Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ІГНАТЬЄВ

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В даній роботі обчислені регулярні частини матриці Гріна для півпростору і кола. На підставі цих обчислень одержується перетворення відповідних розв'язків, які являють собою аналоги відомого перетворення Кельвіна.

Регулярні частини матриці Гріна виражені через фундаментальну матрицю Сомільяна та її похідні. Можливість такого представлення випливає з відомої теореми Фредгольма про вираження головної частини розв'язку системи рівнянь пружності через фундаментальну матрицю та її похідні.

При обчисленні регулярної частини матриці Гріна для півпростору ми виходимо з відомих інтегральних представлень розв'язків відповідних задач (див., напр., [2]).

Побудова регулярних частин матриці Гріна для обох основних задач теорії пружності для півпростору зводиться до обчислення ряду інтегралів.

При обчисленні регулярної частини матриці Гріна для кола, завдяки комплексному представленню розв'язків, вдалося уникнути обчислення громіздких інтегралів, які прийшлося б обчислювати, якщо виходити з інтегрального представлення розв'язку першої основної задачі (див., напр., [3], стор. 304).

ПОБУДОВА РЕГУЛЯРНИХ ЧАСТИН МАТРИЦІ ГРІНА

1. Згідно з визначенням матриці Гріна, знаходження регулярного додатка до матриці Сомільяна $\omega(x-y)$ зводиться до розв'язку системи рівнянь

$$(\Delta + \tau\partial\partial')P(x) = 0 \tag{1}$$

при граничній умові $P(x_1, x_2, 0; y_1, y_2, y_3) = \omega(x_1-y_1; x_2-y_2; -y_3)$,

де

$$\omega(x-y) = \frac{1}{8\pi(\tau+1)}\left[\frac{\tau+2}{|x-y|}E + \frac{\tau(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}\right].$$

Але розв'язок системи (1) при заданих граничних умовах виражається за формулою (див., напр., [2])

$$P(x;\, y) = \frac{x_3}{2\pi(\tau+2)}\int\limits_{\infty}\left[\frac{2E}{|x-z|^3} - \frac{3\tau(x-z)(x-z)'}{|x-z|^5}\right]\bar{f}(z)\,dz, \tag{2}$$

де $\bar{f}(z)$ — задана на границі області вектор-функція.

Підставимо граничну умову в рівність (2) і одержимо

$$P(x, y) = \kappa x_3 \Bigg[2(\tau+2) E \int_\infty \frac{dz}{|z-y|\,|x=z|^3} + 2\tau \int_\infty \frac{(z-y)(z-y)'\,dz}{|z-y|^3\,|x-z|^3} +$$

$$+ 3\tau(\tau+2) \int_\infty \frac{(x-z)(x-z)'\,dz}{|z-y|\,|x-z|^5} + 3\tau^2 \int_\infty \frac{(x-z)(x-z)'(z-y)(z-y)'}{|z-y|^3\,|x-z|^5}\,dz \Bigg],$$

де
$$\kappa = -\frac{1}{16\pi^2(\tau+1)(\tau+2)}.$$

В останньому виразі позначимо перший, другий, третій та четвертий інтеграли відповідно через I_1, I_2, I_3 і I_4. Тоді одержимо

$$P(x; y) = \kappa x_3 [2(\tau+2) I_1 E + 2\tau I_2 + 3\tau(\tau+2) I_3 + 3\tau^2 I_4]. \tag{3}$$

Інтеграли I_2, I_3, I_4 можуть бути обчислені з допомогою виразу інтеграла I_1. Але інтеграл I_1 може бути легко виражений за формулою

$$I_1 = \int_\infty \frac{dz}{|z-x|\,|x-z|^3} = \frac{2\pi}{x_3\,|x-\tilde{y}|}. \tag{4}$$

