Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

І. О. ПРУСОВ

РОЗТЯГ БЕЗКОНЕЧНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ КІЛЬЦЕМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглядається всесторонній розтяг безконечної ізотропної пластинки, в круговий отвір якої до моменту розтягу впаяно без попереднього натягу кільце з другого матеріалу, обмежене по зовнішньому контуру колом, а по внутрішньому — центрально розміщеним з ним еліпсом.

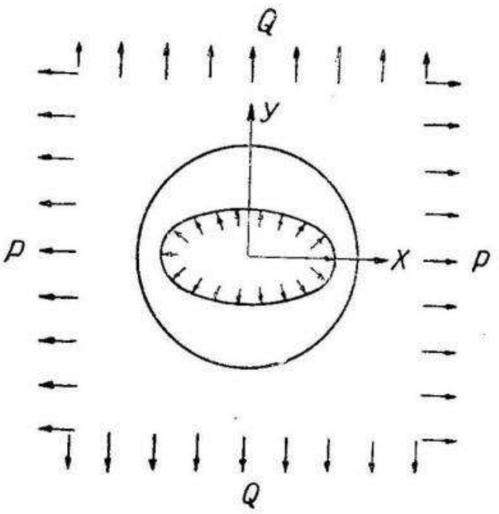

Рис. 1.

Задача рішається методом лінійного спряження [1, 2]. Рішення будується таким шляхом, що граничні умови на контурі спаю виконуються тотожньо, навіть якщо обмежитись конечним числом членів в розкладі в ряд функції напруження.

Нехай R — радіус отвору, L і L_1 — відповідно контур спаю і еліптичний контур кільця, по осям якого спрямовані осі декартової системи координат XOY (рис. 1).

Знайдемо напружений стан в пластинці і підкріплюючому кільці, поклавши, що на безконечності пластинка розтягується рівномірно розподіленими силами інтенсивності

$$\sigma_x = P, \quad \sigma_y = Q, \quad \tau_{xy} = 0, \tag{1}$$

а внутрішній контур кільця піддається рівномірному тиску q.

Введемо в розгляд функцію $z=\omega(\zeta)=R\zeta$, яка конформно перетворює зовнішність контуру L комплексної площини z на зовнішність одиничного кола γ комплексної площини ζ і позначимо через $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ функції напруження Колосова-Мусхелішвілі, які визначають напружений стан в пластинці і кільці.

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ визначені при $|\zeta|>1$, в області, яка відповідає області пластинки. Розширимо визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta|<1$, поклавши при $|\zeta|<1$,

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\omega'(\zeta)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\omega(\zeta)\overline{\Phi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{2}$$

З останньої формули маємо

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] - \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta) \quad \text{при } |\zeta|>1. \tag{3}$$

Компоненти напруження і зміщення через функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ виражаються у вигляді [1]

$$\sigma_\rho + \sigma_\varphi = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right]; \tag{4}$$

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} = \Phi(\zeta) - \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \bar{\zeta}^2\left[\frac{\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{\omega(\zeta)}{\varrho^2\,\omega'(\zeta)}\right]\overline{\Phi'(\zeta)} +$$

$$+ \bar{\zeta}^2\,\overline{\omega'(\zeta)}\left[\frac{1}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\varrho^2\,\omega'(\zeta)}\right]\overline{\psi(\zeta)}; \tag{5}$$

$$2\mu(u' + iv') = i\zeta\omega'(\zeta)\left[\varkappa\Phi(\zeta) + \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right] - i\varrho^2\,\omega'(\zeta)\left[\frac{\bar{\zeta}\,\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} -\right.$$

$$\left. - \frac{\omega(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)}\right]\overline{\Phi'(\zeta)} - i\varrho^2\,\omega'(\zeta)\,\overline{\omega'(\zeta)}\left[\frac{\bar{\zeta}}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\zeta\omega'(\zeta)}\right]\overline{\psi(\zeta)}, \tag{6}$$

де

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \zeta = \varrho e^{i\varphi},$$

На основі рівнянь (5) і (6) для функції $\Phi(\zeta)$ маємо граничні умови

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} \qquad \text{на } \gamma; \tag{7}$$

$$\varkappa\left[\omega'(\sigma)\,\Phi(\sigma)\right]^- + \left[\omega'(\sigma)\,\Phi(\sigma)\right]^+ = 2\mu g'(\sigma) \qquad \text{на } \gamma. \tag{8}$$

