Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ПРО ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В даній роботі розглядаються лінійні диференціальні оператори другого порядку, інваріантні відносно групи перетворень n-мірного простору. Всюди в дальшому через x позначається точка цього простору. Сама група вважається заданою своїми інфінітезимальними операторами. Далі, через x' буде позначатися точка, в яку переходить точка x під дією групового перетворення з параметрами $a^i (i=1, \ldots, P)$. Нульовим значенням параметрів відповідає тотожне перетворення

$$x'=x'(x, a); \quad x=x'(x, 0).$$

Розглянемо оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i, \kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}+a(x). \tag{1}$$

Вимога інваріантності записується в слідуючій матричній формі:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_{11}(x) \cdots a_{1n}(x) \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}(x) \cdots a_{nn}(x) \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11}(x') \cdots a_{1n}(x') \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}(x') \cdots a_{nn}(x') \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_i \partial x_\kappa} \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i,\kappa} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2 x'_n}{\partial x_i \partial x_\kappa} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_1(x') \\ \vdots \\ a_n(x') \end{matrix}\right\|, \quad a(x')=a(x). \tag{2}$$

Припускаючи, що коефіцієнти оператора мають неперервні похідні, доведемо слідуючу теорему.

Теорема 1. Для інваріантності оператора $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ відносно групи G необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| =$$

$$= A_t \left\|\begin{matrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\sum\limits_{i,\kappa} a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^1}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}\\ \ldots\\ \sum\limits_{i,\kappa} a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^n}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}\end{matrix}\right\| = A_t \left\|\begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{matrix}\right\|, \quad A_t a = 0, \qquad (3)$$

де $A_t = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \xi_t^\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ — інфінітезимальні оператори групи. Ці ж умови необхідні і достатні для того, щоб оператори $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і A_t були комутативними.

Доведення. Необхідність вказаних умов одержується безпосередньо з формул (2), якщо останні продиференціювати по параметру α^t і перейти до границі при прямуванні до нуля всіх параметрів групи. При цьому слід враховувати, що матриця $\left\|\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right\|$ прямує до одиничної матриці. Складніше показати, що з (3) випливає (2). На підставі теореми Лі, яка виражається рівностями

$$\frac{\partial x'_\lambda}{\partial \alpha^t} = \sum_s \xi_s^\lambda(x')\,\psi_t^s(\alpha) \quad (t = 1, \ldots, P;\ \lambda = 1, \ldots, n)$$

з очевидністю випливає формула, справедлива для всякої функції $f(x)$, що має неперервну похідну

$$\frac{\partial f(x')}{\partial \alpha^q} = \sum_{s=1}^{P} \psi_q^s(\alpha)\,[A_s f(x)]_{x=x'}. \qquad (4)$$

Позначимо через $\tilde{x}$ точку, в яку переводиться точка x перетворенням групи з параметрами $z\alpha^t$.

$$\tilde{x}\big|_{z=0} = x; \quad \tilde{x}\big|_{z=1} = x'.$$

Застосовуючи формулу (4) до матриці $\|a_{ij}(x)\|$, ми на підставі (3) одержимо

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^q}\|a_{ij}(x')\| = \sum_{t=1}^{P} \psi_q^t(\alpha)\left\{\left\|\frac{\partial \xi_t^j(x')}{\partial x'_i}\right\| \|a_{ij}(x')\| + a_{ij}(x')\| \left\|\frac{\partial \xi_t^i(x')}{\partial x'_j}\right\|\right\}. \tag{5}$$

Якщо замінити в цій формулі α^t на $z\alpha^t$, помножити рівність з номером q на α^q і просумувати по всіх q від 1 до P, побачимо, що як функція від z матриця $\|a_{ij}(\tilde{x})\|$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial z}\|a_{ij}(\tilde{x})\| = \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\{\left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i}\right\| \|a_{ij}(\tilde{x})\| + \|a_{ij}(\tilde{x})\| \left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}\right\|\right\}. \tag{6}$$

