_1}\left(\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} P'_\kappa \zeta^\kappa + \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa}\right) & (|\zeta|>1). \end{cases} \qquad (14)$$

Розв'язавши рівняння (13) і (14) відносно функції $\Phi(\zeta)$ і $\Phi_1(\zeta)$, знайдемо їх значення як при $|\zeta|>$ для $|\zeta|$, який достатньо мало відрізняється від 1. Потім, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ζ в одержаному значенні функції $\Phi(\zeta)$ і її значенні згідно (7) і (9), знайдемо коефіцієнти P_κ, N_κ, P'_κ і N'_κ через раніш введені, а тим самим знайдемо і функцію $\Phi_1(\zeta)$ у вигляді

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} E_\kappa \zeta^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} F_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad (|\zeta| < 1); \tag{15}$$

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} E'_\kappa \zeta^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} F'_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad (|\zeta| > 1), \tag{16}$$

$$E_0 = \frac{1}{1+r_2}\left[(r_1 r_2 + 2r_2 - r_1)(A_0 + M_0) + (r_1 - r_2)(a_2 - b_2)\right];$$

$$E_\kappa = \frac{1}{1+r_2}\left[r_2(1+r_1)(A_\kappa + M_\kappa) + \right.$$

$$\left. + (r_2 - r_1)\left\{(\kappa+1)(\overline{a}_\kappa - \overline{a}_{\kappa+2} + 2z_0\overline{a}_{\kappa+1}) + b_{\kappa+2}\right\}\right];$$

$$F_\kappa = \frac{1}{1+r_2}\left[r_2(1+r_1)a_\kappa + (r_1 - r_2)\left\{(\kappa-1)(\overline{A}_\kappa + \overline{M}_\kappa) + \overline{T}_{\kappa-2} + \overline{B}_{\kappa-2}\right\}\right];$$

$$E'_0 = \frac{1}{1+r_2}\left[r_1 r_2 - r_1 - 2)(A_0 + M_0) + (1 + r_1)(a_2 - b_2)\right];$$

$$E'_\kappa = \frac{1}{1+r_2}\left[r_1 r_2 - 1)(A_\kappa + M_\kappa) - \right.$$

$$\left. - (1 + r_1)\left\{(\kappa+1)(\overline{a}_\kappa - \overline{a}_{\kappa+2} + 2z_0\overline{a}_{\kappa+1}) + b_{\kappa+2}\right\}\right];$$

$$F'_\kappa = \frac{1}{1+r_2}\left[r_1 r_2 - 1)a_\kappa + (1 + r_1)\left\{(\kappa-1)(\overline{A}_\kappa + \overline{M}_\kappa) + \overline{T}_{\kappa-2} + \overline{B}_{\kappa-2}\right\}\right].$$

Далі покладемо $\zeta = r\zeta_0$. Тоді з (15) одержимо

$$\Phi_2(\zeta_0) = \Phi_1(r\xi_0) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} r^{-\kappa} E_\kappa \zeta_0^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} r^{-\kappa} F_\kappa \zeta_0^{-\kappa} \qquad (|\zeta_0| > 1). \tag{17}$$

Поширюючи визначення функції $\Phi_2(\zeta_0)$ на область $|\zeta_0| < 1$, знайдемо

$$\Phi_2(\zeta_0) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} r^{-\kappa}\left[r^{-2} - 1)(\kappa+1)\overline{F}_\kappa + r^{-2}E'_\kappa\right]\zeta_0^\kappa +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} r^\kappa \left[(1 - r^{-2})(\kappa - 1)\overline{E}_\kappa + r^{-2}F'_\kappa\right]\zeta_0^{-\kappa} + (r^{-2} - 1)\overline{E}_0 + E'_0 r^{-2}$$

$$(|\zeta_0| < 1). \tag{18}$$

Гранична умова на внутрішнім контурі кільця буде така:

$$\Phi_2^+(\sigma_0) - \Phi_2^-(\sigma_0) = P, \tag{19}$$

що, враховуючи (17) і (18), дає слідуючу систему для визначення коефіцієнтів a_κ і b_κ:

$$(1 - 2r^2)E_0 + E'_0 = r^2 P;$$

$$(1-r^2)(\kappa+1)\overline{F}_\kappa + E'_\kappa - E_\kappa r^{2\kappa+2} = 0 \quad (\kappa \geqslant 1);$$

$$(1-r^2)(\kappa-1)\overline{E}_\kappa - F'_\kappa + F_\kappa r^{-2\kappa+2} = 0 \quad (\kappa \geqslant 2).$$

В окремому випадку, якщо покласти $r = 0{,}8$, $a = h = 2$, $E = 26 \cdot 10^3$ *кг/см²*, $E_1 = 140 \cdot 10^3$ *кг/см²*, $\nu = 0{,}3$, $\nu_1 = 0{,}16$ (ν, ν_1 — коефіцієнти Пуассона), $\varkappa = 1{,}8$, $\varkappa_1 = 2{,}36$, для компонентів напруг одержимо:

В кільці на контурі спая:

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=0} = 2{,}32P - 4{,}04q - 2{,}46N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=0} = -0{,}264P - 0{,}890q - 0{,}630N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 2{,}35P - 4{,}06q - 2{,}65N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = -0{,}264P - 0{,}889q - 0{,}589N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2{,}42P - 4{,}08q - 2{,}50N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -0{,}261P - 0{,}891q - 0{,}443N.$$

В точці A:

$$\sigma_x = 0{,}325P - 1{,}14q - 1{,}56N.$$

В кільці на контурі L_0:

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=0} = 3{,}21P - 4{,}99q - 5{,}94N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 3{,}26P - 5{,}02q - 5{,}42N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2{,}89P - 4{,}85q + 1{,}02N.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сооб. АН Груз. ССР, т. 11, № 10, 1941.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, М., 1954.

3. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сооб. АН Груз. ССР, т. 7, № 8, 1946.

4. Араманович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. ДАН СССР, т. 104, № 3, 1955.