Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ З ОБМЕЖЕНИМ РОЗХИЛОМ

В геометрії циркуля доводиться, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна точно розв'язати і одним циркулем, на радіуси якого жодних обмежень не накладається. Такому циркулю приписується властивість креслити кола будь-яких розмірів. Однак кожному відомо, що даним конкретним циркулем можна описувати кола, радіуси яких не перевищують відрізка, рівного максимальному розхилу ніжок циркуля. Так само цим циркулем не можна описати кола скільки завгодно малих радіусів.

Таким чином, якщо через r позначити радіус будь-якого кола, що описуємо даним циркулем, то завжди можна вказати два відрізки $R_{\min}$ і $R_{\max}$ таких, що

$$R_{\min} \leqslant r \leqslant R_{\max}.$$

Відрізок $R_{\max}$ обмежує величину радіуса кола, яке описуємо даним циркулем, зверху, а відрізок $R_{\min}$ — знизу.

В роботі [2] було доказано, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна точно розв'язати одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені тільки зверху довільним сталим відрізком $R_{\max}$.

В цій статті буде показано, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна також точно розв'язати одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені тільки знизу довільним наперед заданим відрізком $R_{\min}$. Таким чином, ми будемо користуватися циркулем, який описує кола будь-якого радіуса $r \geqslant R_{\min}$. Для простоти, замість $R_{\min}$, будемо писати R.

Кожна задача на побудову в планіметрії вважається розв'язаною циркулем і лінійкою, якщо вона може бути зведена до розв'язання слідуючих п'яти основних простіших задач (основних операцій):

1. Через дві дані точки провести пряму лінію.
2. З даної точки описати коло даного радіуса.
3. Знайти точки перетину двох даних кіл.
4. Знайти точки перетину даного кола і даної прямої, заданої двома точками.
5. Знайти точку перетину двох прямих, кожна з яких задана двома точками.

Нижче буде показано, що всі ці п'ять основних задач можуть бути розв'язані одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені знизу відрізком R.

З допомогою одного циркуля ми не можемо, звичайно, накреслити неперервну пряму лінію, якщо ця пряма лінія задана двома точками, однак тільки циркулем можна побудувати одну, дві і будь-яке необмежене число точок, розміщених як завгодно щільно на цій прямій. З практичної точки зору, немає, звичайно, підстави вважати пряму побудованою, якщо побудовані деякі її точки. Для побудови прямої лінійка не може бути замінена іншими інструментами, які не призначені для проведення прямої лінії. Так само ми не зможемо накреслити нашим циркулем неперервного кола, якщо радіус цього кола є менше R, однак ми побудуємо на ньому будь-яке число точок, розміщених як завгодно щільно.

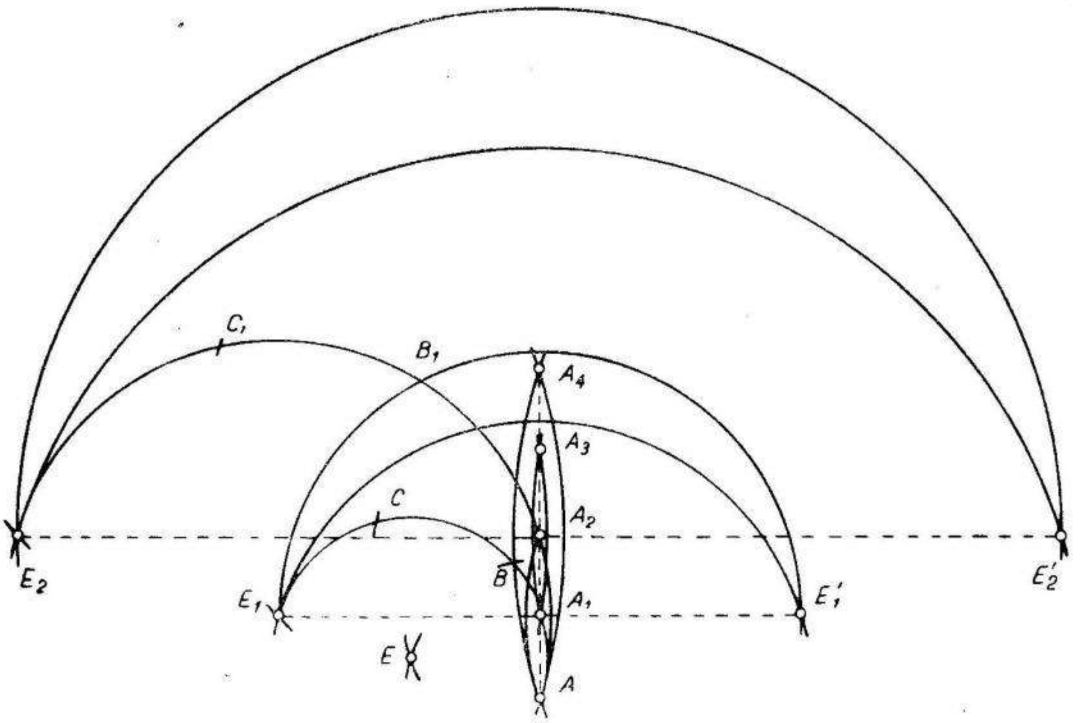

Рис. 1.

