Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. П. ШЕРЕМЕТЄВ, В. І. ТУЛЬЧИЙ

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ЗГИНУ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕННЯМ

I. ГРАНИЧНІ УМОВИ ЗАДАЧІ

Нехай задана область анізотропної пластинки ослаблена отвором, край якого підкріплений тонким пружним ізотропним кільцем постійного перерізу. До зовнішнього контуру пластинки прикладені згинаючі і крутячі моменти, а на підкріпляюче кільце діють віднесені до одиниці довжини дуги згинаючі моменти $m(s)$ і перерізаючі сили $p(s)$.

Нехай одна з головних осей інерції поперечного перерізу кільця лежить в площині недеформуючої осі кільця. Припустимо, що пластинка в кожній точці має одну площину пружної симетрії, паралельну її середній площині. Помістивши початок координат в центрі тяжіння кільця, приймемо середню площину за площину xoy і направимо вісь oz вниз.[1]

Якщо прийняти вісь підкріплюючого кільця за контур спаю, то її рівняння в параметричній формі буде мати вигляд:

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

де s — довжина дуги осі підкріплюючого кільця.

За додатній напрямок обходу контуру приймемо такий, при якому область пластинки залишається зліва.

При взаємодії плити і кільця з умов статичної рівноваги випливає рівність

$$M_n = M_{1n}, \; N_n + \frac{\partial H_{n\tau}}{\partial s} = N_{1n} + \frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial s}, \tag{1.1}$$

де M_{1n}, N_{1n}, $H_{1n\tau}$ — відповідні згинаючі моменти, перерізаючі сили і крутячі моменти, які діють на кільце зі сторони пластинки, а M_n, N_n, $H_{n\tau}$ — однойменні величини, але характеризуючі дію кільця на пластинку.

С. Г. Лехніцький в роботі [1] показав, що умови (1.1) рівносильні співвідношенням

$$\frac{4}{3} h^3 Re \left[\frac{P_1}{\mu_1} \varphi'_1(z_1) + \frac{P_2}{\mu_2} \psi'_2(z_2) \right] = -\int_0^s (M_{1n}\, dy + f dx) - C_0 x + C_1; \tag{1.2}$$

$$\frac{4}{3} h^3 Re [q_1 \varphi'_1(z_1) + q_2 \psi'_2(z_2)] = \int_0^s (-M_{1n} d x + f dy) + C_0 y + C_2. \tag{1.3}$$

[1] Припускаємо, що контур спаю має дотичну, яка неперервно змінюється.

Тут C_0, C_1, C_2 — дійсні постійні, крім того, покладено

$$f=\int_0^s\left(\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial \alpha}+N_{1n}\right)d\alpha .$$

Далі, на контурі спаю пластинки і кільця, крім співвідношень (1.1), мають місце рівності

$$[W(s)=W_1(s)],\ \frac{\partial W}{\partial n}=\gamma, \tag{1.4}$$

де $W(s)$, $W_1(s)$ — відповідно прогин середньої площини пластинки і прогин осі кільця, а γ — кут кручення пружної лінії кільця.

Використовуючи залежність $W_1(s)$ і γ від діючого на кільце навантаження, ми, як показано в роботі [2], одержимо

$$\frac{\partial W_1}{\partial s}=\Theta_{Ox}\dot{y}-\Theta_{Oy}\dot{x}+\dot{y}\int_0^s\varepsilon_x\,ds-\dot{x}\int_0^s\varepsilon_y ds\,; \tag{1.5}$$

$$\gamma=\Theta_{Ox}\dot{x}+\Theta_{Oy}\dot{y}+\dot{x}\int_0^s\varepsilon_x\,ds+\dot{y}\int_0^s\varepsilon_y\,ds\,.$$

Причому,

$$\varepsilon_x=\left(\frac{1}{A}\dot{y}^2+\frac{1}{C}\dot{x}^2\right)L_x+\dot{x}\,\dot{y}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_y\,;$$

$$\varepsilon_y=\left(\frac{1}{A}\,\dot{x}^2+\frac{1}{C}\dot{y}^2\right)L_y+\dot{x}\,\dot{y}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_x\,. \tag{1.6}$$

