Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. С. КОВАНЬКО

ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Нехай в просторі A_x з елементами $\{x\}$ визначений неперервний функціонал $f(x)$. Простір A_x припускається повним, метричним и сепарабельним. Віддаль між двома будь-якими його елементами x' и x'' (точками) ми позначимо через $\varrho(x', x'')$.

Означення: $f(x)$ називається неперервним в точці x_0, якщо для як завгодно малого $\varepsilon > 0$, існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, при $\varrho(x, x_0) < \delta$. Коли $f(x)$ неперервний в кожній точці x, то назвемо його просто неперервним.

Ми ставимо задачу про знаходження необхідних і достатніх умов компактності системи E функціоналів $\{f(x)\}$.

Теорема. Необхідна і достатня умова для того, щоб система неперервних функціоналів $E = \{f(x)\}$ була б компактною в розумінні слабої збіжності до неперервного функціоналу, полягає у виконанні слідуючих вимог:

1) при фіксованому x' відповідна числова система $\{f(x')\}$ завжди обмежена;

2) які б не були $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$, точка $x \in A_x$, а також множина $B \subset A_x$, що має x своєю точкою скупчення, знайдеться така точка $x' \in B$, що $\varrho(x, x') < \delta$ і щоб $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ для всіх $f(x) \in E$.

Доведення: умови 1 і 2 необхідні.

Отже, припустимо, що система E компактна у вищеозначеному сенсі. Тоді числова система $\{f(x')\}[f(x) \in E]$ буде компактною в сенсі звичайної збіжності, і, значить, обмеженою. Таким чином, умова 1 виконана.

Тепер розглянемо умову 2. Нехай вона не має місця. Це значить, що знайдеться таке число $\varepsilon_0 > 0$, точка x_0 і така множина B у вигляді безмежної послідовності $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, що $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho(x_0 x_n) = 0$ і що для кожного номера N існує хоч би один такий функціонал $f_N(x)$, для якого

$$|f_N(x_0) - f_N(x_n)| \geqslant \varepsilon_0 . \qquad (n = 1, 2, 3 \dots N). \tag{1}$$

Розглянемо послідовність таких функціоналів $\{f_N(x)\}$ $(N = 1, 2, \dots)$. В силу компактності системи E із цієї послідовності можна вибрати таку підпослідовність $\{f_{N_i}(x)\}$ $(i = 1, 2, 3 \dots)$, яка збігається до неперервного функціоналу $g(x)$.

В силу неперервності останнього можна вибрати n досить великим, щоб

$$|g(x_n)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}. \tag{2}$$

Фіксуємо n і вибираємо $N_i>n$ настільки великим, щоб

$$|f_{N_i}(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6} \tag{3}$$

і

$$|f_{N_i}(x_n)-g(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{6} \tag{4}$$

З нерівностей (2), (3) і (4) знаходимо

$$|f_{N_i}(x_0)-f_{N_i}(x_n)|\leqslant|f_{N_i}(x_0)-g(x_0)|+|g(x_0)-g(x_n)|+$$
$$+|g(x_n)-f_{N_i}(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Отже,

$$|f_{N_j}(x_0)-f_{N_i}(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{5}$$

Але (5) знаходиться в протиріччі з (1), якщо покласти $N=N_i$. Тим самим доведена умова 2.

Умови 1 і 2 достатні.

Оскільки A_x сепарабельне, ми можемо побудувати всюди щільну в A_x зчисленну множину елементів $A_r \subset A_x$.

Відомим діагональним процесом ми зможемо із будь-якої послідовності функціоналів виділити таку підпослідовність $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \dots)$, яка збігається в множині A_r і визначає в границі функціонал $g(r)$. Застосовність такого процесу витікає із умови 1, тобто із обмеженості всіх числових послідовностей $\{f_n(r)\}$ (кожної зокрема).

Виберемо тепер довільну точку $x \in A_x$ і множину $B=A_r$ згідно з умовою 2 даної теореми. В силу цієї ж умови знайдеться така точка $r \in A_r=B$, досить близька до x, що будуть виконуватись слідуючі нерівності:

$$|f_m(x)-f_m(r)|<\frac{\varepsilon}{3}; \tag{6}$$

$$|f_n(x)-f_n(r)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{7}$$

де m і n — довільні індекси. Вибираємо їх настільки великими, щоб

$$|f_n(r)-f_m(r)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{8}$$

згідно з умовою Коші, яка має місце в точці r.

В силу (6), (7), (8) знаходимо

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f_m(r)|+|f_m(r)-f_n(r)|+$$

$$+|f_n(r)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отже,
$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{9}$$

Таким чином, це є умовою Коші для нашої послідовності в точці x. Але оскільки x довільна точка в A_x, значить, $\{f_n(x)\}$ збігається всюди в A_x. Позначимо її граничну функцію так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x).$$

Покажемо, що $g(x)$ є неперервний функціонал. Припустимо, що це не так, нехай x_0 являється його точкою розриву, тоді можна знайти таке число $\varepsilon_0>0$ і нескінченну послідовність точок $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots$, яка прямує до x_0, і для цих точок виконуються нерівності

$$|g(x_i)-g(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{10}$$

Згідно з умовою 2 даної теореми, ми виберемо в ролі множини B нашу послідовність $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Згідно з умовою 2, ми зможемо вибрати n настільки великим, що буде виконуватись нерівність

$$|f_n(x_i)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}. \tag{11}$$

при будь-якому n.

Виберемо n настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$|f_n(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}; \tag{12}$$

$$|f_n(x_i)-g(x_i)|<\frac{\varepsilon_0}{6}; \tag{13}$$

що очевидно в силу збіжності числових послідовностей $\{f_n(x_0)\}$ і $\{f_n(x_i)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Із (11), (12) і (13) знаходимо $|9(x_i)-g(x_0)|$

$$\leqslant|g(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x_0)|+$$

$$+|f_n(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Отже,
$$|g(x_i)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{14}$$

Але (10) і (14) знаходяться між собою в протиріччі, звідки повинна витікати неперервність $g(x)$. Достатність умов теореми доведена. Отже, теорема доведена повністю.

На закінчення відмітимо деякі часткові випадки, Умову 1 теореми можна замінити умовою обмеженості функціоналів нашої системи в їх сукупності, але ця умова з'явиться тільки достатньою, що видно із слідуючого прикладу.

Розглянемо послідовність

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{(1 + n^8 x^2)^2} \; (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

де x — дійсне змінне в середині відрізку $[0, 1]$. Тут $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ всюди на $[0, 1]$. Отже, послідовність компактна в нашому сенсі, але функції її необмежені в їх сукупності, оскільки

$$f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{4} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty .$$

Другим частковим випадком може бути той, коли в умові 2 теореми $B = A_x$ і x' люба точка така, що $\varrho(x, x') < \delta$. В цьому випадку система функціоналів рівнозначно рівномірно неперервна, і ми приходимо до теореми Арцеля, коли збіжність розуміти в сенсі рівномірної.

В частковому випадку система може складатися з лінійних функціоналів, і тоді умови теореми значно спрощуються.

Слідуючим кроком в поширенні даної теореми є встановлення необхідних і достатніх умов компактності системи неперервних функціоналів в сенсі слабої збіжності до взагалі розривного функціоналу.