Аналогічним шляхом для функції $\Phi_1(\zeta)$, розширивши її визначення на область $|\zeta|>1$, одержимо

$$\Phi_1^+(\sigma) - \Phi_1^-(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} \qquad \text{на } \gamma; \tag{9}$$

$$\varkappa_1\left[\Phi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\right]^+ + \left[\Phi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\right]^- = 2\mu_1\,g'(\sigma) \qquad \text{на } \gamma, \tag{10}$$

де $\varkappa$ і μ — пружні постійні матеріалу пластинки; $\varkappa_1$ і μ_1 — пружні постійні матеріалу кільця.

З рівнянь (7)—(10), після виключення невідомих, які стоять в правих частинах, маємо

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \Phi_1^+(\sigma) - \Phi_1^-(\sigma) \qquad \text{на } \gamma; \tag{11}$$

$$\varkappa\Phi^-(\sigma) + \Phi^+(\sigma) = r\left[\varkappa_1\,\Phi_1^+(\sigma) + \Phi_1^-(\sigma)\right] \qquad \text{на } \gamma; \tag{12}$$

де через r позначено відношення $\frac{\mu}{\mu_1}$.

З рівнянь (11) і (12) шляхом їх лінійної комбінації, одержимо

$$\left[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)\right]^+ - \left[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)\right]^- = 0; \tag{13}$$

$$\left[\Phi_1(\sigma) - r_1\,\Phi(\sigma)\right]^+ + r_2\left[\Phi_1(\sigma) - r_1\,\Phi(\sigma)\right]^- = 0, \tag{14}$$

де

$$r_1 = \frac{1+\varkappa}{r(1+\varkappa_1)}; \qquad r_2 = \frac{r+\varkappa}{1+r\varkappa_1}.$$

Очевидно, що рівняння (13) буде виконуватись, якщо покладемо

$$\Phi_1(\zeta)+\Phi(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} M_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad \text{при } |\zeta|\leqq 1. \tag{15}$$

Далі покладемо $\Phi_1(\zeta)-r_1\Phi(\zeta)=\begin{cases}\Omega(\zeta) & \text{при } |\zeta|<1,\\ -\dfrac{1}{r_2}\Omega(\zeta) & \text{при } |\zeta|>1.\end{cases}$ (16)

Тоді з (14) одержимо рівняння, яке буде виконуватись, коли покладемо

$$\Omega(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad \text{при } |\zeta|\leqq 1.$$

Тому з рівняння (16) маємо

$$\Phi_1(\zeta)-r_1\Phi(\zeta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} & \text{при } |\zeta|<1,\\ \displaystyle-\frac{1}{r_2}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa}\right) & \text{при } |\zeta|>1.\end{cases} \tag{17}$$

Розв'язавши рівняння (15) і (17) відносно $\Phi(\zeta)$ і $\Phi_1(\zeta)$, одержимо

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(M_\kappa-M'_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(N_\kappa-N'_\kappa)\zeta^{-\kappa}\right] \quad \text{при } |\zeta|<1; \tag{18}$$

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(M_\kappa+\frac{M'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(N_\kappa+\frac{N'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^{-\kappa}\right] \quad \text{при } |\zeta|>1; \tag{19}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(r_1 M_\kappa+M'_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(r_1 N_\kappa+N'_\kappa)\zeta^{-\kappa}\right] \text{при } |\zeta|<1; \tag{20}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(r_1 M_\kappa-\frac{M'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(r_1 N_\kappa-\frac{N'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^{-\kappa}\right] \text{при } |\zeta|>1. \tag{21}$$

Якщо далі врахувати, що функція $\Phi(\zeta)$, визначена на всій площині змінного ζ (з лінією струбків на γ), в околі нуля і безконечно віддаленої точки в нашому випадку має вигляд

$$\Phi(\zeta)=\Gamma+0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \text{ при } \zeta\to\infty, \qquad \Phi(\zeta)=\frac{\Gamma'}{\zeta^2}+0\,(1) \text{ при } \zeta\to 0,$$