Для скорочення запису, фразу «з точки A, як з центра, радіусом BC списуємо коло (або дугу)» умовимося заміняти фразою «Описуємо (A, BC)», або «Проводимо (A, BC)». Замість символа (A, AB) будемо писати (A, B). Для наочності рисунка будемо на ньому проводити пунктирні прямі лінії.[1]

Задача 1. Побудувати відрізок в n разів більший даного відрізка AA_1 (n — натуральне число).

П о б у д о в а.

Будуємо відрізок A_1E_1, перпендикулярний до даного відрізка AA_1. Для цього описуємо кола (A, a) і (A_1, a), де a довільний відрізок більший або рівний R; в перетині проведених кіл одержуємо точку E. Проводимо коло (E, A) і відкладаємо на ньому хорди $AB=BC=CE_1=a$. Тоді $A_1E \perp A_1A$. Будуємо потім точку E'_1, симетричну точці E_1, відносно прямої AA_1. Для цього креслимо кола (A, E_1) і (A_1, E_1), в перетині яких одержимо точку E'_1. Будуємо точку A_2 симетричну точці A відносно прямої $E_1E'_1$. Очевидно, $AA_2=2A_1A$.

[1] **В побудові ці прямі не будуть приймати участі.**

Якщо тепер на колі (E_1, A) радіусом AE_1 відкласти хорди $AB_1 = B_1C_1 = C_1E_2$, одержимо $A_2E_2 \perp AA_2$. Проводимо кола (A, E_2) і (A_2, E_2), в перетині одержимо точку E_2', симетричну точці E_2, відносно прямої AA_2. Нарешті, будуємо точки A_3 і A_4, симетричні точкам A_1 і A відносно прямої $E_2E'_2$, для чого проводимо кола (E_2, A_1), (E'_2, A_1), (E_2, A) і (E'_2, A). Одержимо $AA_3 = 3AA_1$, $AA_4 = 4AA_1$. Наступні побудови повторюються аналогічно. Справедливість побудови очевидна. Радіуси всіх кіл даної побудови більші R, значить, ці кола можуть бути проведені даним циркулем.

Якщо $AA_1 \geqslant R$, то можна використати звичайну побудову геометрії циркуля.

Зауваження. Із цієї побудови легко бачити, що точки A_2, A_4, A_8, $A_{16}, \ldots$ можна будувати відразу, пропускаючи при цьому побудову точок A_3, A_5, A_6, A_7, $A_9, \ldots$ тобто знаходити відрізки в 2, 4, 8, 16, ... разів більше даного відрізка AA_1.

Задача 2. Побудувати відрізок, рівний $\frac{1}{n}$ даного відрізка AB. (Розділити даний відрізок на n рівних частин).

а) Побудова у випадку $AB \geqslant R$.

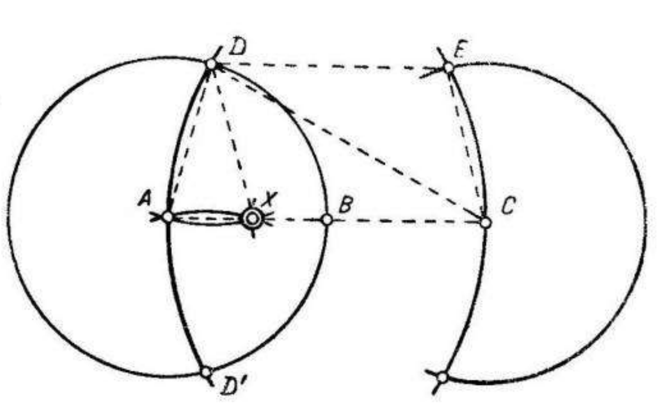

Рис. 2.

Будуємо відрізок $AC = nAB$ (задача 1). Описуємо коло (C, AB) (C, A) і (A, C); в перетині одержимо точки D і E. Якщо тепер провести кола (D, A) і (C, DE), то вони перетнуться в шуканій точці X. Відрізок $AX = \frac{1}{n} AB$.

