Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ІГНАТЬЄВ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОХ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СФЕРИ

Загальновідомі розв'язки граничної задачі типу Діріхле для рівняння Лапласа, як у вигляді ряду, так і у вигляді інтеграла (інтеграл Пуассона). Розв'язок основних задач теорії пружності для сфери у вигляді ряду по сферичних функціях вперше був побудований Ляме.

За допомогою відомих властивостей сферичних функцій тут просумовані ряди, що дають розв'язки відповідних задач.

I. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ВНУТРІШНОСТІ СФЕРИ ПРИ ЗАДАНИХ ЗСУВАХ

Коли на поверхні сфери задано зсуви, розв'язок граничної задачі теорії пружності для внутрішності сфери дається формулою

$$\bar{u}=\bar{v}+\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{m}{(3m-4)n-2m+2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}_n, \text{ [1]} \tag{1}$$

де m — число Пуассона, або, змінюючи порядок сумування та диференціювання, знаходимо

$$\bar{u}=\bar{v}+\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\bar{v}_n(x)}{(3m-4)n-2m+2}, \tag{1'}$$

де x — точка в середині сфери $|y|=R_0$, $\bar{v}_n$ — гармонічний вектор n-го степеня,

$$\bar{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{v}_n \tag{2}$$

— гармонічний вектор, який приймає на сфері ті ж самі значення, що і вектор зсуву $\bar{u}=\bar{f}(\Theta, \varphi)$. З другого боку, кожний гармонічний в середині кулі $|x|\leqslant R_0$ вектор, який на сфері приймає дані значення $\bar{f}(\Theta, s)$, дається формулою

$$v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi R_0^2}\varrho^n\iint_{|y|=R_0}P_n(\cos\gamma)\bar{f}(y)\,d_yS. \tag{3}$$

[1] Див., наприклад, А. И. Лурье «Пространственные задачи теории упругости», 1955.

Порівнюючи формули (2) та (3), знаходимо

$$\bar{v}_n = \frac{2n+1}{4\pi R_0^2} \varrho^n \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} P_n(\cos\gamma) \bar{f}(y)\, d_y S. \tag{4}$$

Підставивши (4) в рівність (1), одержимо

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{m}{8\pi R_0^2}(R_0^2 - R^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{an+b} \varrho^n P_n(\cos\gamma)\right] \bar{f}(y)\, d_y S, \tag{5}$$

де $a = 3m-4$; $b = 2-2m$.

Ставимо собі метою просумувати вираз

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{an+b} \varrho^n P_n(\cos\gamma). \tag{6}$$

Вираз (6) можна переписати слідуючим чином:

$$\Psi = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n P_n(\cos\gamma) + \left(1 - \frac{2b}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n P_n(\cos\gamma)}{an+b}. \tag{6'}$$

Просумуємо спочатку

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n P_n(\cos\gamma)}{an+b}. \tag{7}$$

Продиференціювавши (7) по ϱ, одержимо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varrho^{n-1}}{an+b} P_n(\cos\gamma). \tag{7'}$$

Помноживши (7) та (7′) відповідно на b та $a\varrho$, а потім склавши результати, одержимо

$$a\varrho \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} + b\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \varrho^n.$$

Але сума, що стоїть в правій частині цього рівняння, є розкладом функції

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho\cos\gamma + \varrho^2}},$$

тобто має місце рівність

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \varrho^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho\cos\gamma + \varrho^2}}. \tag{8}$$

Тому звичайне диференціальне рівняння для функції $\Phi(\varrho, \gamma)$ можна записати в слідуючому вигляді:

$$\varrho^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}+\frac{b}{a}\varrho^{\frac{b}{a}-1}=\frac{\varrho^{\frac{b}{a}-1}}{a\sqrt{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2}}. \tag{9}$$

