Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА

Метою даної роботи є розгляд одного випадку рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+f(x) \tag{1}$$

з необмеженим ядром, яке може бути зведеним до еквівалентного інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром. Перш за все буде дано вивід однієї елементарної формули, яка узагальнює формулу інтегрування частинами. Нехай на проміжку $[a,\ b]$ задані дві функції $u(x)$ та $v(x)$, з такими властивостями: майже всюди на $[a,\ b]$ існують Шварцеві похідні $u^{[II]}(x)$ та $v^{[II]}(x)$; нехай далі a' і b' деякі внутрішні точки проміжку $[a,\ b]$ і в як завгодно малих оточеннях цих точок обидві функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні перші похідні $u'(x)$ та $v'(x)$. Додаткові властивості цих функцій з'ясуються в ході доведення. З того, що a' та b' — внутрішні точки проміжку $[a,\ b]$, випливає, що при достатньо малому h мають сенс інтеграли

$$\begin{cases} I(h)=\displaystyle\int_{a'}^{b'}\frac{\Delta_h^2\,u(x)}{4h^2}\,v(x)\,dx; \\ I_1(h)=\displaystyle\int_{a'}^{b'}u(x)\,\frac{\Delta_h^2\,v(x)}{4h^2}\,dx. \end{cases}$$

Запишемо інтеграл $I(h)$ у вигляді інтеграла Стільтьєса

$$I(h)=\int_{a'}^{b'}\frac{\Delta_h^2\,u(x)}{4h^2}\,v(x)\,dx=\int_{a'}^{b'}v(x)\,d\int_{a'}^{x}\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\,dt.$$

Легко сформулювати умови прямування інтеграла $I(h)$ до границі: $\displaystyle\int_{a'}^{b'}v(x)\,u^{[II]}(x)\,dx$. Ці умови одержуються з відомої теореми Банаха і полягають у слідуючому:

1) $$\operatorname*{Var}_{a'\leqslant x\leqslant b'}\int_{a'}^{x}\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\,dt=\int_{a'}^{b'}\left|\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\right|dt<M.$$

$$2)\quad \int\limits_{\mu}^{b'}\int\limits_{a'}^{t}\left\{\frac{\Delta_h^2 u(x)}{4h^2}-u^{['']}(x)\right\}dxdt\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \quad a'\leqslant\mu\leqslant b'$$

$$3)\quad \int\limits_{a'}^{b'}\frac{\Delta_h^2 u(t)}{4h^2}dt\to\int\limits_{a'}^{b'}u^{['']}(t)dt \text{ при } h\to 0.$$

Для того, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{h\to 0} I_1(h)=\int\limits_{a'}^{b'}u(t)\,v^{['']}(t)\,dt,$$

будемо вимагати існування такої додатньої сумової функції $F(x)$, що для всіх досить малих h буде

$$\left|\frac{\Delta_h^2 v(x)}{4h^2}\right|<F(x).$$

Проводимо далі слідуючі прості перетворення інтеграла:

$$\int\limits_{a_{\prime}}^{b'}u(x+2h)\,v(x)\,dx=\int\limits_{a'+2h}^{b'+2h}u(t)\,v(t-2h)\,dt;$$

$$2\int\limits_{a'}^{b'}u(x)\,v(x)\,dx=2\int\limits_{a'}^{b'}u(t)\,v(t)\,dt;$$

$$\int\limits_{a'}^{b'}u(x-2h)\,v(x)\,dx=\int\limits_{a'-2h}^{b'-2h}u(t)\,v(t+2h)dt;$$

$$I(h)=\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'+2h}^{b'+2h}u(t)\,v(t-2h)\,dt-\frac{2}{4h^2}\int\limits_{a'}^{b'}u(t)\,v(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{b'-2h}u(t)\,v(t+2h)\,dt=\int\limits_{a'+2h}^{b'-2h}u(t)\frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}dt+$$

$$+\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'+2h}u(t)\,v(t-2h)\,dt-\frac{2}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t)\,dt-$$

$$-\frac{2}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'}u(t)\,v(t)dt+\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{a'+2h}u(t)\,v(t+2h)\,dt=$$

$$=\int\limits_{a'}^{b'}u(t)\frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}dt-\int\limits_{e_h=(a',\,a'+2h)+(b'-2h,\,b')}u(t)\frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}dt+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'} u(t)\,v(t-2h)dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'} u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'}^{b'+2h} u(t)\,v(t-2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'} u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{a'} u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,v(t)\,dt\right\}=I_1(h)+$$

$$+B_1(h)+B_2(h)+A_1(h)+A_2(h)+\int\limits_{e_h} u(t)\,\frac{\Delta_h^2\,v(t)}{4h^2}\,dt,$$