Якщо підставимо в рівність (3) обчислені вирази I_1, I_2, I_3, I_4 і виконаємо відповідні спрощення, то одержимо

$$P(x; y) = 2\pi\kappa \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

де

$$a_{11} = \frac{(\tau+2)}{|x-\tilde{y}|} + \frac{2\tau^2 x_3 y_3}{|x-\tilde{y}|^3} + \frac{\tau(x_1-y_1)^2}{|x-\tilde{y}|^3}\left[\tau + 2 - \frac{6\tau x_2 y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{(x_1-y)(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[\tau + 2 - \frac{6\tau x_3 y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{13} = \frac{\tau(x_1-y_1)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3) + \frac{6\tau x_3 y_3 (x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{22} = \frac{(\tau+2)^3}{|x-\tilde{y}|} + \frac{2\tau_2 x_3 y_3}{|x-\tilde{y}|^3} + \frac{\tau(x_2-y_2)^2}{|x-\tilde{y}|}\left[\tau + 2 - \frac{6\tau x_3 y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{23} = \frac{\tau(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3) + \frac{6\tau x_3 y_3 (x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{31} = \frac{\tau(x_1-y_1)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3) - \frac{6\tau x_3 y_3 (x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{32}=\frac{\tau(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3)-\frac{6\tau x_3 y_3(x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{33}=\frac{(\tau+2)^2}{|x-\tilde{y}|}+\frac{2(x_3-y_3)^2\tau}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{\tau(x_3^2-y_3^2)}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{6\tau^2 x_3 y_3(x_3+y_3)^2}{|x-\tilde{y}|^5}.$$

Якщо виразимо матрицю з формули (5) через матрицю Соміньяна, та її похідні, знайдемо

$$P=\omega(x-\tilde{y})+\frac{2\tau y_3}{\tau+2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_i}(e_3 e'_i+e_i e'_3)+$$

$$+\frac{\tau y_3^2}{\tau+2}\Delta_x\,\omega(x-\tilde{y})(e_3 e'_3-e_2 e'_2-e_1 e'_1), \tag{6}$$

де

$$\omega(x-\tilde{y})=\frac{1}{8\pi(\tau+1)}\left[\frac{\tau+2}{|x-\tilde{y}|}E+\frac{\tau(x-\tilde{y})(x-\tilde{y})'}{|x-\tilde{y}|^3}\right];$$

$$(x-\tilde{y})=\left\|\begin{matrix}x_1-y_1\\ x_2-y_2\\ x_3+y_3\end{matrix}\right\| \qquad (x-\tilde{y})'=\|x_1-y_1;\ x_2=y_2;\ x_3+y_3\|;$$

$$|x-\tilde{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2};$$

$$e_1=\left\|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\|;\qquad e_2=\left\|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\|;\qquad e_3=\left\|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\|;$$

$$e'_1=\|1,0,0\|;\ e'_2=\|0,1,0\|;\ e'_3=\|0,0,1\|;$$

$$\tau=\frac{m}{m-2};$$

m є числом Пуассона.

2. Якщо на границі півпростору задані напруги, то розв'язок системи в області $x_3>0$, що задовольняє в кожній точці площини $x_3=0$ граничній умові

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{u}(x)|_{x_3=0}=\bar{f}(x_1,\ x_2),$$

де $\bar{f}(x_1, x_2)$ — задана неперервна і обмежена вектор-функція, а $B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матриця граничних умов, виразиться за формулою (див., напр., [2])

$$\bar{u}(x)=\int_{\infty}G^{(e_3)}(x-z)\bar{f}(z)\,dz, \tag{7}$$

де ядро другого потенціалу

$$G^{(e_3)}(x-z) = -\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{2\tau+1}{|x-z|}E - \frac{2\tau(x-z)(x-z)'}{|x-z|^4} + \right.$$

$$+\frac{(x_2-z_2)^2-(x_1-z_1)^2}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]^2}(e_1 e'_1 - e_2 e'_2) - \frac{2(x_1-z_1)(x_2-z_2)(e_1 e'_2 + e_2 e'_1)}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]^3} +$$

$$\left. + \frac{2\,[e_3(x-z)' - (x-z)\,e'_3}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]} + \frac{e_3 e'_3}{|x-z|}\right\}. \tag{8}$$

Регулярний в області $x_3>0$ додаток задачі цього пункту позначимо через $Q(x;\, y)$.