З рівності (7) виходить, що при $\varrho=0$ маємо $\Phi(0, \gamma)=\frac{1}{b}$ і, отже, функція $\Phi(0, \gamma)$ від γ не залежить, тобто маємо

$$\Phi(\varrho, \gamma)\Big|_{\rho=0}=\frac{1}{b}.$$

Зауважимо ще, що з позначень $a=3m-4$, $b=2-2m$ випливає

$$-1<\frac{b}{a}<0.$$

Справді, для пружних тіл число Пуассона $m>2$, і тому $a>0$ і $b<0$. Далі очевидно, що $a+b=m-2$ і, отже, $a+b>0$. Звідси виходить $1+\frac{b}{a}>0$, або $\frac{b}{a}>-1$. З другого боку, $\frac{b}{a}<0$, що й треба було довести.

Враховуючи границі зміни величини $\frac{b}{a}$, зауважимо, що рівняння (9) не можна інтегрувати, якщо нижня границя $\varrho=0$, а тому будемо інтегрувати його в границях від α до ϱ. Переписуючи (9) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho^{\frac{b}{a}}\Phi)=\frac{1}{a}\varrho^{\frac{b}{a}-1}\Phi_0(\varrho),$$

одержуємо

$$\varrho^{\frac{b}{a}}\Phi=\frac{1}{a}\int_\alpha^\varrho t^{\frac{b}{a}-1}\Phi_0(t)\,dt+C.$$

Звідси маємо

$$\Phi=\frac{1}{b}\varrho^{-\frac{b}{a}}\int_\alpha^\varrho\Phi_0(t)\,dt^{\frac{b}{a}}+C\varrho^{-\frac{b}{a}}.$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, знаходимо

$$\Phi=\frac{1}{b}\varrho^{-\frac{b}{a}}\left[\Phi_0(\varrho)\varrho^{\frac{b}{a}}-\Phi_0(\alpha)\alpha^{\frac{b}{a}}\int_\alpha^\varrho t^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\Phi_0(t)}{\partial t}dt\right]+C\varrho^{-\frac{b}{a}}=$$

$$=\frac{1}{b}\Phi_0(\varrho)-\frac{1}{b}\varrho^{-\frac{b}{a}}\int_\alpha^\varrho t^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\Phi_0(t)}{\partial t}dt+C_1\varrho^{-\frac{b}{a}},$$

де

$$C_1 = C - \frac{\Phi_0(\alpha)\,\alpha^{\frac{b}{a}}}{b}.$$

Але в останньому інтегралі вже можна інтегрувати при нижній границі $\varrho=0$. Тому для $\Phi(\varrho)$, після підстановки $t=\varrho\xi$, одержимо

$$\Phi(\varrho) = C\varrho^{-\frac{b}{a}} + \frac{\Phi_0}{b} - \frac{1}{b}\varrho\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\,d\xi.$$

З того, що $\Phi_0(\varrho)$ і $\Phi(\varrho)$ розкладаються в ряди по цілих ступенях ϱ виходить, що $C=0$.

Тому для $\Phi(\varrho)$ одержимо слідуючий вираз:

$$\Phi(\varrho) = \frac{\Phi_0}{b} - \frac{\varrho}{b}\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\,d\xi. \tag{10}$$

Підставляючи в (6′) значення Φ_0 та Φ, одержуємо

$$\Psi = \frac{\Phi_0}{b} - \frac{a-2b}{ab}\varrho\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\,d\xi. \tag{11}$$

Обчислимо ще $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{f}\Psi(\varrho)$. Для цього зауважимо, що справедливі слідуючі тотожності:

1) $\Phi_0 = \dfrac{R_0}{|\bar{x}-\bar{y}|}$;

2) $\varrho = \dfrac{|\bar{x}|}{R_0}$;

3) $\dfrac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)} = -\dfrac{R_0^2\,[\xi|\bar{x}|^2 - (\bar{x},\bar{y})]}{|\bar{x}|\,|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}$.