З другого боку, буде показано, що загальним розв'язком цього рівняння є матриця $\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|$, де $\|c_{ij}\|$ — довільна квадратна матриця, незалежна від z. Справді, підставляючи цю матрицю в праву частину рівняння (6), знайдемо

$$\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}\right\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| +$$

$$+ \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| \left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i}\right\| =$$

$$= \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| + \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial x_i}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\,\xi_t^i(\tilde{x})\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\,\xi_t^j(\tilde{x})\right\| =$$

$$= \left\|\frac{d}{dz}\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| + \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{d}{dz}\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| = \frac{d}{dz}\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|.$$

Отже, при деякому доборі матриці $\|c_{ij}\|$ одержимо

$$\|a_{ij}(\tilde{x})\| = \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|,$$

Покладаючи тут $z=0$, нарешті одержуємо $\| c_{ij} \| = \| a_{ij}(x) \|$;

$$\| a_{ij}(x') \| = \left\| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right\| \| a_{ij}(x) \| \left\| \frac{\partial x'_j}{\partial x_j} \right\| ,$$

тобто першу групу формул (2). Замінюючи в (4) $f(x)$ на матрицю $\| a_i(x) \|$, аналогічно до попереднього знаходимо

$$\frac{d}{dz} \| a_s(\tilde{x}) \| = \sum_{q,\, t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha) \left\| \frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j} \right\| \| a_s(\tilde{x}) \| +$$

$$+ \sum_{q,\, t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha) \left\| \sum_{i,\, \kappa} a_{i\kappa}(\tilde{x}) \frac{\partial^2 \xi_t^s(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_\kappa} \right\| .$$

Або на підставі вже доведеної першої групи формул це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dz} \| a_s(\tilde{x}) \| = \sum_{q,\, t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha) \left\| \frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j} \right\| \| a_s(\tilde{x}) \| +$$

$$+ \sum_{q,\, t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha) \left\| \sum_{i,\, \kappa} \sum_{l,\, m} a_{lm}(x) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{x}_\kappa}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \xi_t^s(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_\kappa} \right\| .$$

Після досить довгого підрахунку доведемо, що загальним розв'язком цього рівняння буде стовбець

$$y = \left\| \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \right\| \| c_s \| + \left\| \sum_{i,\, \kappa} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2 \tilde{x}_s}{\partial x_i \partial x_\kappa} \right\| ,$$

де $\| c_s \|$ довільний стовбець, незалежний від z. Перша частина теореми, таким чином, доведена. Переходячи до доведення другої частини, зручно писати формули вже не в матричній формі

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ a_{il} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x_i} \right\} = A_t a_{lj} ;$$

$$\sum_{i,\, \kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^j}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} = A_t a_j , \quad A_t a = 0.$$

Взявши довільну функцію $u(x)$, розглянемо результат впливу на неї оператора $A_t\, L$.

$$A_t L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_s} \left\{ \sum_{i,\, \kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a \right\} u;$$

$$A_t \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_t u - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s};$$

$$A_t \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} (A_t a_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i \left\{ \frac{\partial A_t u}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial A_t u}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} \left\{ A_t a_s - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial u}{\partial x_s};$$

$$A_t \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \xi_t^s \frac{\partial u}{\partial x_s} - \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} = \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s};$$

$$A_t \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} A_t \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \right\} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} -$$

$$- \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_s} + \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Виконуючи слідуючі очевидні заміни індексів сумування і переставляючи суми, знаходимо

$$\sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \left\{ A_t a_{is} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s};$$

$$\sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is}-\sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s}-\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_\kappa\,\partial x_s}=$$

$$=\sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is}-\sum_{\kappa=1}^{n}\left(a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa}+a_{\kappa s}\frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_\kappa}\right)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s}.$$

Але вираз в фігурних дужках дорівнює нулю. Отже, маємо

$$A_t L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial A_t u}{\partial x_i}+\sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s-\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s}+A_t a u=$$

$$=\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial A_t u}{\partial x_i}+aA_t u+uA_t a+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s-\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s}=L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)A_t u,$$