Доведення. Точка X лежить на прямій AB, через те, що $DE \parallel AC$, а $CX \parallel DE$ (фігура $DECX$ — паралелограм). Тому рівнобедрені трикутники ACD і ADX подібні, звідки $AC : AD = AD : AX$, або

$$AD^2 = AB^2 = AC \cdot AX = nAB \cdot AX.$$

Отже,

$$AX = \frac{1}{n} AB.$$

Радіуси всіх кіл, проведених в даній побудові, більші або рівні $AB \geqslant R$.

Для того, щоб відрізок AB розділити на n рівних частин, необхідно AX повторити n разів (задача 1).

Примітка. При побудові точки X можна замість кола (C, DE) провести коло (D', A), в цьому випадку виникає необхідність в проведенні кіл (C, AB) і (A, C).

б) Побудова у випадку $AB<R$. Будуємо відрізок $AB'=\kappa AB$ (задача 1), причому натуральне число κ беремо таким, щоб $AB' \geqslant R$. Ділимо відрізок AB' на κn рівних частин (випадок *a* розглядуваної задачі). В результаті одержимо шуканий відрізок

$$AX=\frac{AB'}{\kappa n}=\frac{\kappa AB}{\kappa n}=\frac{AB}{n}.$$

Задача 3. (1 — основна простіша задача). На прямій, заданій двома точками A і B, побудувати одну або декілька точок.

Побудова.

З точок A і B, як з центрів, описуємо два кола довільних радіусів, в перетині одержимо точки C і D. Якщо тепер довільним радіусом опишемо кола (C, r) і (D, r), то одержимо точки X і $У$, які лежать на даній прямій AB. Змінюючи значення радіуса r, ми зможемо побудувати скільки завгодно точок даної прямої.

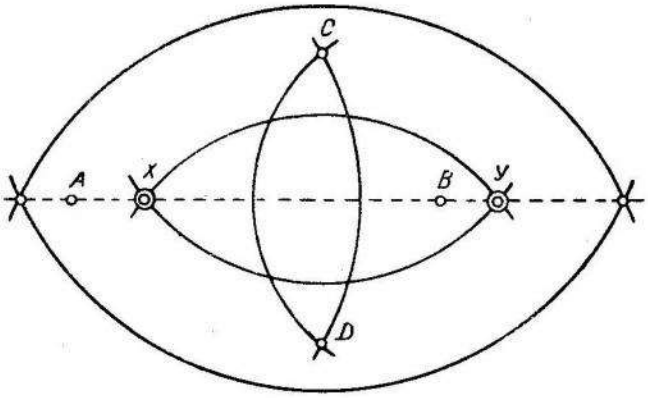

Рис. 3.

Задача 4. (2 основна простіша задача). **З даної точки, як з центра, описати коло даного радіуса r.** Якщо $r \geqslant R$, то побудова циркулем виконується безпосередньо. Якщо $r<R$, то даним циркулем ми не зможемо накреслити коло у вигляді неперервної кривої, в цьому випадку вкажемо метод побудови окремих точок даного кола.

Задачу в останньому випадку краще сформулювати таким чином.

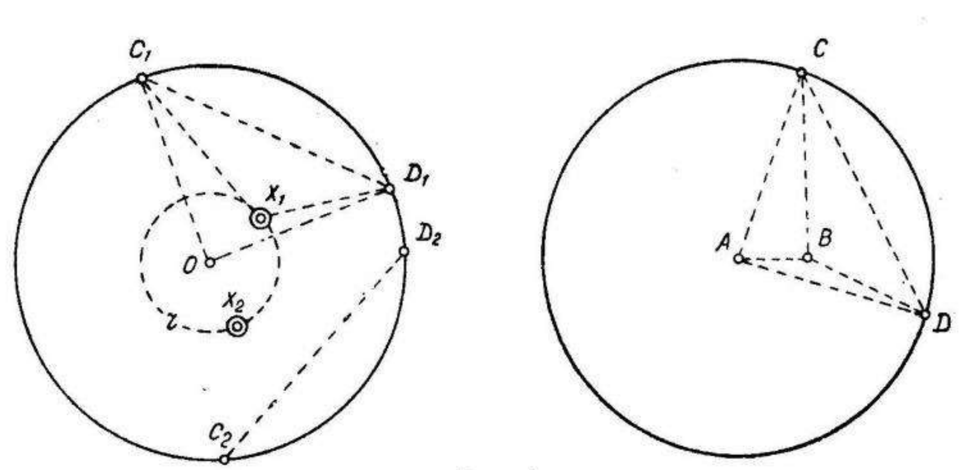

Рис. 4.

На колі, яке задане центром O і радіусом $AB=r$, побудувати одну або декілька точок.

Побудова у випадку $AB=r<R$.

Довільним радіусом a, взятим за умовою $a \geqslant R+r$, опишемо кола (O, a) і (A, a) і відкладемо на цих колах хорди $CD=C_1D_1 \geqslant R$.