Згідно з визначенням функції Гріна, ми повинні мати

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[\omega(x-y) - Q(x, y]\,|_{x_3=0} = 0,$$

або

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x;\, y)\,|_{x_3=0} = B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x-y)\,|_{x_3=0}.$$

Але відомо:

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{1}{4\pi(\tau+1)}\left[\frac{y_3}{|z-y|^3}E + \frac{3\tau\, y_2(z-y)(z-y)'}{|z-y|^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{z_1-y_1}{|z-y|^3}(e_3 e'_1 - e_1 e'_3) + \frac{z_2-y_2}{|z-y|^3}(e_3 e'_2 - e_2 e'_3)\right]. \tag{9}$$

Підставивши (8) та (9) у формулу (7), а потім обчисливши відповідні інтеграли та зробивши деякі спрощення, одержимо

$$Q = -\frac{\tau+2}{\tau}\,\omega(x-\tilde{y}) - 2y_3\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_i}(e_3 e'_i - e_i e'_3) +$$

$$+ y_3^2\,\Delta_x\,\omega(x-\tilde{y})(e_1 e'_1 + e_2 e'_2 - e_3 e'_3) +$$

$$+ \frac{\tau+1}{\tau}\int_{\infty}^{y_3}(y_3-\alpha)\,\Delta\omega(x-\tilde{y}_\alpha)\,d\alpha\,(e_1 e'_1 + e_2 e_2' - e_3 e'_3) +$$

$$+ \frac{2}{\tau}\int_{\infty}^{y_3}(y_3-\alpha)\left[\frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_1\,\partial x_2}(e_1 e'_2 + e_2 e'_1) + \frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_1^2}e_2 e'_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_2^2}e_1 e'_1\right]d\alpha, \tag{10}$$

де

$$x-\tilde{y}_\alpha = (x_1-y_1;\; x_2-y_2;\; x_3+\alpha).$$

З формули (6) виходить, що у випадку, коли на границі півпростору задані зміщення, регулярна частина матриці Гріна має особливість в точці $\tilde{y}$, яка є дзеркальним відображенням точки особливості y матриці Сомільяна.

Коли ж на границі півпростору задані напруги, то регулярна частина матриці Гріна має особливість вздовж променю, паралельного нормалі до границі області $x_3=0$, що виходить з точки $\tilde{y}_3$ і йде в точку $-\infty$ (див. формулу (10)).

3. Якщо на границі кола задані зміщення, то «регулярний» додаток матриці Гріна в середині кола можна знайти елементарними методами.

За формулою Г. В. Колосова компоненти зміщення $\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}$ виражаються через аналітичні функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ слідуючим чином:

$$2\mu(u_1+iu_2)=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}, \tag{11}$$

де $\zeta=x_1+ix_2$.

Введемо позначення

$$\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\varphi(z)=\Phi(z);\quad -\frac{\psi(z)}{2\mu}=\Psi(z);$$

$$\kappa=\frac{2(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+3\mu};\quad \varepsilon=\begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix};\quad \varepsilon'=\|1,\ i\|.$$

Тоді очевидно, що $u_1+iu_2=\varepsilon' u$ і рівність (11) переписується у вигляді

$$\varepsilon' u=\Phi(\zeta)-\kappa\zeta\overline{\Phi'(\zeta)}+\overline{\Psi(\zeta)}. \tag{11'}$$

Переходячи в формулі (11′) до комплексно-спряжених значень, одержимо

$$\overline{\varepsilon}' u=\overline{\Phi(\zeta)}-\kappa\overline{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta). \tag{11''}$$

Очевидні слідуючі тотожності:

$$E=\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\varepsilon'+\frac{1}{2}\varepsilon\overline{\varepsilon}', \tag{12}$$

де E — одинична матриця розмірів 2×2,

$$u(\zeta)=\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\varepsilon' u+\frac{1}{2}\varepsilon\overline{\varepsilon}' u; \tag{13}$$

$$u(\zeta)=\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}[\Phi(\zeta)-\kappa\zeta\overline{\Phi'(\zeta)}+\overline{\Psi(\zeta)}]+\frac{1}{2}\varepsilon[\overline{\Phi(\zeta)}-\kappa\overline{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta)]. \tag{14}$$

В формулі (14) $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ — функції (а не матриці).

