Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ПРО ВІДДІЛЬНІСТЬ ЗМІННИХ В РІВНЯННЯХ, ІНВАРІАНТНИХ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Мета цієї статті полягає в встановленні деяких умов, що забезпечують можливість такої заміни змінних в однорідному інваріантному рівнянні з трьома або чотирма аргументами, після якої одне з змінних виявляється відділеним. Суттєву роль в дальшому буде відігравати слідуюча лема.

Лема 1. Нехай A неособлива матриця розмірів 2×2 або 3×3. Тоді існує єдина з точністю до числового множника симетрична матриця X, яка задовольняє рівнянню

$$XA=-A^*X. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо окремо обидва випадки.

1. Матриця має розміри 2×2. Приведемо її до нормальної жорданової форми $A=T\tilde{A}T^{-1}$, де

$$\tilde{A}=\begin{cases}\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix}\\ \begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}\end{cases}$$

в залежності від того, чи характеристичне рівняння $\det(A+\lambda E)=0$ має двократний корінь λ, чи два різних корені λ_1 і λ_2. Рівняння (1) переписується тепер слідуючим чином:

$$XT\tilde{A}T^{-1}=-T^{-1*}\tilde{A}^*T^*X,$$

або

$$T^*XT\tilde{A}=-\tilde{A}^*T^*XT,$$

або

$$У\tilde{A}=-\tilde{A}^*У,$$

де $У=T^*XT$ є також симетрична матриця. Рівняння (1) має стільки ж незалежних симетричних розв'язків, скільки їх має останнє рівняння. В випадку кратного кореня матриця $У$, а разом з нею і матриця X можуть бути лише нульовими. Справді

$$\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix}=-\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{Vmatrix};$$

$$\alpha\lambda=-\alpha\lambda;\ \alpha+\beta\lambda=-\beta\lambda;\ \beta+\lambda\gamma=\beta-\lambda\gamma.$$

Але внаслідок того, що $\det A \neq 0, \lambda \neq 0$ і отже, $\alpha=\beta=\gamma=0$. У випадку різних коренів характеристичного рівняння, матриця $У$ виявиться або нулем, або залежною від одного довільного параметра. Справді

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix};$$

$$\alpha\lambda_1 = -\alpha\lambda_1; \ \beta(\lambda_2 + \lambda_1) = 0; \ \gamma\lambda_2 = -\gamma\lambda_2; \ \alpha = \gamma = 0;$$

отже, якщо $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, то $У=0$, якщо ж $\lambda_1 = -\lambda_2$, то

$$У = \begin{Vmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{Vmatrix} = \beta \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де β — довільний параметр.

2. Матриця A має розміри 3×3. Відповідаюча їй матриця $\widetilde{A}$ буде мати вигляд

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}, & \text{якщо корені характеристичного рівняння різні.} \\ \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}, & \text{якщо корені характеристичного рівняння рівні.} \\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}, & \text{якщо один з коренів характеристичного рівняння двократний.} \end{cases}$$

Дослідивши всі три випадки, переконаємося в тому, що матриця $У$ виявиться або нульовою, або залежною від одного довільного параметра. Лема повністю доведена.

Лема 2. Нехай групі Лі, яка діє в n-мірному просторі, відповідають інфінітезимальні оператори A_t, причому в деякій області D простору оператори $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лінійно не зв'язані, а інші виражаються через них формулами

$$A_t = \varphi_1^{(t)} A_1 + \cdots\cdots + \varphi_{n-1}^{(t)} A_{n-1} \qquad (t > n).$$

Нехай $B_t = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_t^{\kappa}(I, \mu) \frac{\partial}{\partial \mu_\kappa}$ — інфінітезимальні оператори відповідної скороченої групи (оператор B_t одержується з відповідного оператора A_t в результаті переходу до нових незалежних змінних I, $\mu_1 \ldots, \mu_{n-1}$, де I є інваріант групи).