Якщо тепер описати кола (C_1, CB) і (D_1, DB), то в перетині одержимо точку X_1. Точка X_1 лежить на колі (O, r). Відклавши хорду

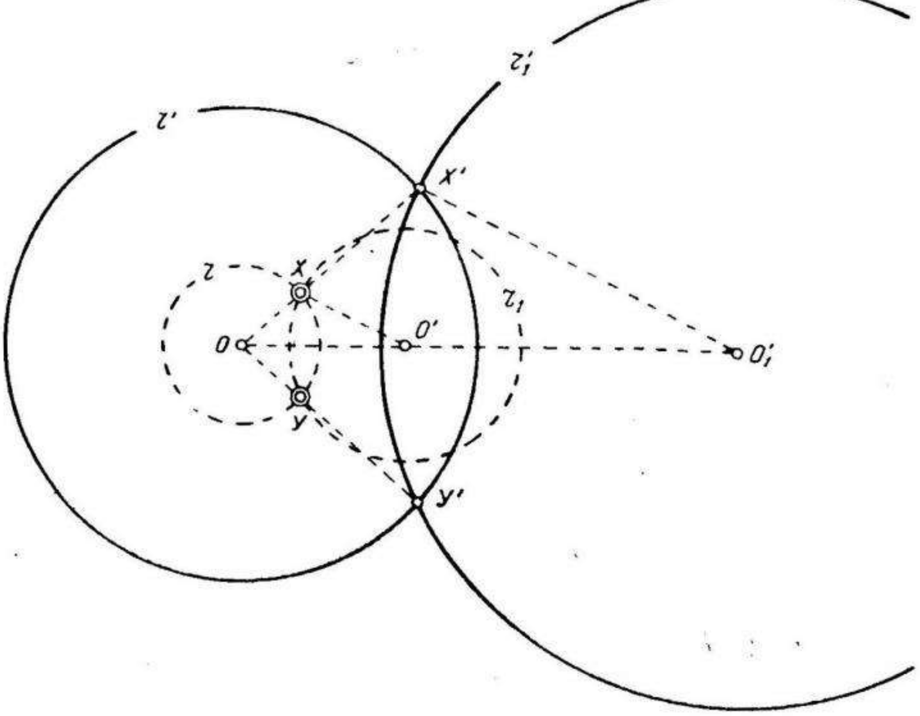

Рис. 5.

$D_2C_2=CD$, аналогічно побудуємо точку X_2 даного кола. Змінюючи положення хорди D_2C_2, можна побудувати скільки завгодно точок даного кола.

Справедливість побудови негайно випливає із рівності трикутників $\triangle ACD=\triangle OC_1D_1$ і $\triangle BCD=\triangle X_1C_1D_1$ по трьох сторонах, отже, $OX_1=$ $=AB=r$.

Задача 5. (3-я основна простіша задача). Знайти точки перетину двох даних кіл, заданих центрами O і O_1 і радіусами r і r_1.

Побудова у випадку $r \geqslant R$ і $r_1 \geqslant R$ виконується даним циркулем безпосередньо. В противному разі побудову можна виконати так (див. рис. 5).

Побудова.

Будуємо відрізок $r'=nr$ і $r'_1=nr_1$ (задача 1), при цьому натуральне число n беремо таким, щоб $r' \geqslant R$ і $r'_1 \geqslant R$. Будуємо відрізок $OO'_1=nOO_1$ і описуємо кола (O, r') і (O'_1, r'_1). Нехай останні два кола перетинаються в точках X' і $У'$. Будуємо відрізки $OX=\frac{1}{n}OX'$ і $OУ=\frac{1}{n}OУ'$ (задача 2). X і $У$ — шукані точки перетину даних кіл.

Справедливість побудови випливає із подібності трикутників $OX'O'_1$ і OXO_1.

Задача 6. Поділити дугу AB кола (O, r) пополам.

а) Побудова у випадку $r \geqslant R$.

Можемо вважати, що хорда $AB \geqslant R$, у противному разі треба відкласти хорди $AA' = BB'$, де вже $A'B' \geqslant R$, і замість дуги AB ділимо пополам дугу $A'B'$. Описуємо кола (O, AB), (A, r) і (B, r), в перетині одержимо точки C і D. Проводимо кола (C, B) і (D, A); обидва ці кола перетнуться в точці E. Якщо тепер провести кола (C, OE) і (D, OE), то в перетині останніх одержимо точки X і X_1. Точка X ділить пополам дугу AB, а точка X_1 — дугу, яка доповнює першу дугу до кола (якщо дуга AB даного кола накреслена, то із двох останніх кіл можна проводити тільки одне).