І крім того,

$$L_y+iL_x=L_{Oy}+iL_{Ox}+[\bar{z}(s)-\bar{z}_0(s)]\;V_{Oz}-i\int_0^s\bar{z}M_{1n}\,d\alpha-\int_0^s[\bar{z}(s)-$$

$$-\bar{z}(\alpha)]\left[N_{1n}+\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial\alpha}\right]d\alpha-\int_0^s[\bar{z}(s)-\bar{z}(\alpha)]\,p(\alpha)d\alpha-i\int_0^s\bar{z}(s)m(s)\,ds\,, \tag{1.7}$$

де L_x і L_y — проекції головного моменту всіх сил, діючих на підкріпляюче кільце Θ_{Ox}, Θ_{Oy}, L_{Ox}, L_{Oy}, V_{Oz} — довільні дійсні постійні, $\dot{x}=\frac{dx}{\partial s}$, $\dot{y}=\frac{dy}{\partial s}$ а A і C — відповідні жорсткості на згин і крутіння для підкріпляючого кільця.

Як відомо [2], співвідношення (1.4) еквівалентні двом умовам, записаним з допомогою функцій φ_1 і ψ_2.

$$2Re\,[\varphi'_1(z_1)+\psi'_2(z_2)]=\frac{\partial W_1}{\partial s}\dot{x}-\gamma\dot{y}\,;$$

$$2Re\,[\mu_1\varphi'_1(z_1)+\mu_2\psi'_2(z_2)]=\frac{\partial W_1}{\partial s}\dot{y}+\gamma\dot{x}. \tag{1.8}$$

З метою скорочення запису надалі, покладемо

$$\Omega_1(z_1z_2)=\frac{P_1}{\mu_1}\varphi'_1(z_1)+\frac{P_2}{\mu_2}\psi'_2(z_2),\ \ \Omega_2(z_1z_2)=\varphi'_1(z_1)+\psi'_2(z_2);$$

$$\Omega_3(z_1z_2)=q_1\varphi'_1(z_1)+q_2\psi'_2(z_2),\ \ \Omega_4(z_1z_2)=\mu_1\varphi'_1(z_1)+\mu_2\psi'_2(z_2). \tag{1.9}$$

Прийнявши до уваги (1.9), помітимо, що

$$2Re\,\Omega_2(z_1z_2)=Re\left\{\left[\frac{\partial W_1}{\partial s}-i\gamma\right]\dot{\bar{z}}\right\},\ \ 2Re\,\Omega_4(z_1z_2)=-$$

$$-I_m\left\{\left[\frac{\partial W_1}{\partial s}-i\gamma\right]\dot{\bar{z}}\right\}. \tag{1.10}$$

Поклавши $A=\kappa C$, де κ — довільна величина, і переконуючись в справедливості рівностей

$$k\dot{x}+i\dot{y}=\frac{1}{2}[\dot{z}(1+k)+\dot{\bar{z}}(k-1)],\ \ \dot{x}+ik\dot{y}=$$

$$=\frac{1}{2}[\dot{z}(1+k)-\dot{\bar{z}}(k-1)] \tag{1.11}$$

на основі (1.5) і (1.6) з (1.10), знайдемо

$$2Re\,\Omega_2(z_1z_2)=Re\left\{-\Theta_{Oy}-\frac{1}{2A}\int\limits_0^s[(L_y+iL_x)(k+1)-\right.$$

$$\left.-\dot{\bar{z}}^2(L_y-iL_x)(k-1)]\,ds\right\}; \tag{1.12}$$

$$2Re\,\Omega_4(z_1z_2)=I_m\left\{\Theta_{Ox}+\frac{1}{2A}\int\limits_0^s[(L_y+iL_x)(k+1)-\right.$$

$$\left.-\dot{\bar{z}}^2(L_y-iL_x)(k-1)]\,ds\right\}. \tag{1.13}$$

Праві частини співвідношень (1.12) і (1.13), як це видно з (1.7), можуть бути явно виражені через діюче на кільце навантаження.

Розглянувши випадок ізотропної пластинки і міркуючи аналогічно викладеному вище, остаточно одержимо

$$(3+\mu)\overline{\varphi}(\bar{z})-(1-\mu)[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]=\frac{1}{2D}\int\limits_0^s\left[-M_{1n}+\right.$$

$$\left.+i\int\limits_0^s\left(\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial\alpha}+N_{1n}\right)d\alpha\right]\dot{\bar{z}}\,ds_1+iC\bar{z}-C_1; \tag{1.14}$$

$$\overline{\varphi}(\overline{z}) + \overline{z}\varphi'(z) + \psi(z) = -\frac{1}{2}(\Theta_{Oy} + i\Theta_{Ox}) - \frac{1}{4A}\int_0^s [(L_y + iL_x)(\kappa+1) + $$

$$+ (\kappa - 1)\dot{\overline{z}}^2 (iL_x - L_y)]\, ds, \quad (1.15)$$

де також прийнято, що $A = \kappa C$, а вираз $L_y + iL_x$ має значення, вказане в (1.7).