де через $B_1(h)$, $B_2(h)$, $A_1(h)$, $A_2(h)$ позначені відповідні дужки. Переходячи до границі при $h\to 0$, знаходимо

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{e_h} u(t)\,\frac{\Delta_h^2\,v(t)}{4h^2}\,dt=0.$$

Обчислимо, наприклад, границю однієї з дужок

$$\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,v(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}\,dt\to u(a')\,v'(a').$$

Справді

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\,\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}\,dt-u(a')\,v'(a')\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\left(\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}-u(a')\right)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h} v'(a')\,(u(t)-u(a'))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{a'}^{a'+2h}|u(t)|\,|v'(t+2\Theta h)-v'(a')|\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h}|v'(a')|\int_{a'}^{a'+2h}|u(t)-u(a')|\,dt\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

Аналогічно знайдемо границі інших дужок і одержимо слідуючу формулу:

$$\int_{a'}^{b'}u^{['']}(x)\,v(x)\,dx=u'(x)\,v(x)\Big|_{a'}^{b'}-y(x)\,v'(x)\Big|_{a'}^{b'}+\int_{a'}^{b'}u(x)\,v^{['']}(x)\,dx.$$

Нехай дано інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+f(x). \quad (1)$$

Припустимо, що ядро $K(x,\xi)$, як функція від ξ, інтегроване з квадратом, а як функція від x — воно має майже всюди на $[-\pi,\pi]$ другу похідну Шварца $K_{x^2}^{['']}(x,\xi)$, і при цьому існує така додатня сумовна функція $F(\xi)$, що

$$\left|\frac{\Delta_h^2 K(x,\xi)}{4h^2}\right|\leqslant F(\xi) \text{ при } |h|<\delta.$$

Крім того, припускається, що в деякій граничній смузі ядро дорівнює нулю.

Вільний член $f(x)$ будемо припускати вимірною обмеженою функцією. Зауважимо одразу, що, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $f(x)$ також має Шварцеву похідну. Дійсно, будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді $\varphi(x)=z(x)+f(x)$, тоді для $z(x)$ одержимо рівняння

$$z(x)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,\xi)\,z(\xi)\,d\xi+\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Новий вільний член, очевидно, має потрібну властивість.

Розглянемо тепер деякий внутрішній квадрат, границя якого лежить в середині тієї смуги, де ядро перетворюється в нуль і сторони якого паралельні до координатних осей. Розглянемо рівняння

$$\varphi^*(x)=\lambda\int_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta}K^*(x,\xi)\,\varphi^*(\xi)\,d\xi+f^*(x); \quad (2)$$

$$K^*(x,\xi)=K(x,\xi);$$

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & -\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta; \\ 0 & |x|>\pi-\eta. \end{cases}$$

Очевидно, (1) еквівалентно (2).

Розглянемо, нарешті, функцію, що визначається в квадраті рівністю

$$R(x, \xi)=\frac{a_0(x)\,\xi^2}{4}-\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\kappa(x)\cos\kappa\xi+b_\kappa(x)\sin\kappa\xi}{\kappa^2};$$

$$\frac{\Delta_{hx}^2 R(x, \xi)}{4h^2}=\frac{\Delta_h^2 a_0(x)}{4h^2}\,\frac{\xi^2}{4}-\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\Delta_h^2 a_\kappa(x)}{4h^2}\cos\kappa\xi+\frac{\Delta_h^2 b_\kappa(x)}{4h^2}\sin\kappa\xi\right)\frac{1}{\kappa^2};$$

$$a_\kappa(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}K(x, \xi)\cos\kappa\xi\,d\xi;$$

$$\left|\frac{\Delta_h^2 a_\kappa(x)}{4h^2}\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\Delta_{hx}^2 K(x, \xi)}{4h^2}\cos\kappa\xi\,d\xi\right|<\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\xi)\,d\xi.$$

Через те, що у внутрішньому квадраті останній ряд збігається рівномірно відносно h, то можна перейти до границі при $h\to 0$, після чого одержуємо

$$R_{x^2}^{['']}(x, \xi)=a_0^{['']}(x)\frac{\xi^2}{4}=\sum_{1}^{\infty}\left(a_\kappa^{['']}(x)\cos\kappa\xi+b_\kappa^{['']}(x)\sin\kappa\xi\right)\cdot\frac{1}{\kappa^2}\cdot$$

Внаслідок неперервності окремих членів ряду по ξ, сума ряду є також неперервною функцією ξ.