Підставляючи ці вирази в (11), одержуємо

$$\Psi = \frac{R_0}{b|\bar{x}-\bar{y}|} + \frac{R_0(a-2b)}{ab}\int_0^1 \frac{\xi^{\frac{b}{a}}[\xi|\bar{x}|^2 - (\bar{x},\bar{y})]}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\,d\xi. \tag{11′}$$

Після елементарних перетворень знаходимо

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi(\varrho)\bar{f}(y) = \frac{R_0}{b}\Bigg\{-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \frac{3(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}(\bar{x}-\bar{y}) +$$

$$+\frac{a-2b}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[\frac{2\bar{f}}{|\xi\bar{x}-\bar{y}|^3} - \frac{3(\bar{f},2\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5}(\bar{x}\xi-\bar{y}) -$$

$$-\frac{3(\bar f,\ \xi\bar x-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(2\bar x\xi-\bar y)-\frac{3\xi[\xi|\bar x|^2-(\bar x,\bar y)]}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\bar f(y)+$$

$$+\frac{15\xi[\xi|\bar x|^2-(\bar x,\ \bar y)](\bar f,\bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^7}(\bar x\xi-\bar y)\Bigg]d\xi\Bigg\}. \tag{12}$$

Функція $\bar v$, як гармонічний вектор, одразу записується по формулі Пуассона

$$\bar v=\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\frac{R_0^2-R^2}{|\bar x-\bar y|^3}\bar f(y)d_yS. \tag{13}$$

Підставляючи (12) та (13) в формулу (5), одержуємо

$$\bar u=\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\frac{R_0^2-R^2}{|\bar x-\bar y|^3}\bar f d_yS+\frac{m(R_0^2-R^2)}{8\pi R_0 b}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\Bigg\{-\frac{\bar f}{|\bar x-\bar y|^3}+$$

$$+\frac{3(\bar f,\ \bar x-\bar y)}{|\bar x-\bar y|^5}(\bar x-\bar y)+\frac{a-2b}{a}\int\limits_0^1\xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[\frac{2\bar f}{|\bar x\xi-\bar y|^3}- \tag{14}$$

$$-\frac{3(\bar f,\ 2\xi\bar x-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(\bar x\xi-\bar y)-\frac{3(\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(2\bar x\xi-\bar y)-$$

$$-\frac{3\xi[|\bar x|^2\xi-(\bar x,\ \bar y)]}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\bar f(y)+\frac{15\xi[|\bar x|^2\xi-(\bar x,\ \bar y)](\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^7}(\bar x\xi-\bar y)\Bigg]d\xi\Bigg\}d_yS.$$

Якщо зауважити, що

$$|\bar x|^2\xi-(\bar x,\bar y)=(\bar x\xi-\bar y,\ \bar x)=\sum_{i=1}^{3}(x_i\xi-y_i)x_i,$$

то після деяких перетворень, формула (14) набуває вигляду

$$\bar u=\frac{R_0^2-R^2}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\Bigg\{\frac{\bar f}{|\bar x-\bar y|^3}\Bigg[1-\frac{m}{2b}+\frac{m(a-2b)}{2ab}\Bigg]+$$

$$+\frac{(\bar f,\ \bar x-\bar y)(\bar x-\bar y)}{|\bar x-\bar y|^5}\Bigg[\frac{3m}{2b}-\frac{3m(a-2b)}{2ab}\Bigg]+$$

$$+\frac{m(a-2b)}{2ab}\int\limits_0^1\xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[-\frac{b}{a}\frac{\bar f}{|\bar x\xi-\bar y|^3}+\frac{3b}{a}\frac{(\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)(\bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\Bigg]d\xi\Bigg\}d_yS,$$

або

$$\bar{u}=\frac{R_0^2-R^2}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\left\{\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}\left(1-\frac{m}{a}\right)+\frac{3m}{a}\frac{(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{m(a-2b)}{2ab}\int\limits_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\left[\frac{3(\bar{f},\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5}(\bar{x}\xi-\bar{y})-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\right]d\xi\right\}d_yS. \quad (14')$$