де

$$\Gamma=\frac{1}{4}(P+Q), \qquad \Gamma'=\frac{1}{2}(Q-P),$$

то з рівнянь (18) і (19) знайдемо, що

$$M_0 + \frac{1}{r^2} M'_0 = (1 + r_1)\Gamma, \qquad N_1 - N'_1 = 0,$$

$$M_\kappa + \frac{1}{r_2} M'_\kappa = 0 \ (\kappa \geqslant 1), \quad N_2 - N'_2 = (1 + r_1)\Gamma',$$

$$N_1 + \frac{1}{r_2} N'_1 = 0, \qquad N_\kappa - N'_\kappa = 0 \ (\kappa \geqslant 3).$$

А тоді праві частини в співвідношеннях (18)—(21) через невідомі коефіцієнти M_κ і N_κ виразяться так:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1 + r_2}{1 + r_1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} M_\kappa \zeta^\kappa - \Gamma r_2 + \frac{\Gamma'}{\zeta^2} \qquad \text{при } |\zeta| < 1; \qquad (18')$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1 + r_2}{(1 + r_1) r_2} \sum_{\kappa=2}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} + \Gamma - \frac{1}{\zeta^2} \frac{\Gamma'}{r_2} \qquad \text{при } |\zeta| > 1; \qquad (19')$$

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{r_1 - r_2}{1 + r_1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} M^\kappa \zeta^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} - \frac{\Gamma'}{\zeta^2} + \Gamma r_2 \qquad \text{при } |\zeta| < 1; \qquad (20')$$

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} M_\kappa \zeta^\kappa + \frac{r_1 r_2 - 1}{(1 + r_1) r_2} \sum_{\kappa=2}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} + \frac{\Gamma'}{r_1 \zeta^2} - \Gamma \qquad \text{при } |\zeta| > 1. \qquad (21')$$

M_κ і N_κ — взагалі кажучи, комплексні постійні. Однак в нашому випадку, внаслідок геометричної і силової симетрії, ці постійні будуть дійсними числами. Крім того, на тій самій основі коефіцієнти при непарних степенях змінного ζ дорівнюють нулю.

Невідомі, які входять в рівняння (18)—(21), знайдемо, задовольнивши граничні умови на внутрішньому контурі кільця. Маючи це на меті, введемо нову відображаючу функцію

$$z = \omega_0(\zeta_0) = R_1 \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right), \qquad (22)$$

яка дає конформне відображення зовнішності контуру L_1 на зовнішність одиничного круга $|\zeta_0| > |\sigma_0| = 1$, коло якого позначимо через γ_0.

Нехай $\Phi_2(\zeta_0) = \Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_2(\zeta_0) = \Psi_1(\zeta)$ — функції Колосова-Мусхелішвілі, визначені в частині області $|\zeta_0| > 1$, яка відповідає області кільця, де на основі (1) і (22)

$$\zeta = r_0 \left(\zeta_0 + \frac{m}{r_0} \right); \qquad r_0 = \frac{R_1}{R} < 1. \qquad (23)$$

Розширимо визначення функції $\Phi_2(\zeta_0)$ на область $|\zeta_0| < 1$, поклавши

$$\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0) = -\omega'_0(\zeta_0)\overline{\Phi}_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) + \frac{\omega_0(\zeta_0)}{\zeta_0^2}\overline{\Phi}'_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) + \frac{\overline{\omega}'_0(1/\zeta_0)}{\zeta_0^2}\overline{\Psi}_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)$$

$$\text{при } |\zeta_0| < 1. \qquad (24)$$

Тоді, виходячи з (5), маємо граничну умову

$$[\omega'_0(\sigma_0)(\Phi_2(\sigma_0)]^+ - [\omega'(\sigma_0)\,\Phi_2(\sigma_0)]^- = q\,\omega'_0(\sigma_0) \qquad \text{на } \gamma_0. \tag{25}$$

Знайдемо тепер вираз функції $\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)$ як при $|\zeta|>1$, так і при $|\zeta|<1$ через параметри M_κ і N_κ. Підставляючи в (20′) значення ζ з (23) і помноживши праву і ліву частини (20′) на $\omega'_0(\zeta_0)$, в результаті після нескладних перетворень одержимо

$$\omega'_0(\zeta_0)\,\Phi_2(\zeta_0) = R_1\sum_{\kappa=0}^{\infty}(A_\kappa - mA_{\kappa+2})\,\zeta_0^\kappa + R_1\sum_{\kappa=4}^{\infty}[B_\kappa - mB_{\kappa-2})\,\zeta_0^{-\kappa} + R_1\frac{B_1 - mA_0}{\zeta_0^2}$$