Інколи, при рішенні конкретних задач, доцільно замість чотирьох умов виду (1.2), (1.3), (1.12), (1.13) користуватись однією, яка може бути одержана з них слідуючим шляхом.

В рівностях (1.2) помножимо першу на i і вирахуємо її з другої. Використовуючи при цьому позначення (1.9) знайдемо

$$\frac{4}{3} h^3 [Re\, \Omega_3(z_1 z_2) - i Re\, \Omega_1'(z_1 z_2)] = \int_0^s (-M_{1n} + if)\dot{\overline{z}}\, ds + iC_0 \overline{z} + C_3, \quad (1.16)$$

де $C_3 = C_2 - iC_1$.

Подібним шляхом з рівностей (1.10) одержимо

$$Q(z_1 z_2) = \left(\frac{\partial W_1}{\partial s} - i\gamma\right)\dot{\overline{z}}, \quad (1.17)$$

де покладено

$$Q(z_1 z_2) = 2\{Re\, \Omega_2(z_1 z_2) - i Re\, \Omega_4(z_1 z_2)\}. \quad (1.17a)$$

Враховуючи (1.13) і диференцюючи рівність (1.17) по s, одержимо

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{1}{2A}[(L_y + iL_x)(\kappa + 1) - \dot{\overline{z}}^2 (L_y - iL_x)(\kappa - 1)]. \quad (1.18)$$

Далі, підставимо в праву частину (1.18) замість виразу $L_y + iL_x$ його значення з (1.7). Об'єднуючи перетворену таким шляхом рівність (1.18) з співвідношенням (1.16), одержимо

$$B_1 \dot{z}_1 \Phi'_1(z_1) + B_2 \dot{z}_2 \Psi'_2(z_2) + B_3 \dot{\overline{z}}_1 \overline{\Phi}'_1(\overline{z}_1) + B_4 \dot{\overline{z}}_2 \overline{\Psi}'_2(\overline{z}_2) +$$

$$+ R_1 \Phi_2(z_1) + R_2 \Psi_2(z_2) + R_3 \overline{\Phi}_1(\overline{z}_1) + R_4 \overline{\Psi}_2(\overline{z}_2) + \dot{z}^2 [P_{10}\Phi_1(z_1) +$$

$$+ P_{20}\Psi_2(z_2) + P_{30}\overline{\Phi}_1(\overline{z}_2) + P_{40}\overline{\Psi}_2(\overline{z}_2)] = f_1 + if_2, \quad (1.19)$$

де введено позначення

$$f_1 + if_2 = -(\kappa + 1)\Big\{L_{Oy} + iL_{Ox} + [\overline{z}(s) - \overline{z}_0(s)]\, V_{Oz} + C_0\overline{z} - iC_3 -$$

$$- \int_0^s [\overline{z}(s) - \overline{z}(\alpha)]\, p(\alpha)\, d\alpha - i\int_0^s \dot{\overline{z}} m(s) ds\Big\} - \dot{\overline{z}}^2(\kappa - 1)\Big\{iL_{Ox} - L_{Oy} - [z(s) -$$

$$- z_0(s)]\, V_{Oz} - C_0 z - i\overline{C}_3 + \int_0^s [z(s) - z(\alpha)]\, p(\alpha) d\alpha - i\int_0^s \dot{z}\, m(s)\, ds\Big\}; \quad (1.20)$$

$$B_j = 2A\,(1 - i\mu_j)\,;\; B_{\kappa_1} = 2A\,(1 - i\,\overline{\mu}_{\kappa_1})\,;$$

$$R_j = \frac{2}{3}(\kappa + 1)\,h^3\left[\frac{p_j}{\mu_j} + iq_j\right];\;\; R_{\kappa_1} = \frac{2}{3}(\kappa + 1)\,h^3\left[\frac{\overline{p}_{\kappa_1}}{\overline{\mu}_{\kappa_1}} + i\overline{q}_{\kappa_1}\right];$$