Переходячи від позначень a та b до позначення m, знаходимо

$$\bar{u}=\frac{R_0^2-R^2}{4\pi R_0(4m-3)}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\left\{\frac{3(m-1)\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}+\frac{3m(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2}\,\frac{8m-7}{4m-3}\int\limits_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\left[\frac{3(\bar{f},\bar{x}\xi-\bar{y})(\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5}-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\right]d\xi\right\}d_yS. \quad (14'')$$

Зокрема, для центра кулі $|\bar{x}|=0$, формула (14″) набуває вигляду

$$\bar{u}(0)=\frac{1}{16\pi R_0^2(3m-2)}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\left[(7m-8)\bar{f}+\frac{15m(\bar{f},\bar{y})\bar{y}}{R_0^2}\right]d_yS. \quad (15)$$

Формула (15) дає значення вектор-функції $\bar{u}(x)$ в центрі кулі через граничні значення цієї функції на поверхні сфери. З неї випливає, що коли на сфері задані лише нормальні одинакові і протилежно спрямовані на кінцях кожного діаметру зсуви, то зсув в центрі сфери дорівнює нулю. Вона по суті співпадає з формулою, наведеною С. Г. Міхліним.

2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПОСТАВЛЕНОЇ ДЛЯ ЗОВНІШНОСТІ СФЕРИ ПРИ ЗАДАНИХ НА СФЕРІ ЗСУВАХ

В згаданій вище роботі Лур'є розв'язок цієї задачі дається формулою

$$\bar{u}(x)=\bar{v}-\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}_{-n-1}}{(3m-4)(n+1)+2m-2}=$$

$$=\bar{v}-\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{v}_{-n-1}}{an+b_1}, \quad (16)$$

де $a=3m-4$, $b_1=5m-6$; R_0 — радіус сфери; R — радіус, проведений з центра сфери (початок координат) в точку поза сферою ($R>R_0$); гармонічний вектор $\bar{v}(x)$ приймає на сфері ті ж самі задані значення $\bar{f}(y)$, що і вектор зсуву $\bar{u}(x)$ і виражається за формулою

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_{-n-1}. \tag{17}$$

Виведемо спочатку для зовнішності сфери формулу, аналогічну формулі (3), яка справедлива лише для внутрішності сфери.

Відомо, що гармонічний поза сферою вектор $v(x)$, який приймає задані на сфері значення $F(x)$ виражається за формулою Пуассона

$$\bar{v}(x) - \frac{1}{4\pi R_0} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \frac{R^2 - R_0^2}{(R^2 - 2RR_0 \cos\gamma + R_2^0)^{\frac{3}{2}}} d_y S.$$

Звідси маємо

$$\bar{v}(x) = \frac{\varrho_1}{4\pi R_0^2} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \bar{f}(y) \frac{1 - \varrho_1^2}{(1 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 \cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} d_y S,$$

де $\varrho_1 \frac{R_0}{R}$ — величина, менша від одиниці.

Але, як вказано вище, справедливий розклад

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho_1 \cos\gamma + \varrho_1^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_1^n P_n(\cos\gamma),$$

де P_n є n-й поліном Лежандра.

Продиференціюємо цю рівність по ϱ_1, помножимо обидві частини одержаного виразу на $2\varrho_1$ і складемо з самою рівністю.

Тоді маємо

$$\frac{1 - \varrho_1^2}{(1 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 \cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varrho_1^n P_n(\cos\gamma).$$

Підставивши останнє у вираз для $\bar{v}(x)$, одержимо

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \varrho_1^{n+1} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} P_n(\cos\gamma) \bar{f}(y) d_y S. \tag{18}$$

Формула (18) дає вираз для будь-якого гармонічного поза сферою вектора $\bar{v}(x)$ за його заданими значеннями на сфері.