Якщо ж формулу (14) будемо застосовувати до квадратної матриці $\omega(\zeta)$, то $\Phi(\zeta)$ та $\Psi(\zeta)$ повинні бути функціональними рядками.

Введемо ще такі позначення:

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|; \quad y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|; \quad \eta = y_1 + i y_2 .$$

Відомо, що матриця Сомільяна з особливістю в точці y у випадку площини має вигляд:

$$\omega (x - y) = 2c \left[E \ln |x - y| - \varkappa \frac{(x - y)(x - y)'}{|x - y|^2} \right], \tag{15}$$

де

$$c = - \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu (\lambda + 2\mu)}; \qquad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}.$$

З формули (15) одержуємо

$$\varepsilon' \omega (x - y) = 2c \left[\varepsilon' \ln |x - y| - \varkappa \frac{\varepsilon' (x - y)(x - y)'}{|x - y|^2} \right]. \tag{16}$$

Але

$$|x - y| = |\zeta - \eta|; \quad \varepsilon' (x - y) = \zeta - \eta;$$

$$\overline{\varepsilon}' (x - y) = \overline{\zeta} - \overline{\eta}; \quad |x - y|^2 = (\zeta - \eta)(\overline{\zeta} - \overline{\eta}).$$

Тому, застосовуючи формулу (13) до стовпця, одержимо

$$\| x - y \| = \frac{1}{2} \overline{\varepsilon} \varepsilon' (x - y) + \frac{1}{2} \varepsilon \overline{\varepsilon}' (x - y) = \frac{\zeta - \eta}{2} \overline{\varepsilon} + \frac{(\overline{\zeta} - \overline{\eta})}{2} \varepsilon.$$

Тоді рівність (16) дає

$$\varepsilon \omega (x - y) = 2c \left[\ln |\zeta - \eta| \varepsilon' - \frac{\varkappa}{2} \frac{\zeta - \eta}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}} \overline{\varepsilon}' - \frac{\varkappa}{2} \varepsilon' \right]. \tag{17}$$

Через те, що матриця Сомільяна визначається з точністю до сталого доданка, у виразі (17) член, рівний $- c \varkappa \varepsilon'$ можемо відкинути. Позначимо частину матриці Сомільяна, що залишається, через Ω. Тоді маємо

$$\varepsilon' \Omega (x - y) = c \left[2 \ln |\zeta - \eta| \varepsilon' - \frac{\varkappa (\zeta - \eta)}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}} \overline{\varepsilon}' \right]. \tag{18}$$

Легко бачити, що рядок $\varepsilon' \Omega (x - y)$ можна подати у вигляді

$$\varepsilon' \Omega (x - y) = \Phi_0 (\zeta) - \varkappa (\zeta - \eta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \overline{\Phi_0 (\zeta)} + \overline{\Psi_0 (\zeta)}, \tag{19}$$

де покладено

$$\Psi_0 (\zeta) = c \ln (\zeta - \eta) \overline{\varepsilon}' \text{ і } \Phi_0 (\zeta) = c \ln (\zeta - \eta) \varepsilon'.$$

Будемо тепер шукати «доданок» $\varepsilon' g (x, y)$ у вигляді

$$\varepsilon' g (x, y) = \Phi_1 (\zeta, \eta) - \varkappa (\zeta - \eta) \frac{\overline{\partial \Phi_1}}{\partial \zeta} + \overline{\Psi_1 (\zeta, \eta)}.$$