бо всі фігурні дужки дорівнюють нулю. Доведення того, що з комутативності операторів L та A_t випливають формули (3), одержується безпосередньо з формули

$$A_t L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)A_t u+uA_t a+$$

$$+\sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is}-\sum_{\kappa=1}^{n}\left(a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa}+a_{\kappa s}\frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_\kappa}\right)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s-\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s},$$

якщо в ній покласти послідовно $u=1$, $u=x_s$, $u=x_i x_s$. Теорема 1 повністю доведена. Зауважимо, що лінійні диференціальні оператори, які являють собою поліноми від інфінітезимальних операторів групи і комутативні з кожним інфінітезимальним оператором, були введені у 1950 році І. М. Гельфандом [1].

Природно виникає питання про виділення з усієї множини розв'язків рівняння тих, що не змінюються при групових перетвореннях. Для цього нам буде потрібна слідуюча лема.

Лема 1. Нехай оператор $L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ є інваріантний відносно групи а I — інваріант групи. Тоді вирази

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\,\frac{\partial I}{\partial x_\kappa};\qquad \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 I}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial I}{\partial x_i}$$

також будуть інваріантами групи. Якщо група G має єдиний незалежний інваріант I, то ці вирази можна записати у вигляді деяких функцій F_1 та F_2 від I

$$F_1(I) = \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa}; \quad F_2(I) = \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 I}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial I}{\partial x_i}.$$

Взагалі, якщо група має декілька незалежних інваріантів $I_1, \ldots, I_r$, то вирази

$$\sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I_l}{\partial x_i} \frac{\partial I_s}{\partial x_\kappa} = F_{l,\,s}$$

також є інваріантами групи.

Доведення. Інваріантність другого з вказаних виразів випливає одразу ж з комутативності $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та A_t:

$$A_t L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) I = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) A_t I = 0.$$

Діючи оператором A_t на перший вираз, знаходимо

$$A_t \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} = \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} + \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_i} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} +$$

$$+ \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} = \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} -$$

$$- \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} - \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} =$$

$$= \sum_{i,\,\kappa=1}^{n} \left\{ A_t a_{i\kappa} - \sum_{l=1}^{n} \left(a_{il} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} + a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \right\} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} = 0,$$

тобто $\sum_{i,\,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa}$ виявляється інваріантом.

Звідси негайно випливає:

Теорема 2. Якщо оператор $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є інваріантним відносно групи G, причому ця група має єдиний незалежний інваріант I, то рівняння $Lu=0$ має двопараметричне сімейство розв'язків-інваріантів, що можна знайти із звичайного диференціального рівняння

$$F_1(I) \frac{d^2 U}{dI^2} + F_2(I) \frac{dU}{dI} + aU = 0,$$

Доведення. Шукаючи розв'язок-інваріант у вигляді $u = U(I)$, приходимо до вказаного рівняння.

Наведемо приклади використання цієї теореми.

Розглянемо хвильове рівняння в n-мірному просторі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right).$$

Якщо пов'язати з ним оператор $t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa t^2 \Delta$, то останній буде інваріантним по відношенню до групи $x' = \alpha x$; $t' = \alpha t$. Незалежними інваріантами цієї групи є функції $\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_n}{t}$. З них скомбінуємо функцію $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{x_i}{t}$, де β_i — довільні константи. Маємо

$$F_1(I) = I^2 - \kappa \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2; \quad F_2(I) = 2I.$$

$$U(I) = c_1 \ln \frac{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n - \sqrt{\kappa(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2)}\, t}{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + \sqrt{\kappa(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2)}\, t} + C_2.$$

Одержане сімейство розв'язків залежить від $n+2$ сталих. Розглянемо ще один приклад