Порівнюючи вирази (17) і (18), знаходимо

$$\bar{v}_{-n-1} = \frac{2n+1}{4\pi R_0^2} \varrho_1^{n+1} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} P_n(\cos\gamma) \bar{f}(y) d_y S. \tag{19}$$

Підставляючи (19) в рівність (16), одержимо

$$\bar{u}(x) = \bar{v} - \frac{m}{8\pi R_0^2}(R_0^2 - R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\bar{f}(y)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b_1}\varrho_1^{n+1}P_n(\cos\gamma)\right]d_yS. \tag{20}$$

Обчислимо тепер суму

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b_1}\varrho_1^{n+1}P_n(\cos\gamma). \tag{21}$$

Спочатку перепишемо цю формулу у вигляді

$$\Psi_1 = \frac{2\varrho_1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_1^n P_n(\cos\gamma) + \varrho_1\left(1 - \frac{2b_1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^n P_n(\cos\gamma)}{an+b_1}, \tag{21'}$$

або

$$\Psi_1 = \frac{2\varrho_1}{a}\Phi_0(\varrho_1) + \varrho_1\left(1 - \frac{2b_1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^n P_n(\cos\gamma)}{an+b_1}. \tag{21''}$$

Залишається просумувати вираз

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^n P_n(\cos\gamma)}{an+b_1}. \tag{22}$$

Продиференціювавши (22) по ϱ_1, помноживши на $a\varrho_1$, а рівність (22) — на b_1, і склавши результати, матимемо слідуюче лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$a\,\varrho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho_1} + b_1\,\Phi_1 = \Phi_0(\varrho_1)\,\varrho_1^n. \tag{23}$$

Це рівняння цілком аналогічне рівнянню (9) з тією лише різницею, що величина $\frac{b_1}{a}$ міститься в інтервалі $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$, що легко доводиться.

Тому в рівнянні $d\left(\varrho_1^{\frac{b_1}{a}}\Phi_1\right) = \left(\Phi_0\frac{\varrho_1^{\frac{b_1}{a}-1}}{a}\right)d\varrho_1$ праву частину можна інтегрувати при нижній границі, рівній нулю. Тоді одержимо

$$\varrho_1^{\frac{b_1}{a}}\Phi_1 = \frac{1}{a}\int_0^{\varrho_1} t^{\frac{b_1}{a}-1}\,\Phi_0(t)\,dt.$$

Звідси

$$\Phi_1 = \frac{\varrho^{-\frac{b_1}{a}}}{a}\int_0^{\varrho_1} t^{\frac{b_1}{a}-1}\,\Phi_0(t)\,dt.$$

Інтегруючи частинами, а потім вводячи підстановку $t=\varrho_1, \xi$, одержимо

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_0(\varrho_1)}{b_1} - \frac{\varrho_1}{b_1}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}} \frac{\partial \Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} d\xi. \tag{24}$$

Підставивши значення (24) в (21′), після зведення подібних членів, будемо мати

$$\Psi_1 = \frac{\varrho_1}{b_1}\Phi_0(\varrho_1) - \frac{\varrho_1^2}{ab_1}(a-2b_1)\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}} \frac{\partial \Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} d\xi. \tag{25}$$

Зауважимо, що

1) $\varrho_1 = \dfrac{R_1}{|\bar{x}|}$; 2) $\Phi_0(\varrho_1) = \dfrac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}$;

3) $\varrho_1 \Phi_0(\varrho_1) = \dfrac{R_0}{|\bar{x}-\bar{y}|}$; 4) $\dfrac{\partial\Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} = \dfrac{|\bar{x}|^2[\xi R_0^2 - (\bar{x},\bar{y})]}{R_0|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}$;

5) $\varrho_1^2\dfrac{\partial\Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} = -\dfrac{R_0[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})]}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}$.