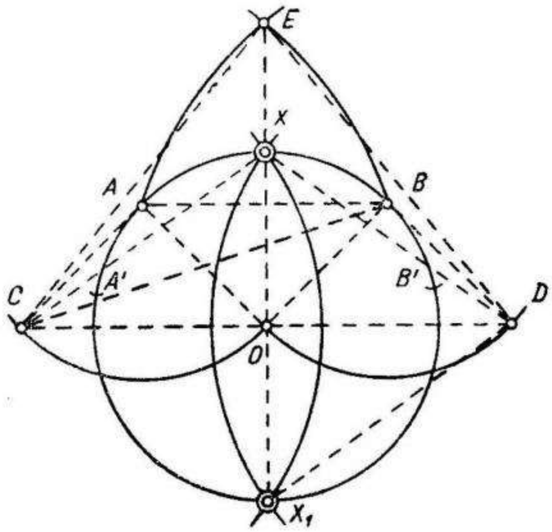

Рис. 6.

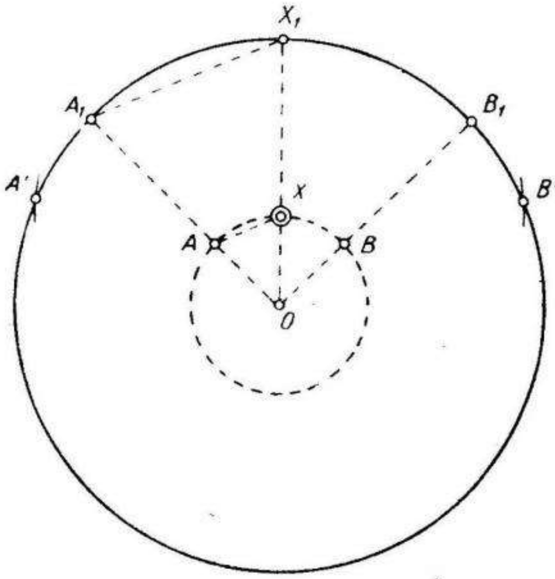

Рис. 7.

Ця побудова належить ще Маскероні. Доведення її можна знайти в кожній роботі по геометрії циркуля (див., напр., [1] § 15).

Всі кола даної побудови більші або рівні $AB \geqslant R$.

б) Побудова у випадку $AB < R$.

Будуємо відрізки $OA_1 = nOA$ і $OB_1 = nOB$ (задача 1), при цьому натуральне число n беремо таким, щоб $r_1 = OA_1 = OB_1 \geqslant R$. Ділимо дугу A_1B_1 кола (O, r_1) точкою X_1 пополам (випадок a цієї задачі). Якщо тепер побудувати відрізок $OX = \frac{1}{n} OX_1$ (задача 2), то одержимо точку X, яка ділить дану дугу AB пополам.

Доведення справедливості приведеної побудови негайно випливає із подібності рівнобедрених трикутників OAX і OA_1X_1.

Примітка. Побудову відрізка $OB_1 = nOB$ можна не проводити, замість цього треба довільним радіусом a провести кола (A, a), (B, a) і (O, A_1), в перетині яких одержимо точки A' і B', тоді, очевидно, замість дуги A_1B_1 можна розділити пополам дугу $A'B'$.

Задача 7. (4-а основна простіша задача). Знайти точки перетину даного кола і даної прямої, заданої двома точками.

Побудова. Пряма AB не проходить через центр даного кола (O, r).

Можна вважати, що $OA \geqslant R$ і $OB \geqslant R$, в противному разі треба спочатку, користуючись задачею 3, визначити другі точки даної прямої.

Будуємо точку O_1, симетричну точці O відносно прямої AB, для чого проводимо кола (A, O) і (B, O). Коло (O_1, r) перетинає дане коло (O, r) в точках X і $У$ (задача 5). Точки X і $У$ — шукані точки перетину даної прямої і кола. Якщо $r<R$, то для знаходження точок X і $У$ використаємо задачу 5.

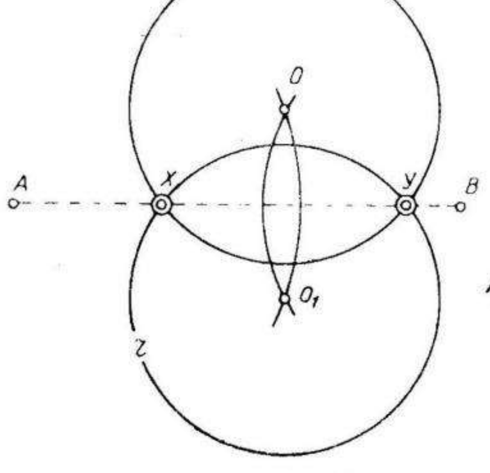

Рис. 8.