На підставі теореми Рімана про ряди Фурьє маємо

$$K^*(x, \xi)\sim R_{\xi^2}^{['']}(x, \xi).$$

Рівняння (2) записується тепер так:

$$\varphi^*(x)=\lambda\int_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta}R_{\xi^2}^{['']}(x, \xi)\varphi^*(\xi)\,d\xi+f^*(x). \tag{3}$$

Легко бачити, що $\varphi^*(x)$ має другу похідну Шварца та відповідаючі їй відношення $\left|\frac{\Delta_h^2\varphi^*(x)}{4h^2}\right|$ обмежені. Щоб примінити до правої частини останньої рівності формулу інтегрування частинами, ми повинні перевірити, що функція $R(x, \xi)$ задовольняє переліченим вище вимогам

Маємо

$$\int\limits_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta}\left|\frac{\Delta_{h\xi}^2 R(x, \xi)}{4h^2}\right| d\xi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\Delta_{h\xi}^2 R(x, \xi)}{4h^2}\right| d\xi = \int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{a_0(x)}{2} + \right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty (a_m(x)\cos m\xi + b_m(x)\sin m\xi)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right| d\xi \leqslant \sqrt{2\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{a_0(x)}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_1^\infty a_m(x)\cos m\xi + b_m(x)\sin m\xi\right)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)^2 d\xi\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi}\left\{\frac{a_0^2(x)}{4} + \sum_1^\infty a_m^2(x) + b_m^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

при кожному фіксованому x. Умову 1 виконано. Звернемося до умови 2.

$$\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{\Delta_{h\xi}^2 R(x, \xi)}{4h^2} - K(x, \xi)\right\} d\xi\, dt = \int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{a_0(x)}{2} + \right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty (a_m(x)\cos m\xi + b_m(x)\sin m\xi)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2 - K(x, \xi)\right\} d\xi\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\left\{\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\frac{a_0(x)}{2}\, d\xi + \sum_1^\infty \int\limits_{-\pi+\eta}^{t}(a_m(x)\cos m\xi + \right.$$

$$\left. + b_m(x)\sin m\xi)\, d\xi \left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2 - \int\limits_{-\pi+\eta}^{t} K(x, \xi)\, d\xi\right\} dt =$$

$$= \int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\left\{\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\frac{a_0(x)}{2}\, d\xi + \sum_1^\infty \int\limits_{-\pi+\eta}^{t}(a_m(x)\cos m\xi + b_m(x)\sin m\xi)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\pi+\eta}^{t} K(x, \xi)\, d\xi\right\} dt + \int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\sum_1^\infty \int\limits_{-\pi+\eta}^{t}(a_m(x)\cos m\xi + $$

$$+ b_m(x)\sin m\xi)\, d\xi\left[\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2 - 1\right] dt.$$

Підінтегральний вираз в першому інтегралі в правій частині дорівнює нулю, бо ряд Фурьє можна інтегрувати почленно. Отже,

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mu}^{\pi-\eta}\int_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{\Delta_h^2 R(x,\,\xi)}{4h^2}-K(x,\,\xi)\right\}d\xi\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{\mu}^{\pi-\eta}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi+\eta}^{t}(a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)d\xi\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{\mu}^{\pi-\eta}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)dt.$$

Тут можна перейти до границі під знаком інтеграла. Справді, підінтегральна функція мажорується так:

$$\left|\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{1}^{\infty}\frac{|a_m(x)|+|b_m(x)|}{m}\leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{\sum_{1}^{\infty}a_m^2(x)+b_m^2(x)}\cdot\sqrt{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}\,.$$

З другого боку, легко показати, що границя підінтегрального виразу дорівнює нулю:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{1}^{N}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)+$$

$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right).$$

Виберемо спочатку N настільки великим, щоб

$$\sum_{N+1}^{\infty}(a_m^2(x)+b_m^2(x))<\frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

А потім візьмемо h настільки малим, щоб перша частина суми не перевищувала $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином,

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{\Delta_{h\xi}^{2}R(x,\xi)}{4h^{2}}-K(x,\xi)\right\}d\,d\xi t=0.$$