$$\text{при } |\zeta_0|>1, \tag{26}$$

де

$$B_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n r_0^n m^{\frac{n+\kappa}{2}} C_n^{\frac{n+\kappa}{2}} + \sum_{n=2}^{\kappa}(-m)^{\frac{\kappa-n}{2}} C_{\frac{\kappa+n}{2}-1}^{\frac{\kappa-n}{2}} b_n r_0^{-n} \qquad (\kappa \geqslant 2);$$

$$A_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n r_0^n m^{\frac{n-\kappa}{2}} C_n^{\frac{n-\kappa}{2}} \quad (\kappa \geqslant 0); \qquad a_0 = r_3 M_0 + \Gamma r_2;$$

$$b_2 = N_2 - \Gamma'; \qquad a_\kappa = r_3 M_\kappa \quad (\kappa \geqslant 2);$$

$$b_\kappa = N_\kappa \quad (\kappa \geqslant 4); \qquad r_3 = \frac{1-r}{1+r\varkappa_1}.$$

Виходячи з формул (20) і (21) і формули, аналогічної (3), в якій ζ по модулю треба вважати меншим одиниці, знайдемо, $\Psi_1(\zeta)$, а потім і функцію $\Psi_2(\zeta_0)$, визначену при $|\zeta_0|>1$ в області кільця, у вигляді

$$\Psi_2(\zeta_0) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A'_\kappa \zeta_0^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} B'_\kappa \zeta_0^{-\kappa}, \tag{27}$$

де

$$A'_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a'_n r_0^n m^{\frac{n-\kappa}{2}} C_n^{\frac{n-\kappa}{2}} \qquad (\kappa \geqslant 0);$$

$$B'_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a'_n r_0^n m^{\frac{n+\kappa}{2}} C_n^{\frac{n+\kappa}{2}} + \sum_{n=2}^{\kappa}(-m)^{\frac{\kappa-n}{2}} C_{\frac{\kappa+n}{2}-1}^{\frac{\kappa-n}{2}} b'_n r_0^{-n} \qquad (\kappa \geqslant 2)$$

$$a'_0 = -r_3 M_2 + r_4 N_2 + \frac{\Gamma'}{r_2}; \quad b'_2 = r_3 M_0 + \Gamma r_2 + M_0 - \Gamma;$$

$$b'_4 = 3(N_2 - \Gamma') + M_2; \quad r_4 = \frac{\varkappa - r\varkappa_1}{r+\varkappa};$$

$$a'_\kappa = -(\kappa+1) r_3 M_{\kappa+2} + r_4 N_{\kappa+2} \quad (\kappa \geqslant 2);$$

$$b'_\kappa + (\kappa-1) N_{\kappa-2} + M_{\kappa-2} \qquad (\kappa \geqslant 6).$$

Далі, на основі (24) знайдемо вираз для функції $\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)$ при $|\zeta_0|<1$

$$\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)=R_1\sum_{\kappa=4}^{\infty}[(\kappa-1)(A_\kappa+mA_{\kappa-2})+A'_{\kappa-2}-mA'_\kappa]\zeta_0^{-\kappa}-$$

$$-R_1\sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa+1)(B_\kappa+mB_{\kappa+2})+mB'_\kappa-B'_{\kappa+2}]\zeta_0^\kappa+$$

$$+R_1(-A_0-mA'_0+B'_2-mB_2)+R_1(A'_0+mA_0+A_2-mA'_2)\zeta_0^{-2} \qquad (28)$$

Будемо вимагати, щоб праві частини (26) і (28) задовольняли граничній умові (25). Тоді, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ_0, одержимо систему

$$-A_0-mA'_0+B'_2-mB_2=A_0-mA_2+q;$$

$$A'_0+mA_0+A_2-mA'_2=B_2-mA_0-mq;$$

$$(\kappa+1)(B_\kappa+mB_{\kappa+2})+mB'_\kappa-B'_{\kappa+2}=-A_\kappa+mA_{\kappa+2}\quad(\kappa\geqslant 2); \qquad (29)$$

$$(\kappa+1)(A_{\kappa+2}+mA_{\kappa+4})+A'_\kappa-mA'_{\kappa+2}=B_{\kappa+2}-mB_\kappa\quad(\kappa\geqslant 2),$$

з якої, враховуючи прийняті раніше позначення, знайдемо M_κ і N_κ де κ, як вже відмічалось, приймає тільки парні значення.