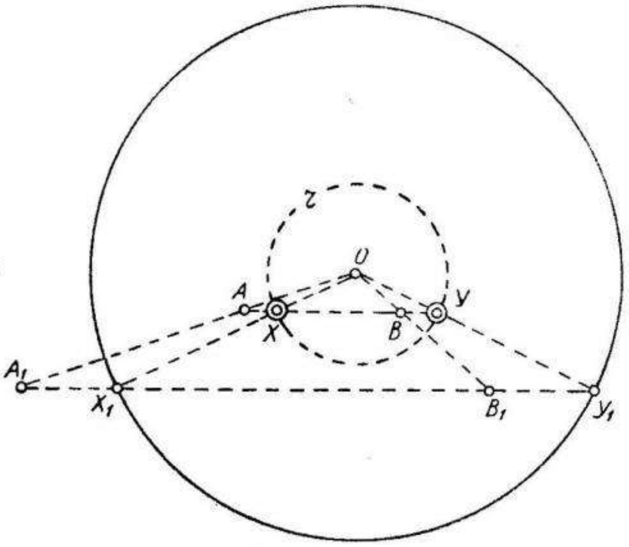

Рис. 9.

Справедливість побудови очевидна з симетрії рисунка.

Побудова. Пряма AB проходить через центр O.

Довільним радіусом $a \geqslant R$ описуємо кола (A, a); точки перетину з даним колом позначимо через A_1 і B_1 (задача 5). Якщо коло (A, a) не перетинає дане коло, то спочатку треба побудувати другу точку прямої AB (задача 3).

Ділимо пополам дуги, на які точки A_1 і B_1 розділили дане коло (задача 6), в результаті знайдемо шукані точки X і $У$ перетину даної прямої і даного кола.

Побудова. (2-й спосіб).

Будуємо відрізки $r_1 = nr \geqslant R$ і $OA_1 = nOA$, $OB_1 = nOB$. Знаходимо точки перетину X_1 і $У_1$ кола (O, r_1) і прямої A_1B_1 (випадок a або $б$ цієї задачі), однак тепер ми зможемо описати кола (O, r_1) і (O_1, r_1). Будуємо відрізки $OX = \frac{1}{n} OX_1$ і $OУ = \frac{1}{n} OУ_1$ (задача 2). Точки X і $У$ — шукані.

Доведення справедливості побудови негайно випливає із подібності трикутників OAX і OA_1X_1.

Задача 8. Побудувати відрізок четвертий, пропорціональний трьом даним відрізкам a, b і c.

Побудова.

Будуємо відрізки $a' = na \geqslant R$, $b' = nb \geqslant R$ і $c' = mc \geqslant R$, і, крім цього, вимагаємо, щоб $c'<2a'$ (що завжди можна задовольнити, збільшуючи натуральне число n).

Беремо в площині довільну точку O і проводимо два концентричні кола (O, a') і (O, b'). На колі (O, a') відкладаємо хорду $AB=c'$. Довільним радіусом d описуємо кола (A, d) і (B, d), в перетині з колом (O, b') одержимо точки A_1 і B_1. Відрізок A_1B_1 четвертий пропорціональний до відрізків a', b' і c'. І, нарешті, будуємо відрізок $x=\frac{1}{m}A_1B_1$ (задача 2). Відрізок x — шуканий відрізок четвертий, пропорціональних до трьох даних відрізків a, b і c.

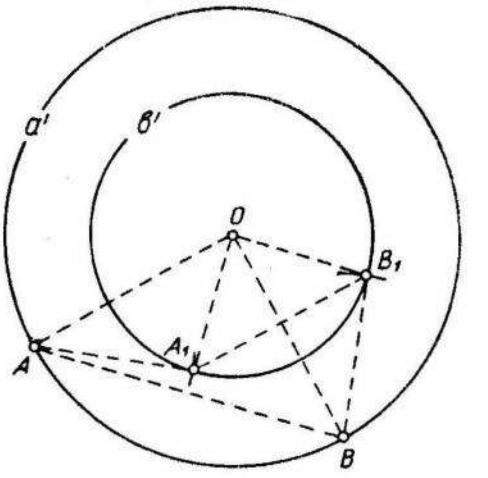

Рис. 10.

Доведення. $\sphericalangle AOA_1=\sphericalangle BOB_1$ (трикутники AOA_1 і BOB_1 рівні). Звідси $\sphericalangle AOB=\sphericalangle A_1OB_1$, отже, трикутники AOB і A_1OB_1 — подібні.

Значить,

$$OA : OA_1 = AB : A_1B_1,$$

або

$$a' : b' = c' : A_1B_1,$$

або ще інакше

$$na : nb = mc : A_1B_1,$$

остаточно

$$a : b = c : \frac{A_1B_1}{m}.$$

Задача 9. (5-а основна простіша задача). Знайти точки перетину двох даних прямих AB і CD, кожна з яких задана двома точками.

Побудова.