З граничної умови

$$\varepsilon' g(x, y) = \varepsilon' \Omega\ (x, y), \tag{20}$$

випливає

$$\varepsilon' g = \Phi_1(\zeta, \eta) - \varkappa(\zeta - \eta)\overline{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon}} + \overline{\Psi}_1(\zeta, \eta) =$$

$$= c\ln(\zeta - \eta)\varepsilon' + c\ln(\overline{\zeta} - \overline{\varepsilon})\varepsilon' - \frac{c\varkappa(\zeta - \eta)\overline{\varepsilon'}}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}}.$$

Якщо позначити через η_1 точку, інверсійну з точкою η відносно кола, одержимо

$$|\eta|\ |\eta_1| = R_0^2;\ \eta\overline{\eta}_1 = R_0^2.$$

Крім того, якщо точка ζ знаходиться на колі, то справедливі рівності

$$\zeta\cdot\overline{\zeta} = R_0^2;\quad \frac{|\zeta - \eta|}{|\zeta|} = \frac{|\zeta - \eta^1|}{R_0}.$$

Тому з (20) маємо

$$\varepsilon' g = c\varepsilon'\ln(\eta_1 - \zeta) + c\varepsilon'\ln(\overline{\eta}_1 - \overline{\zeta}) + 2c\varepsilon'\ln\frac{|\eta|}{R_0} +$$

$$+ c\varkappa\varepsilon'\frac{R_0^2 - \eta\overline{\eta}}{R_0^2\overline{\eta}}\left(\zeta + \eta_1 + \frac{\eta^2}{\zeta - \eta_1}\right) + cx(\zeta - \delta)\left[\frac{\overline{\varepsilon'}}{\overline{\eta}_1 - \overline{\varepsilon}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa(R_0^2 - \eta\overline{\eta})\varepsilon'}{R_0^2\eta^2}\left(\frac{R_0^2\overline{\eta}}{(\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1)^2} - \eta\right) - \frac{\varkappa^2 c\varepsilon'(R_0^2 - \eta\overline{\eta})}{R_0\eta}\left(\eta + \frac{R_0^2}{\overline{\eta}_1 - \overline{\zeta}}\right)\right]. \tag{21}$$

Враховуючи відкинутий член $-c\,x\varepsilon'$ для «доданка» з поправкою $\varepsilon' g$, знайдемо

$$\varepsilon' g_s = c\varepsilon'\omega(x - \widetilde{y}) + 2c\varepsilon'\ln\frac{|\eta|}{R_0} + \frac{c\varkappa}{R_0^2}[\overline{\varepsilon}_1(\zeta + h_1)(h_1 - h) - \varkappa\varepsilon'\zeta(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})] -$$

$$- \frac{c\varkappa\varepsilon'(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1} + \frac{c\varkappa\overline{\varepsilon}'(\eta_1 - \eta)\eta_1^2}{R_0^2(\varepsilon - \eta_1)} + \frac{c\varkappa^2\varepsilon'\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})(\zeta - \eta)}{\eta(\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1)^2}. \tag{22}$$

Застосовуючи до формули (22) формулу (13), одержимо

$$g_s = \omega(x - \widetilde{y}) + 2cE\ln\frac{|\eta|}{R_0} + \frac{c\varkappa}{2R_0^2}[\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'(\zeta - \eta_1)(\eta_1 - \eta) - \varkappa\varepsilon\overline{\varepsilon}'(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})] +$$

$$+ \frac{c\varkappa}{2R_0^2}[\varepsilon\varepsilon'(\overline{\zeta} + \overline{\eta}_1)(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}) - \varkappa\varepsilon\overline{\varepsilon}'\,\overline{\zeta}(\eta_1 - \eta)] - \frac{c\varkappa}{2}\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\frac{\eta_1 - \eta}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}} -$$

$$- \frac{c\varkappa}{2}\varepsilon\varepsilon'\frac{\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}}{\overline{\zeta} - \eta^2} + \frac{c\varkappa^2}{2}\overline{\varepsilon}\varepsilon'\frac{\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1} + \frac{c\varkappa^2\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}'(\eta_1 - \eta)}{2(\zeta - \eta_1)} +$$