Тоді одержимо вираз для $\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi_1\bar{f}$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi_1\bar{f} = \frac{R_0}{b_1}\left\{\frac{3(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5} - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \right.$$

$$+\frac{a-2b_1}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}}\left[\frac{3(\bar{y},\bar{f})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \frac{3(\bar{f},\bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} - \frac{3[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{15[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})](\bar{f},\bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}\right]d\xi\right\}. \tag{26}$$

Підставивши (26) та значення $v(x)$ в формулу (20) знайдемо остаточно

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \bar{f}(y)\,\frac{R^2-R_0^2}{(R_0^2+R^2-2RR_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\,d_yS -$$

$$-\frac{m(R_0^2-R^2)}{8\pi R_0 b_1}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\left\{\frac{3(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5} - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \right.$$

$$+\frac{a-2b_1}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}}\left[\frac{3(\bar{y},\bar{f})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \frac{3(\bar{f},\bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} - \frac{3[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \right.$$

$$+\frac{15\,[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})](\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}\Bigg]d\xi\Bigg\}d_yS. \tag{27}$$

З формули (27) виходить, що зсув на безмежності прямує до нуля. Можна легко показати справедливість слідуючих тотожностей:

$$5\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}}\frac{[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})](\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}(\bar{x}-\xi\bar{y})d\xi=-\frac{(\bar{f},\ \bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}+$$

$$+\frac{b_1}{a}\int_0^1\frac{\xi^{\frac{b_1}{a}-1}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}[(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})-\xi(\bar{f},\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})-$$

$$-\xi(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}]\,d\xi; \tag{28}$$

$$-\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}}\frac{[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}d\xi=\frac{\bar{f}}{3|\bar{x}-\bar{y}|^3}-\frac{b_1}{3a}\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}-1}\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}d\xi. \tag{29}$$

Підставивши (28) та (29) у (27), побачимо, що ряд членів взаємно знищується. Поєднавши члени, в які не входять інтеграли по ξ, одержимо остаточно вираз для зсуву в довільній точці поза сферою

$$\bar{u}(x)=\frac{3}{4m-3}\cdot\frac{R^2-R_0^2}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\Bigg\{\frac{(m-1)\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}+\frac{m(\bar{f},\ \bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}(\bar{x}-\bar{y})-$$

$$-\frac{m(2m-3)}{2(4m-3)}\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}-1}\left[\frac{3(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}(\bar{x}-\xi\bar{y})-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}\right]d\xi\Bigg\}d_yS. \tag{30}$$

Зауваження I. Якщо на поверхні сфери $|\bar{y}|=R_0$ задано вектор напруги $\bar{P}$, розв'язок відповідної граничної задачі теорії пружності для внутрішності сфери може бути поданим в слідуючій інтегральній формулі:

$$2G\bar{u}=\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\Bigg\{\frac{2R_0\bar{P}}{|\bar{x}-\bar{y}|}-2\bar{P}+\int_0^1\frac{1}{\xi}\left(\frac{R_0}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|}-1\right)d\xi\,\bar{P}-$$

$$-\bar{R}\times\left[\int_0^1\left(\frac{R_0(\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}-\frac{3R_0(\bar{x}\xi-\bar{y})}{\xi|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}-\frac{3\bar{y}}{\xi R_0^2}\right)d\xi+\frac{\bar{y}}{R_0^2}\right]\times\bar{P}+$$

$$+\bar{R}\left[2\int_0^1\frac{(\bar{x}\xi-\bar{y},\ \bar{P})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}d\xi-\frac{R_0}{m}\int_0^1\frac{(A\xi^{-n_1}+B\xi^{-n_2})(\bar{x}\xi-\bar{y},\ \bar{P})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}d\xi\right]+$$

$$+ R_0 R^2 \left[\int_0^1 (\xi - 3) \left(\frac{\overline{P}}{|\overline{x}\xi - \overline{y}|^3} - \frac{3(\overline{x}\xi - \overline{y}, \overline{P})(\overline{x}\xi - \overline{y})}{|\overline{x}\xi - \overline{y}|^5} \right) d\xi \right] +$$

$$+ R_0 \frac{R_0^2 - 3R^2}{2} \int_0^1 (A_1 \xi^{1-n_1} + B_1 \xi^{1-n_2}) \left(\frac{\overline{P}}{|\overline{x}\xi - \overline{y}|^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(\overline{x}\xi - \overline{y}, \overline{P})}{|\overline{x}\xi - \overline{y}|^5} (\overline{x}\xi - \overline{y}) \right) d\xi \Big\} d_y S, \qquad (31)$$