$$P_{j_0} = \frac{2}{3}(\kappa - 1)\,h^3\left[iq_j - \frac{p_j}{\mu_j}\right];\;\; P_{\kappa_{10}} = \frac{2}{3}(\kappa - 1)\,h^3\left[i\,\overline{q}_{\kappa_1} - \frac{\overline{p}_{\kappa_1}}{\overline{\mu}_{\kappa_1}}\right];$$

$$\varphi'_1(z_1) = \Phi_1(z_1)\,;\; \psi'_2(z_2) = \Psi_2(z_2)\,;\; (j = 1{,}2)(\kappa_1 = 3{,}4)\,.$$

При цьому постійні $p_1,\ p_2, \ldots \overline{q}_2$ відомим шляхом виражаються через пружні постійні пластинки.

Міркуючи аналогічно, з співвідношень (1.14) і (1.15), написаних для випадку ізотропної пластинки, знайдемо

$$2A\,[\,\overline{z}\,\overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{z}\,\varphi'(z) + z\,\overline{z}\,\varphi''(z) + z\psi'(z)] + iD\,(\kappa + 1)[(3 + \mu)\,\overline{\varphi}\,(\overline{z}) -$$

$$- (1 - \mu)\,(\overline{z}\varphi'(z) + \psi(z))] + iD\,(\kappa - 1)\,\overline{z}^2\,[(3 + \mu)\,\varphi(z) -$$

$$- (1 - \mu)\,(\overline{\psi}\,(\overline{z}) + z\,\overline{\varphi}'(\overline{z})] = f_1 + i\,f_2\,. \qquad (1.21)$$

При цьому

$$f_1 + i\,f_2 = -\frac{\kappa + 1}{2}\left\{\overline{z}\,V^1_{Oz} - C^1{}_0 - i\int\limits_0^s \overline{z}m\,(s)\,ds - \int\limits_0^s [\overline{z}\,(s) - \right.$$

$$\left. - z\,(\alpha)]\,p\,(\alpha)\,d\alpha\right\} - \frac{\kappa - 1}{2}\,\overline{z}^2\left\{C^1{}_0 - z\,V^1_{Oz} - i\int\limits_0^s z\,m\,(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^s [z\,(s) - z\,(\alpha)]\,p\,(\alpha)\,d\alpha\right\},$$

де

$$V^1_{Oz} = C_0 + V_{Oz}\,;\; C^1_0 = iL_{Ox} - L_{Oy} + z_0\,V_{Oz} + iC_1. \qquad (1.22)$$

Таким чином, питання про підкріплення контуру анізотропної пластинки зводиться до визначення аналітичних функцій $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_2(z_2)$ з чотирьох граничних умов виду (1.2), (1.3), (1.12), (1.13) або з одної умови, записаної в формі (1.19). У випадку ізотропної пластинки початковими можуть бути як умови (1.14), (1.15), так і співвідношення (1.21), з яких і визначаються аналітичні функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, що рішають поставлену задачу.

Основні співвідношення, раніше одержані в роботі для випадку рівних жорсткостей, легко визначити з наших граничних умов, поклавши в них $\kappa = 1$.

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІДКРІПЛЮЮЧОГО КІЛЬЦЯ

Пригадуючи (1.18) і виносячи за скобки $\bar{\dot{z}}$, можемо написати

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\bar{\dot{z}}}{2A}\left[\dot{z}(\kappa+1)(L_y+iL_x) - \bar{\dot{z}}(\kappa-1)(L_y-iL_x)\right], \tag{2.1}$$

або

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\bar{\dot{z}}}{A}\left[L_n + i\kappa L_\tau\right], \tag{2.2}$$

де

$$L_n = -L_x\cos\alpha - L_y\sin\alpha\,,\quad L_\tau = L_y\cos\alpha - L_x\sin\alpha\,,\quad \alpha = \arg z\,. \tag{2.3}$$

Далі, тому що $W = 2Re[\varphi_1(z_1) + \psi_2(z_2)]$, то

$$Q(z_1 z_2) = \frac{\partial W}{\partial x} - i\frac{\partial W}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Диференцюючи рівність (2.4) по s, одержимо

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{2}\left[(\dot{z}+\bar{\dot{z}})\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\bar{\dot{z}}-\dot{z})\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2i\dot{z}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]. \tag{2.5}$$