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right).$$

З цим рівнянням природно пов'язується оператор $t \frac{\partial}{\partial t} - \kappa t \Delta$, інваріантний відносно групи $x' = \alpha x$; $t' = \alpha^2 t$. Взявши за I вираз $\left(\sum \frac{x_i^2}{t} \right)^m$ приходимо до рівняння

$$4\kappa m I^{\frac{2m-1}{m}} \frac{d^2 U}{dI^2} + \left(I + 2\kappa(m-1) I^{\frac{m-1}{m}} \right) U' = 0,$$

загальний розв'язок якого виразиться через квадратуру

$$U(I) = C_1 \int I^{\frac{n+2(m-1)}{2m}} e^{-\frac{1}{4\kappa} \sqrt[m]{I}} dI + C_2.$$

На існуванні розв'язків інваріантів базується зведення найпростішого частинного випадку задачі Діріхле до граничної задачі для звичайного диференціального рівняння. Нехай група має єдине сімейство інваріантних поверхней $I = \text{const}$. Розглядаючи в області, обмеженій поверхнями $I = C_1$ та $I = C_2$ рівняння $Lu = 0$, шукаємо його розв'язок, який приймає на поверхні $I = C_1$ стале значення $\tilde{C}_1$, а на поверхні $I = C_2$ друге стале значення $\widetilde{C}_2$. Ми приходимо до задачі знаходження такого розв'язку звичайного диференціального рівняння

$$F_1(I)\frac{d^2 U}{dI^2}+F_2(I)\frac{dU}{dI}+aU=0,$$

який задовольняє граничним умовам

$$U|_{I=C_1}=\widetilde{C}_1;\quad U|_{I=C_2}=\widetilde{C}_2.$$

На завершення буде доведена теорема про одночасну інваріантність відносно однієї і тієї ж групи даного диференціального оператора і оператора, спряженого з ним. Розглянемо векторні поля, породжені коефіцієнтами інфінітезимальних операторів $\vec{P}_t=(\xi_t^1\dots\xi_t^n)$.

Справедлива слідуюча теорема.

Теорема 3. Нехай оператор, інваріантний відносно групи G, має ту властивість, що визначник, складений з його старших коефіцієнтів, відмінний від нуля. Тоді для інваріантності відносно G спряженого оператора

$$L^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i\kappa}u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i u}{\partial x_i}+au$$

необхідно і достатньо, щоб дивергенції векторних полів, породжених операторами A_t були постійними

$$\operatorname{div}\vec{P}_t=\text{const},$$

Доведення. На підставі теореми 1, умови інваріантності спряженого оператора можна виразити формулами

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{a_{il}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial\xi_t^l}{\partial x_i}\right\}=A_t a_{ij};\tag{7}$$

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n}\left\{2\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}-a_i\right\}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}=A_t\left\{2\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa}-a_j\right\};$$

$$A_t\left\{\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a\right\}=0\qquad(t=1,2,\dots,P).$$

Перша група цих формул виконується автоматично. З'ясуємо ті умови, при яких задовольняються друга і третя групи формул. Виконуємо деякі прості перетворення другої групи формул

$$2\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+2\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}-\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}=$$

$$=2\sum_{\kappa=1}^{n}A_t\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa}-A_t a_j.\tag{8}$$

На підставі другої групи формул (3) третій і четвертий члени в лівій частині рівності взаємно знищуються з другим членом правої частини, після чого ми одержуємо

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^j}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial^2 a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa \partial x_s} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \xi_t^s \frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s} - \sum_{\kappa, s=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} A_t a_{\kappa j} -$$

$$- \sum_{\kappa, s=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i\kappa} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_i} \right) - \sum_{\kappa, s=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^j}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} + \sum_{\kappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_t^\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} - \sum_{\kappa, s=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa}.$$

Звідси випливає

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^j}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^j}{\partial x_i \partial x_\kappa} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^j}{\partial x_i} + \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_t^\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa}.$$

Отже,

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_t^\kappa}{\partial x_i \partial x_\kappa} = 0. \tag{9}$$