$$+\frac{c\varkappa}{2R_0^2}\frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'(h_1-\eta)h_1^2}{\zeta-\eta_1}+\frac{c\varkappa\varepsilon\varepsilon'(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})\overline{\eta}^2}{2R_0^2(\overline{\zeta}-\overline{\eta}_1)^2}+\frac{c\varkappa^2\overline{\varepsilon}\varepsilon'\eta_1(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})}{2\eta}\cdot\frac{\zeta-\eta}{(\overline{\zeta}-\overline{h}_1)^2}+$$

$$+\frac{c\varkappa^2\varepsilon\overline{\varepsilon}'\eta_1(\eta_1-\eta)(\overline{\varepsilon}-\overline{\eta})}{2\overline{\eta}(\zeta-\eta_1)^2}. \tag{23}$$

Якщо вираз (23) представимо через матрицю Сомільяна з особливістю в точці η_1, то одержимо

$$g_s=\omega(x-\tilde{y})+\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_1}A+\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_2}B+\Delta_x\,\omega(x-\tilde{y})\,C+D, \tag{24}$$

де

$$A=R_e\left[\frac{\varkappa}{2}\frac{(\overline{\eta}_1-h)(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})}{\eta}\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$B=I_m\,\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{(\overline{\eta}_1+\overline{\eta})(\overline{\eta}_1+\overline{\eta})}{\eta}\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$C=\frac{\varkappa}{4}R_0\left[\frac{(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})(\eta_1-\eta)\overline{\eta}}{\eta}\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$D=\frac{\varkappa c}{R_0^2}R_e\left[(\zeta-\eta_1)(\eta_1-\eta)\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'-\dot{\varkappa}\varepsilon\overline{\varepsilon}'(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})\right]+2E\ln\frac{|\eta|}{R_0}.$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ

Слідуючі зауваження легко перевіряються.

Зауваження 1. Система рівнянь Ляме $(\Delta_y+\tau\partial\partial')u=0$ може бути перетвореною до вигляду

$$2(\tau+2)|\eta|^4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1\partial\overline{\eta}}+\tau\left[\overline{\eta}_1^4\varepsilon\varepsilon'\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\eta}_1^2}+\eta_1^4\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}.\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}+\right.$$

$$\left.+2\overline{\eta}_1^3\varepsilon\varepsilon'\frac{\partial u}{\partial\overline{\eta}_1}+2\eta_1^3\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]=0, \tag{25}$$

Зауваження 2. Формула (24) може бути записана слідуючим чином:

$$g_s=\omega(\kappa-\tilde{y})+\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial\eta_1}A_1+\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial\eta_1}B_2+\Delta\omega\,C_1+D, \tag{26}$$

де позначено

$$A_1=\frac{\varkappa\,\overline{\eta}_1^2}{2R_0^2}\left[\frac{\overline{\eta}_1(\overline{h}_1-\overline{\eta})\varepsilon\varepsilon'}{\eta}-(\eta_1-\eta)\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\right];$$

$$B_1=\frac{\varkappa\,\overline{\eta}_1^2}{2R_0^2}\left[\frac{\eta_1(\eta_1-\eta)\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'}{\overline{\eta}}-(\overline{\eta}_1-\eta)\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$C'_1 = \frac{\varkappa \eta_1^2 \overline{\eta}_1^2}{2R_0}\left[\frac{(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})\overline{\eta}_1(\eta_1-\eta)}{\eta}\varepsilon\varepsilon' + \frac{\eta_1(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})(\eta_1-\eta)}{\overline{\eta}}\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\right].$$

Зауваження 3. Кожний стовпець регулярної частини D доданка (26) задовольняє системі рівнянь пружності, що перевіряється безпосередньо.