Отже, враховуючи (2.5) і помноживши ліву і праву частину рівності (2.2) на $\dot{z}$, напишемо

$$(1+\dot{z}^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1-\dot{z}^2)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2i\dot{z}^2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} = -\frac{2}{A}\left[L_n + i\kappa L_\tau\right]. \tag{2.6}$$

Як відомо,

$$\begin{aligned}
M_x &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right];\\
M_y &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right];\\
H_{xy} &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Розрішивши систему (2.7) відносно $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ і $\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}$, одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= b_1 M_x + b_2 M_y + b_3 H_{xy};\\
\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x} &= d_1 M_x + d_2 M_y + d_3 H_{xy};\\
\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= a_1 M_x + a_2 M_y + a_3 H_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Коефіцієнти b_1, $b_2 \ldots a_2$, a_3 виражаються через коефіцієнти системи (2.7) відомим шляхом. Наприклад

$$a_1 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{12}(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{16}(B_{12} B_{16} - B_{11} B_{26})}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right];$$

$$a_2 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{11}(B_{11} B_{66} - B_{16}^2)}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right]; \quad (2.9)$$

$$a_3 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{11}(B_{16} B_{12} - B_{11} B_{26})}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right].$$

Враховуючи (2.8) і відділяючи дійсну і уявну частини рівності (2.6), знайдемо

$$L_n = -\frac{A}{2} Re \{ [(1 + \dot{z}^2) b_1 - (1 - \dot{z}^2) a_1 - 2i\dot{z}^2 d_1] M_x + [(1 + \dot{z}^2) b_2 +$$

$$+ (1 - \dot{z}^2) a_2 - 2i\dot{z}^2 d_2] M_y + [(1 + \dot{z}^2) b_3 + (1 - \dot{z}^2) a_3 - 2i\dot{z}^2 d_3] H_{xy} \}; \quad (2.10)$$

$$L_\tau = -\frac{C}{2} I_m \{ [(1 + \dot{z}^2) b_1 - (1 - \dot{z}^2) a_1 - 2i\dot{z}^2 d_1] M_x + [(1 + \dot{z}^2) b_2 +$$

$$+ (1 - \dot{z}^2) a_2 - 2i\dot{z}^2 d_2] M_y + [(1 + \dot{z}^2) b_3 + (1 - \dot{z}^2) a_3 - 2i\dot{z}^2 d_3] H_{xy} \}.$$

Внаслідок того, що $H_{1n\tau} = L_\tau$ з (1.1) витікає рівність

$$N_{1n} = N_n + \frac{\partial H_{n\tau}}{\partial s} - \frac{\partial L_\tau}{\partial s},$$

де

$$N_n = -(N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny));$$

$$H_{n\tau} = (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} [\cos^2(nx) - \cos^2(ny)].$$

Таким чином, знаючи напружений стан анізотропної пластинки, ми можемо, використовуючи співвідношення (2.10) і (2.11) визначити напружений стан підкріпляючого кільця.

У випадку ізотропної пластинки співвідношення (2.10) і (2.11) значно спрощуються і приводяться до слідуючих формул

$$L_n = \frac{A}{D(1 - \mu^2)} [M_\tau - \mu M_n]; \; L_\tau = \frac{C}{D(1 - \mu^2)} H_{n\tau}. \quad (2.12)$$

Далі, враховуючи, що $H_{1n\tau} = L_\tau$ з (1.1) одержимо

$$N_{1n} = N_n + \left[1 - \frac{C}{D(1 - \mu)} \right] \frac{dH_{n\tau}}{ds}. \quad (2.13)^1$$

[1] Інакше ці формули одержані в дипломній роботі М. І. Швайко (Львівський державний університет ім. Ів. Франка, 1955 р.), виконаної під керівництвом М. П. Шереметєва.

Напружений стан кільця можна визначити і безпосередньо через функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_2(z_2)$.