В окремому випадку при $m=0$ з системи (29) одержимо

$$M_0=\frac{\Gamma}{\Delta_1}(1-r_2+2r_0^2r^2);\quad M_2=\frac{3\Gamma'}{\Delta_2}[1-r_0^2)(1+r_2r_4)r_0^2];$$

$$N_2=\frac{\Gamma'}{\Delta_2}[r_2r_3r_0^2(3-6r_0^2+4r_0^4)+r_3r_0^8-r_2-r_0^2];\quad M_\kappa=N_\kappa=0\quad(\kappa\geqslant 4)$$

$$\Delta_1=1+r_3-2r_0^2r_3,\quad \Delta_2=r_2[3r_3(1-r_0^2)^2r_0^2+(r_0^6r_3-1)(1-r_4r_0^2)],$$

що співпадає з результатом Г. М. Савіна в роботі [3].

П р и к л а д. Нехай матеріал пластинки і кільця має пружні постійні $\mu=4{,}42\cdot10^5$ *кг/см²*, $\nu=0{,}3$, $\mu_1=8{,}1\cdot10^5$ *кг/см²*, $\varkappa=\varkappa_1=2{,}8$, а лінійні розміри кільця дані відношеннями $R:a:b=15:14:13$. Тоді, обмежуючись тільки п'ятьма невідомими членами в системі (29), тобто рахуючи M_0, M_2, N_2, M_4, N_4 відмінними від нуля, а $M_\kappa=N_\kappa=0$ $(\kappa>6)$ — рівними нулю, для компонент напруг одержимо формули.

На еліптичному контурі кільця:

$$\varphi_\varphi=\frac{1}{R(\varphi)}[1{,}753P+1{,}570Q+1{,}792q+(-3{,}053P+3{,}202Q+$$

$$+0{,}199q)\cos2\varphi+(-0{,}055P+0{,}077Q+0{,}018q)\cos4\varphi+$$

$$+(0{,}094P-0{,}114Q-0{,}017q)\cos6\varphi+(-0{,}009P+0{,}011Q+$$

$$+0{,}0014q)\cos8\varphi \qquad R(\varphi)=1-2m\cos2\varphi+m^2.$$

В кільці на контурі спаю:

$$\sigma_\varphi=1{,}420P+1{,}596Q+1{,}535q+(-2{,}019P+2{,}399Q+0{,}182q)\cos2\varphi+$$

$$+(-0{,}225P+0{,}287Q+0{,}052q)\cos4\varphi;$$

$$\sigma_\rho = 0{,}199\,P + 0{,}114\,Q - 0{,}738\,q + (-0{,}211\,P + 0{,}178\,Q - 0{,}028\,q)\cos 2\varphi +$$
$$+ (-0{,}040\,P + 0{,}026\,Q - 0{,}012\,q)\cos 6\varphi;$$

В пластинці на контурі спаю:

$$\sigma_\varphi = 0{,}802\,P + 0{,}886\,Q + 0{,}738\,q + (-1{,}130\,P + 1{,}333\,Q + 0{,}170\,q)\cos 2\varphi +$$
$$+ (-0{,}128\,P + 0{,}160\,Q - 0{,}027\,q)\cos 4\varphi.$$

При цьому, граничні умови на еліптичному контурі кільця виконуються приблизно. Найгірше вони виконуються в точках, які визначаються полярним кутом $\varphi = 0$ і $\frac{\pi}{2}$ для нормального тиску σ_ρ і кутом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ для $\tau_{\rho\varphi}$. В цих точках

$$\sigma_\rho = -0{,}0169P + 0{,}0230Q - 0{,}995q \quad \text{при } \varphi = 0;$$
$$\sigma_\rho = +0{,}0268P - 0{,}0439Q - 1{,}014q \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2};$$
$$\tau_{\rho\varphi} = +0{,}0683P - 0{,}0857Q - 0{,}015q \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Як бачимо, точність виконання граничних умов залежить від значення P, Q і q. При $Q \leq P \leq 2Q$ похибка підрахунків практично мала. Очевидно, для одержання рішення з більш точним виконанням граничних умов необхідно взяти більше членів M_κ і N_κ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сооб. АН Груз. ССР, т. VII, № 8, 1946.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.