Будемо вважати, що $AC\geqslant R$, $AD\geqslant R$, $BC\geqslant R$ і $BD\geqslant R$. У противному разі, користуючись задачею 3, треба знайти інші точки даних прямих, для яких вказані нерівності вже будуть справедливі.

Будуємо точки C_1 і D_1, симетричні відповідно точкам C і D відносно прямої AB, для чого проводимо кола (A, C), (A, D), (B, C) і (B, D). Визначаємо точку E на перетині кіл (D_1, CC_1) і (C, D) (задача 5). Будуємо відрізок x четвертий, пропорціональний до відрізків DE, DD_1 і CD (задача 8). Кола (D, x) і (D_1, x) перетнуться в точці X. Точка X — шукана.

Доведення. Точка C_1 симетрична точці C, точка D_1 симетрична точці D відносно прямої AB; а тому, очевидно, ми знайдемо точку перетину даних прямих, якщо побудуємо точку перетину прямих CD і C_1D_1.

Фігура CC_1D_1E — паралелограм, тому точки D, D_1 і E лежать на одній прямій ($D_1E \parallel CC_1$ і $D_1D \parallel CC_1$).

З подібності трикутників CDE і XDD_1 ($CE \parallel XD_1$), випливає

$$DE : DD_1 = CE : D_1X_1,$$

враховуючи, що

$$CE = CD = C_1D_1,$$

робимо висновок, що відрізок $D_1X = x$ є четвертим пропорціональним відрізком до відрізків DE, DD_1 і CD.

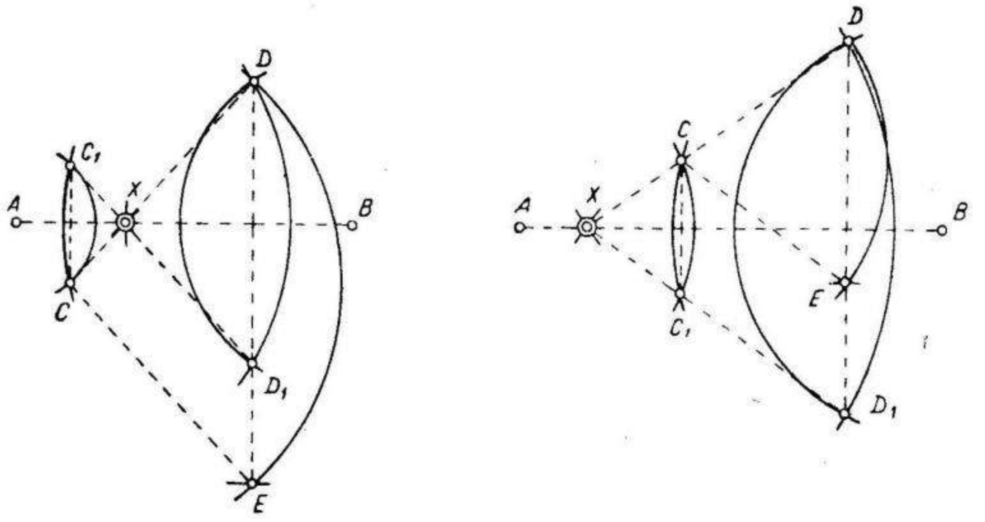

Рис. **11.**

Примітка. При побудові точок C_1 і D_1, симетричних точкам C і D, замість задачі 3 можна використати задачу 5.

На основі вищевикладеного стверджуємо, що всі п'ять основних простіших задач (основних операцій) можуть бути розв'язані (виконані) за допомогою тільки циркуля, розхили ніжок якого обмежені знизу будь-яким наперед заданим постійним числом R.

Припустимо тепер, що ми можемо розв'язувати деяку задачу на побудову циркулем і лінійкою. Уявимо собі, що ця задача розв'язана вказаними інструментами; в результаті розв'язок даної задачі зводиться до виконання деякої скінченої послідовності п'яти основних операцій (розв'язування основних простіших задач). Однак кожна з цих п'яти простіших побудов може бути здійснена одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Таким чином, основний результат цієї роботи можна сформулювати у вигляді слідуючої теореми:

Теорема. Всі задачі, що розв'язуються з допомогою циркуля і лінійки, можуть бути розв'язані і тільки циркулем з обмеженим розхилом ніжок знизу. Таким циркулем можна описувати кола, радіуси яких не менше деякого наперед заданого постійного відрізка R.

Вкажемо тепер загальний метод розв'язування геометричних задач на побудову одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені знизу відрізком R.