З цією метою в праву частину (1.17а) замість $\Omega_2(z_1z_2)$ і $\Omega_4(z_1z_2)$ підставимо їх значення з (1.9) і продиференцюємо його по s

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=2Re\,[\dot{z}_1\varphi''_1(z_1)+\dot{z}_2\psi''_2(z_2)]-i2Re[\mu_1\dot{z}_1\varphi''_1(z_1)+\mu_2\dot{z}_2\psi''_2(z_2)]. \quad (2.14)$$

Помноживши рівність (2.2) на $e^{i\alpha}$ і відділяючи уявну і дійсну частини одержаного співвідношення, можемо, враховуючи (2.17), написати

$$L_n=-A2Re[\dot{z}_1(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)\varphi''_1(z_1)+\dot{z}_2(\sin\alpha-\mu_2\cos\alpha)\psi''_2(z_2)];$$
$$(2.15)$$
$$L_\tau=-C2Re[\dot{z}_1(\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha)\varphi''_1(z_1)+\dot{z}_2(\cos\alpha+\mu_2\sin\alpha)\psi''_2(z_2)].$$

У випадку ізотропної пластинки співвідношення (2.15) спростяться і мають вид

$$\begin{aligned} L_n&=-2ARe[\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})+\overline{z}\dot{z}^2\varphi''(z)+\dot{z}^2\psi'(z)];\\ L_\tau&=-2CI_m[\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})+\overline{z}\dot{z}^2\varphi''(z)+\dot{z}^2\psi'(z)]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

БЕЗКОНЕЧНА ПЛАСТИНКА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Нехай підкріпляюче кільце вільне від навантаження, а напружений стан на безконечності — однорідний, тобто $M_x(\infty)$, $M_y(\infty)$ $H_{xy}(\infty)$ — величини обмежені.

Поклавши $z=\kappa\zeta$, відобразимо область пластинки на зовнішність одиничного кола γ_1.

В нашому випадку, як відомо [3], функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ мають вигляд

$$\varphi(\zeta)=-\frac{A}{4D(1+\mu)}R\zeta+\varphi_0(\zeta),\quad \psi(\zeta)=\frac{BR}{2D(1-\mu)}\zeta+\psi_0(\zeta), \quad (3.1)$$

де $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ — голоморфні в околі безконечно віддаленої точки. На основі (3.1) напишемо

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\frac{a_3}{\zeta^3}+\dots;\quad \psi_0(\zeta)=\frac{a'_1}{\zeta}+\frac{a'_2}{\zeta^2}+\frac{a'_3}{\zeta^3}+\dots; \quad (3.2)$$

Постійним A_1 і B можемо надавати різні значення в залежності від виду навантаження:

Напружений стан	A_1	B
$M_x(\infty)=M_y(\infty)=M,\ H_{xy}(\infty)=0$	$2M$	0
$M_x(\infty)=0$ або $M_y(\infty)=0,\ H_{xy}(\infty)=0$	M	$\pm M$
$M_x(\infty)=M_y(\infty)=0,\ H_{xy}(\infty)=H$	0	$2iH$

Згинаючий момент M в другому рядку беремо із знаком плюс, якщо $M_x(\infty)=0$.

Поклавши в граничній умові (1.21) $z=\kappa\zeta$ помножимо її і рівність, що до неї спряжена, на

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$|\zeta|>1$ і проінтегруємо їх по контуру γ_1.

В результаті інтегрування одержимо

$$\frac{2A}{R}\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)-\varphi''_0(\zeta)-\zeta\psi'_0(\zeta)\right]+D(\kappa+1)(1-\mu)\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)+\psi_0(\zeta)\right]+$$

$$+D(\kappa-1)\left[\frac{3+\mu}{\zeta^2}\,\varphi_0(\zeta)-(1-\mu)\frac{\overline{a}'_1}{\zeta}\right]=\frac{R\overline{B}(\kappa-1)}{2}\,\zeta^{-3}+$$

$$+\frac{A_1}{D(1+\mu)}\,[A-RD(1+\mu)]\,\zeta^{-1},$$

$$\frac{2A}{R}\,\zeta\varphi'_0(\zeta)-D(\kappa+1)(3+\mu)\,\varphi_0(\zeta)-D(\kappa-1)(1-\mu)[\zeta\varphi'_0(\zeta)+$$

$$+\zeta^2\psi_0(\zeta)-a'_1\zeta-a'_2]=\frac{B}{2D(1-\mu)}\,[2A-RD(\kappa+1)(1-\mu)]\,\zeta^{-1}. \tag{3.3}$$