Очевидно, що від (9) можна повернутися до (8). Таким чином, виявляється, що (9) і є необхідною і достатньою умовою того, щоб виконувалася друга група формул (7). Зауважимо тепер, що в матричній формі умова (9) набирає вигляду

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}(x) \cdots a_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(x) \cdots a_{nn}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \sum_\kappa \frac{\partial^2 \xi_1^\kappa}{\partial x_1 \partial x_\kappa} \cdots \sum_\kappa \frac{\partial^2 \xi_p^\kappa}{\partial x_1 \partial x_\kappa} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_\kappa \frac{\partial^2 \xi_1^\kappa}{\partial x_n \partial x_\kappa} \cdots \sum_\kappa \frac{\partial^2 \xi_p^\kappa}{\partial x_n \partial x_\kappa} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Внаслідок оберненості матриці $\| a_{ij}(x) \|$ одержуємо

$$\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_1^{\kappa}}{\partial x_1 \partial x_{\kappa}} & \ldots\ldots & \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_p^{\kappa}}{\partial x_1 \partial x_{\kappa}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_1^{\kappa}}{\partial x_n \partial x_{\kappa}} & \ldots\ldots & \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_p^{\kappa}}{\partial x_n \partial x_{\kappa}} \end{matrix} \right\| = 0,$$

а звідси

$$\sum_{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_t^{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\kappa} \frac{\partial \xi_t^{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = 0$$

і нарешті

$$\sum_{\kappa} \frac{\partial \xi_t^{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = c_t = \text{const}. \tag{10}$$

Залишається тільки показати, що з формул (3) та (10) випливає третя група формул (7). Справді,

$$A_t \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} - A_t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \sum_{i,\kappa=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \right) - \sum_{i,\kappa=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} -$$

$$- \sum_{i,\kappa=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_{\kappa}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \right) - \sum_{i,\kappa=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^3 a_{i\kappa}}{\partial x_{\kappa} \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_s} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} = \sum_{i,\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(a_{il} \frac{\partial \xi_t^{\kappa}}{\partial x_l} + a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \right) -$$

$$- \sum_{i,\kappa,s=1}^{n} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \frac{\partial^3 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} - \sum_{i,\kappa,s=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_{\kappa}} - \sum_{i,\kappa,s=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_{\kappa} \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{l,\kappa} a_{l\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_l \partial x_{\kappa}} + \sum_{l} a_l \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} \frac{\partial \xi_t^{\kappa}}{\partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{il}}{\partial x_i} \frac{\partial^3 \xi_t^{\kappa}}{\partial x_{\kappa} \partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{l\kappa}}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_l \partial x_i} + \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_{\kappa} \partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial^3 \xi_t^i}{\partial x_i \partial x_{\kappa} \partial x_l} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{il}}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial^2 \xi_t^{\kappa}}{\partial x_i \partial x_l} - \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \xi_t^l}{\partial x_i \partial x_{\kappa}} - \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x_{\kappa}} -$$

$$-\sum_{i,\kappa,l=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa\,\partial x_l}\frac{\partial\xi_t^l}{\partial x_i}-\sum_{i,\kappa,l=1}^{n}\frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_i}\frac{\partial^2\xi_t^i}{\partial x^l\,\partial x_\kappa}-\sum_{i,\kappa,l=1}^{n}a_{l\kappa}\frac{\partial^3\xi_t^i}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_\kappa}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_l}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_t^i}{\partial x_l}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_l\frac{\partial^3\xi_t^l}{\partial x_l\,\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\xi_t^l}{\partial x_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_l}=0,$$

бо перший доданок знищується з десятим, четвертий — з одинадцятим, шостий — з дванадцятим, восьмий — з дев'ятим, чотирнадцятий — з шістнадцятим, другий, третій, п'ятий, сьомий, тринадцятий та п'ятнадцятий зникають на підставі (10). Теорема повністю доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Сферические функции на симметрических римановых пространствах. ДАН СССР, 70 № 1, 1950.