Припустимо, що деяку задачу на побудову, що розв'язується з допомогою циркуля і лінійки, потрібно розв'язати одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Уявимо собі цю задачу, розв'язану одним циркулем за методом Маскероні, тобто, коли на розхили ніжок циркуля ніяких обмежень не накладається. В результаті одержимо деяку фігуру Φ, що складається з одних тільки кіл. Позначимо через r найменший із радіусів всіх кіл, що складають фігуру Φ. Якщо виявиться, що $r \geqslant R$, то виконання вказаної побудови не викликає ніяких утруднень. Коли ж $r<R$, то візьмемо натуральне число n таким, щоб $nr \geqslant R$. Якщо тепер всі відрізки, дані в умові задачі, в тому числі і відрізки, що визначають радіуси заданих кіл (не обмежуючи загальних міркувань, ми можемо припустити, що в умові задачі даються тільки відрізки і кути, хоч заданою може виявитись навіть деяка фігура, що складається із окремих точок і кіл), збільшити в n разів (задача 1) і тоді провести розв'язування задачі, то в результаті побудови одержимо фігуру Φ', подібну фігурі Φ з коефіцієнтом подібності, рівним n. Всі кола фігури Φ' можуть бути проведені нашим циркулем, тому що їх радіуси більше або рівні $nr \geqslant R$. Зауважимо при цьому, що за центр подібності O потрібно брати одну із точок, заданих в умові задачі, наприклад, центр заданого кола або одну з точок, якими визначаються задані відрізки і т. д.

Позначимо через ψ' ту частину фігури Φ', яка приймається за шуканий результат. Будуємо фігуру ψ, подібну фігурі ψ' з центром подібності O і коефіцієнтом подібності $\frac{1}{n}$; для чого будуємо відрізки

$$OX_1 = \frac{1}{n} OX'_1;\; OX_2 = \frac{1}{n} OX'_2, \ldots;\; OX_к = \frac{1}{n} OX_к$$

(задача 2), де через $X'_1, X'_2, \ldots, X'_к$ позначені всі точки перетину кіл фігури ψ і їх центри. Точки $X_1, X_2, \ldots, X_к$ будуть шуканими центрами і точками перетину кіл фігури ψ, які представляють шуканий результат розв'язку даної задачі. Ті кола фігури ψ, радіуси яких більше або рівні R, можуть бути накреслені даним циркулем безпосередньо, останні кола будуються у вигляді окремих точок (задача 4).

Як ілюстрацію до вищесказаного можна привести розв'язок задачі 5. Тут даними умовами задачі являються два відрізки r і r_1 (кожний з них заданий парою точок) і дві точки O і O_1 — центри даних кіл. Фігура Φ складається із кіл (O, r) і (O_1, r_1). Фігура Φ' складається із кіл (O, r) і (O'_1, r'_1). Фігура Ψ' складається з двох точок X' і $У'$. Фігура Ψ — із точок X і $У$ — шуканих точок перетину двох даних кіл. O — центр подібності.

При розв'язуванні задач число n часто буває невідомим, тому що даним циркулем з обмеженим розхилом ніжок знизу ми не можемо будувати фігуру Φ', і таким чином не можемо знати величини r, тобто радіуса найменшого з кіл цієї фігури. В цьому випадку поступаємо так. Проводимо розв'язок задачі даним циркулем до тих пір, поки натрапимо на коло, радіус якого $r_1<R$. Визначаємо натуральне число n_1 так, щоб $n_1 r_1 \geqslant R$. Збільшуємо дані відрізки в n_1 разів і знову спочатку проводимо розв'язок задачі, в результаті ми або повністю побудуємо фігуру Φ', або прийдемо до кола з радіусом $r_2<R$. Припиняємо розв'язування задачі і знову збільшуємо відрізки в n_2 разів (в результаті дані відрізки збільшаться в $n_1 \cdot n_2$ разів).

Тоді проводимо розв'язування даної задачі. Після скінченого числа кроків фігура Φ' буде побудована.

Основний результат даної роботи і роботи [2] можна сформулювати у вигляді слідуючої теореми.

Теорема. *Всі задачі на побудову, що розв'язуються циркулем і лінійкою, можна розв'язати і одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок тільки знизу, або тільки зверху.*

Залишається відкритим питання про можливість розв'язування геометричних задач на побудову одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок одночасно і зверху і знизу, тобто циркулем, яким можна описати кола не менше радіуса R_{min} і не більше радіуса R_{max}. Чи можна таким циркулем розв'язати всі задачі на побудову, що розв'язуються циркулем і лінійкою? Якщо так, то чи може різниця $R_{max}—R_{min}$ бути як завгодно малою? Інакше кажучи, чи можна розв'язати всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, за допомогою одного циркуля з «майже» постійним розхилом. Як відомо, циркулем з постійним розхилом всі задачі розв'язати не можна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теорія геометричних побудов. Одеса, 1924.
2. Костовський А. Про можливість розв'язування задач на побудову одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, т. 24, 1954.