де

$$A = \frac{(2n_1 + 1)[(m-4)n_1 - 2(m-1)]}{n_1(n_1 - n_2)};$$

$$B = -\frac{(2n_2 + 1)[(m-4)n_2 - 2(m-1)]}{n_2(n_1 - n_2)};$$

$A_1 = \frac{2n_1 + 1}{n_1 - n_2}$; $B_1 = -\frac{2n_2 + 1}{n_1 - n_2}$; n_1 і n_2 — корені рівняння $mn^2 - (m-2)n + m - 1 = 0$.

Всі внутрішні інтеграли формули (31), до яких не входять ξ^{-n_1}, ξ^{-n_2}, ξ^{1-n_1}, ξ^{1-n_2}, обчислюються до кінця. Між тим, більш зручно формулу (31) залишити в наведеному вигляді.

З формули (31) легко обчислюється значення зсуву в центрі сфери та одержується

$$2G\overline{u}(0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{5m}{7m-5} \iint_{|\overline{y}| = R_0} \left(\overline{P} - \frac{3(\overline{y}, \overline{P})\overline{y}}{R_0^2} \right) d_y S. \qquad (32)$$

З а у в а ж е н н я 2. Розв'язок задачі теорії пружності для зовнішності сфери, коли на поверхні її задані напруги, дається слідуючою інтегральною формулою:

$$2G\overline{u} = -\frac{1}{4\pi R_0} \iint_{|\overline{y}| = R_0} \left\{ \frac{2R_0}{|\overline{x} - \overline{y}|} + \int_0^1 \frac{R_0}{|\overline{x} - \xi\overline{y}|} d\xi + \overline{x} \times \right.$$

$$\times \left[R_0 \int_0^1 \frac{(\overline{x} - \xi\overline{y})(1 - 3\xi)}{|\overline{x} - \xi\overline{y}|^3} \right] \times \overline{P} - \overline{x} R_0 \int_0^1 (A_2 + B_2 \xi^{-n_1 - 1} +$$

$$+ C_2 \xi^{-n_2 - 1}) \frac{(\overline{x} - \xi\overline{y}, \overline{P})}{|\overline{x} - \xi\overline{y}|^3} - R_0 \int_0^1 \left[\frac{\overline{P}}{|\overline{x} - \xi\overline{y}|^3} - \right.$$

$$- \frac{3(\overline{x} - \xi\overline{y}, \overline{P})(\overline{x} - \xi\overline{y})}{|\overline{x} - \xi\overline{y}|^5} \Big[|\overline{x}|^2 (A_3 + B_3 \xi^{-n_1 - 1} + C_3 \xi^{-n_2 - 1}) +$$

$$\left. \left. + \frac{m}{2} (|\overline{x}|^2 - R_0^2)(B_4 \xi^{-n_1 - 1} + C_4 \xi^{-n_2 - 1}) \right] d\xi_1 \right\}, \qquad (33)$$

де A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, B_4 и C_4 — конкретні числа; n_1 і n_2 — корені рівняння $mn^2+(3m-2)n+3(m-1)=0$.

Формула (33) дає можливість обчислити зсув $\bar{u}(x)$ в довільній точці поза сферою $|\bar{y}|=R_0$ за заданими на поверхні сфери напругами.

В цій формулі всі інтеграли, до яких не входять ξ^{-n_1-1} та ξ^{-n_2-1}, обчислюються до кінця.

Але через громіздкість цих інтегралів, ми вважаємо більш зручним залишити формулу (33) у вказаному вигляді.

Зауваження 3. Підкреслимо, що ряди, які дають розв'язки відповідних задач при розривних граничних умовах, збігаються повільно, в той час, як інтегральні представлення вільні від цього недоліку.