Залишається перевірити справедливість останньої умови

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\frac{\Delta_{h}^{2}R(x,\xi)}{4h^{2}}\,d\xi=\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}K(x,\xi)\,d\xi.$$

Це робиться так само, як і в попередньому випадку. Отже, в формулі (3) можна інтегрувати частинами, і ми приходимо до рівності

$$\varphi^{*}(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}R(x,\xi)\,\varphi^{*['']}(\xi)\,d\xi+f^{*}(x). \tag{4}$$

Тепер, взявши другу Шварцеву похідну від обох частин рівності (4), одержуємо інтегральне рівняння

$$\varphi^{*['']}(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}R_{x^{2}}^{['']}(x,\xi)\,\varphi^{*['']}(\xi)\,d\xi+f^{*['']}(x). \tag{5}$$

Ядро цього рівняння ще не є неперервною функцією. Тому проінтегруємо рівняння (5) і запишемо його слідуючим чином:

$$\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}\varphi^{*['']}(t)\,dt=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}R_{t^{2}}^{['']}(t,\xi)\,dt\,d\int\limits_{-\pi+\eta}^{\xi}\varphi^{*['']}(\xi)d\xi+\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}f^{*['']}(t)\,dt.$$

Введемо такі позначення:

$$\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}\varphi^{*['']}(t)\,dt=u(x);\quad \int\limits_{-\pi+\eta}^{x}R_{t^{2}}^{['']}(t,\xi)\,dt=v(x,\xi);\quad \int\limits_{-\pi+\eta}^{x}f^{*['']}(t)\,dt=g(x).$$

Тоді остання рівність в цих позначеннях запишеться так:

$$u(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}v(x,\xi)\,du(\xi)+g(x), \tag{6}$$

або

$$u(x)=-\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}u(\xi)\,v'_{\xi}(x,\xi)\,d\xi+u(\xi)\,v(x,\xi)\Big|_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}+g(x), \tag{7}$$

або

$$u(x) = -\lambda \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} v'_{\xi}(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi + v(x, \pi-\eta)\, u(\pi-\eta) + g(x). \tag{8}$$

Перевіримо неперервність ядра нового рівняння. Ми мали вище

$$R_{t^2}^{['']}(t, \xi) = a_0^{['']}(t)\frac{\xi^2}{4} - \sum_{1}^{\infty} \left(a_\kappa^{['']}(t)\cos\kappa\xi + b_\kappa^{['']}(t)\sin\kappa\xi\right) \cdot \frac{1}{\kappa^2},$$

$a_\kappa^{['']}$, $b_\kappa^{['']}$ — коефіцієнти Фур'є. Тому

$$v(x, \xi) = \int_{-\pi+\eta}^{x} a_0^{['']}(t)dt\, \frac{\xi^2}{4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{\int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)dt \cos\kappa\xi + \int\limits_{-\pi+\eta}^{x} b_\kappa^{['']}(t)dt \sin\kappa\xi}{\kappa^2},$$

$v(x, \xi)$ є неперервною функцією x та ξ.

Далі

$$\int_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi+\eta}^{x} K_{x^2}^{['']}(x, \xi)\, dx \cos\kappa\xi\, d\xi$$

є також коефіцієнтом Фур'є.

Тому функція $v(x, \xi)$ має неперервну по ξ при кожному фіксованому x похідну

$$v'_{\xi}(x, \xi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)\, dt \sin\kappa\xi - \int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)\, dt \cos\kappa\xi}{\kappa} +$$

$$+ \int_{-\pi+\eta}^{x} a_0^{['']}(t)\, dt\, \frac{\xi}{2} = \int_{-\pi+\eta}^{\xi} \int_{-\pi+\eta}^{x} K_{t^2}^{['']}(t, \xi)\, dt\, d\xi.$$

Неперервність функції $v'(x, \xi)$ очевидна.

Цими міркуваннями доведено слідуючу теорему.

Теорема. Якщо λ не є власним значенням ядра $K(x, \xi)$, сумовного з квадратом по ξ, який має майже всюди Шварцеву похідну $K_{x^2}^{['']}(x, \xi)$. і існує така додатня сумовна функція $F(\xi)$, що при досить малих h $\left|\frac{\Delta_{hx}^2 K(x, \xi)}{4h^2}\right| < F(\xi)$ і ядро перетворюється на нуль в деякій граничній смузі квадрату, то рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + f(x)$$

може буди зведеним до еквівалентного інтегрального рівняння з неперервним ядром.