Зауваження 4. Будь-який розв'язок $u(x)$ системи рівнянь Ляме в скінченій області D можна представити з допомогою фундаментальної матриці Сомільяна ω у вигляді

$$u(x) = \int_D \left\{\omega(z-y) A\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u(z)\right\} ds - \int_S \omega(z-x) \sum_{ij} \gamma_i B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_{i_j}} d_z s +$$

$$+ \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-x)}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_z s, \qquad (27)$$

де $B_{ij} = \mu \delta_{ij} E + \lambda e_i e'_j + \mu e_j e'_i$; δ_{ij} — символ Кронекера; γ_i — проекція одиничної нормалі до границі S області D; оператор пружності

$$A\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \mu \triangle + (\lambda+\mu)\partial\partial'.$$

Зауваження 5. Якщо на границі S плоскої області D задано вектор зміщення $F(z)$, то розв'язок неоднорідної системи $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x)$ записується з допомогою формули

$$u(x) = \int_D \{G(z-y) f(z)\} dz + \int_S \sum_S \gamma_i(z) \frac{\partial G(z-x(}{\partial z_i} B_{ij} F(z) d_z s. \qquad (28)$$

де G — матриця Гріна.

Зауваження 6. Якщо матриця $u(x)$ регулярна в області D і $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$, то вона виражається через матрицю Сомільяна ω за формулою

$$u(x) = -\int_S \omega(z-x) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{ou}{\partial z_j} d_z s + \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-x)}{\partial z_j} B_{ij}(z) d_z s. \qquad (29)$$

Теорема 1. Матриця Гріна G для системи рівнянь Ляме має властивість симетрії $G'(x, y) = G(y, x)$, де знак «штрих» означає транспонування. Доведення цієї теореми проводиться звичайним чином на основі формул типу Гріна.

Наслідок перший. Доданок до матриці Гріна g_s має властивість симетрії $g'_s(x, y) = g_s(y, x)$.

Наслідок другий. Матриця $G'(x, y)$, одержана транспонуванням матриці Гріна $G(x, y)$, задовольняє системі рівнянь пружності

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0$$

Наслідок третій. Транспонований додаток $g'(x, y)$ також задовольняє системі рівнянь на координаті y.

Теорема 2. Якщо $u(y)$ є розв'язок системи рівнянь Ляме, то

$$W' = u(\tilde{y}) - A' \frac{\partial u}{\partial y_1} - B' \frac{\partial u}{\partial y_2} + C' \triangle u \tag{30}$$

задовольняє тій самій системі рівнянь.

Позначимо оператор правої частини рівності (30) через $K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Згідно з зауваженням (5), $u(y)$ виражається за формулою (28)

$$u(y) = -\int\limits_S \omega(z-y) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \int\limits_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-y)}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s.$$

Звідси, замінивши y на $\tilde{y}$, одержимо

$$u(\tilde{y}) = -\int\limits_S \omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s +$$

$$+ \int\limits_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-\tilde{y})}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s. \tag{31}$$

Застосовуючи до рівності (31) оператор $K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ будемо мати

$$W'(y) = K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u(\tilde{y}) = K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left\{ -\int\limits_S \omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-\tilde{y})}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s. \right\}. \tag{32}$$

Нам треба довести, що $A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = 0$.

Діючи оператором пружності $A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ на рівність (32), знаходимо

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = \left\{ -\int\limits_S A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) K\omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \left[A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) K\omega(z-\tilde{y}) \right] B_{ij} u(z) d_j s \right\}.$$

Але, внаслідок того, що $K\omega(z-\tilde{y})$ задовольняє системі рівнянь пружності по координаті y, одержуємо

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = 0,$$

що й треба було довести.

Теорема 2 дає аналог, відомого для рівняння Лапласа, перетворення Кельвіна. Формули (6) та (10) також можуть бути використані як аналог перетворення Кельвіна при одержанні перетворень розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fredholm Ivar. Sur les e'qutions de le'qulibre d'un corps solide e'lasique par. Acta matematica 23. 1900.

2. Имшенецкая Е. Ф. О некоторых краевых задачах теории упругости. Автореферат диссертации, Львов, 1953.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1954.

4. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950.

5. Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. Диссертация на степень доктора чистой математики. Петербург, 1896.