З другого із співвідношень (3.3) знайдемо

$$\psi_0(\zeta)=\frac{\overline{B}[RD(\kappa+1)(1-\mu)-2A]}{2D^2(1-\mu)^2(\kappa-1)}\,\zeta^{-3}+$$

$$+\frac{2A-RD(\kappa-1)(1-\mu)}{RD(\kappa-1)(1-\mu)}\,\zeta^{-1}\varphi'_0(\zeta)-\frac{(\kappa+1)(3+\mu)}{(\kappa-1)(1-\mu)}\,\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)+$$

$$+a'_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}. \tag{3.4}$$

Підставивши (3.4) в першу рівність, із (3.3) можемо написати

$$\frac{2A}{R}\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)-\varphi''_0(\zeta)+3B'_3\zeta^{-3}-B'_1\varphi'_0(\zeta)\zeta^{-1}+B_2\zeta^{-1}\varphi'_0(\zeta)-\right.$$

$$\left.-2B'_2\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)+a'_1\zeta^{-1}+2a'_2\zeta^{-2}\right]+D(\kappa+1)(1-\mu)\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)+\right.$$

$$\left.+B'_3\zeta^{-3}+B'_1\zeta^{-1}\varphi'_0(\zeta)-B'_2\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)+a'_1\zeta^{-1}+a'_2\zeta^{-2}\right]+$$

$$+D(\kappa-1)\left[(3+\mu)\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)-(1-\mu)\overline{a}'_1\zeta^{-1}\right]=\frac{A_1}{D(1+\mu)}\,[A-$$

$$-RD(1+\mu)]\,\zeta^{-1}+\frac{R\overline{B}(\kappa-1)}{2}\,\zeta^{-3}. \tag{3.5}$$

При цьому

$$B'_3 = \frac{\overline{B}}{2D^2(\kappa-1)(1-\mu)^2}\left[RD(\kappa+1)(1-\mu)-2A\right];$$

$$B'_1 = \frac{2A - RD(\kappa-1)(1-\mu)}{RD(\kappa-1)(1-\mu)}; \quad B'_2 = \frac{(\kappa+1)(3+\mu)}{(\kappa-1)(1-\mu)}. \tag{3.6}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної ζ, із (3.5) знайдемо

$$a'_1[2A + RD(\kappa+1)(1-\mu)] - RD(\kappa-1)(1-\mu)\overline{a}'_1 = = \frac{RA_1}{D(1+\mu)}[A - RD(1+\mu)]. \tag{3.7}$$

$$a'_2[1 + B'_1 + B'_2]\,[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)] + a_1 RD(\kappa-1)(3+\mu) = = -\frac{R^2(\kappa-1)}{2}\overline{B} + B'_3[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)], \quad a_n = = a'_n = 0\ (n \geqslant 2) \tag{3.8}$$

Необхідним наслідком умови однозначності прогину пластинки є рівність $\overline{a}'_1 = a'_1$.

Тому з (3.7) і (3.8) витікає, що

$$a'_1 = \frac{RA_1[A - RD(1+\mu)]}{D(1+\mu)[2A + 2DR(1-\mu)]}; \tag{3.9}$$

$$a_1 = \frac{\overline{B}D^2R^3(\kappa-1)^2(1-\mu)^2 + RB[2A - RD(\kappa+1)(1-\mu)][6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)]}{2D(1-\mu)\{R^2D^2(\kappa-1)^2(1-\mu)(3+\mu) + [2A + RD(\kappa+1)(3+\mu)][6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)]\}}.$$

Отже, поставлена задача нами рішена. На основі (3.1) і (3.2) остаточно напишемо

$$\varphi(\zeta) = -\frac{A_1R}{4D(1+\mu)}\zeta - a_1\zeta^{-1};$$

$$\psi(\zeta) = \frac{BR}{2D(1-\mu)}\zeta + a'_1\zeta^{-1} + a_3\zeta^{-3}, \tag{3.10}$$

де, враховуючи (3.4), покладемо

$$a'_3 = \frac{\overline{B}R^2(\kappa-1) + 2a_1[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu) - RD(\kappa-1)(3+\mu)]}{2[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)]}.$$

Рішення для випадку $A = C$, опубліковане в роботі [4], легко одержати з (3.10), якщо $\kappa = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. Прикладная математика и механика, новая серия, т. 2, в. 2, 1938.

2. Шереметьев М. П. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен упругим тонким кольцом ДАН УССР, № 6, 1950.

3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

4. Шереметьев М. П. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. мат. журн. № 1, 1953.

5. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов, т. II, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946, стор. 163—167.