Нехай далі між операторами B_t мають місце залежності

$$B_t = v_1^{(t)} B_1 + \cdots\cdots + v_{n-1}^{(t)} B_{n-1}, \qquad (t > n).$$

Тоді справедлива формула

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^1 \cdots \sigma_1^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{n-1}^1 \cdots \sigma_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \frac{D(v_1^{(t)} \cdots v_{n-1}^{(t)})}{D(\mu_1 \cdots \mu_{n-1})} = \sum_{s=n}^{p} \begin{vmatrix} \eta_1^1(e) \cdots \eta_{n-1}^1(e)\ \varphi_1^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_1^{n-1}(e) \cdots \eta_{n-1}^{n-1}(e)\ \varphi_{n-1}^{(s)} \\ \eta_1^s(e) \cdots \eta_{n-1}^s(e)\ 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

де $\eta_i^{(\kappa)}(e)$ — коефіцієнти інфінітезимальних операторів приєднаної групи і де слід покласти $e_i = \varphi_i^{(t)}$, якщо $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $e_t = 0$, якщо $n-1 < i < t$, $e_t = -1$; $e_i = 0$, якщо $i > t$.

У випадку трьохмірного простору і діючої в ньому трьохпараметричної групи остання формула може бути приведеною до вигляду

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \frac{D(v_1, v_2)}{D(\mu_1, \mu_2)} = \psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1), \tag{2'}$$

де $\psi_2(e)$ — коефіцієнт при ω в характеристичному поліномі Кіллінга

$$\varphi(\omega) = -|\eta_i^j(e) - \delta_i^j \omega|.$$

За нестачею місця ми не подаємо доведення цієї леми.

Нехай тепер нам дано лінійний диференціальний оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a(x), \quad (n = 3, 4),$$

інваріантний відносно групи перетворень, яка задовольняє умовам, переліченим в лемі 2. Переходячи в операторі $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та в операторах A_t до змінних I та $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ (в умовах леми 2 може існувати лише єдиний незалежний інваріант), вимагатимемо перш за все, щоб в перетвореному операторі $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не були присутніми змішані похідні. Ця вимога приводить до знаходження $n-1$ незалежних розв'язків рівняння

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_\kappa} = 0. \tag{3}$$

Припускаючи, що в області D простору відмінний від нуля вираз (див. нашу статтю «Про лінійні диференціальні оператори, інваріантні відносно групи перетворень» в даному збірнику)

$$F_1(I) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \neq 0, \tag{4}$$

ми доведемо слідуючу лему.

Лема 3. Функції I та μ_i незалежні в D, Доведення. Справді, якщо б виявилося, що $F(I, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})=0$, то, діючи оператором $\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ на $F(I, \mu)$, ми одержали б

$$0=F_1(I)F_I'+\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial \mu_s}{\partial x_\kappa}\right)F'_{\mu_s}=F_1(I)F_I'.$$

Але з того, що $F_1(I)\neq 0$ виходить, що $F_I'=0$, тобто $F(I, \mu)$ не залежить від I, а в такому разі виявляються функціонально залежними інтеграли μ_i, що неможливо. Лему доведено.

Позначаючи коефіцієнти перетвореного оператора $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ через $\tilde{a}_{ij}$ та $\tilde{a}_e$, ми на підставі теореми 1, доведеної в нашій попередній статті, одержимо, що вони задовольняють слідуючій системі рівняння в частинних похідних першого порядку:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\tilde{a}_{is}\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}+\tilde{a}_{ij}\frac{\partial \sigma_t^s}{\partial \mu_i}\right\}=B_t\tilde{a}_{sj}, \quad \mu_0\doteq I;$$

$$\sum_{i,\kappa=0}^{n-1}\tilde{a}_{i\kappa}\frac{\partial^2\sigma_t^j}{\partial\mu_i\,\partial\mu_u}+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{a}_i\frac{\partial\sigma_t^j}{\partial\mu_i}=B_t\tilde{a}_j, \quad 1\leqslant t\leqslant P. \tag{5}$$

На підставі того ж припущення (4) з цієї системи легко зробити висновок про незалежність коефіцієнтів σ_t^j, а разом з ними і функцій $v_\kappa^{(t)}$ від I. Справді, покладаючи в першій групі формул (5) $s=0$ і взявши j довільним, ми знайдемо через те, що $\tilde{a}_{0j}=\tilde{a}_j=0$ (за добором змінних μ_i),

$$\tilde{a}_{00}\frac{\partial\sigma_t^j}{\partial\mu_0}=F_1(I)\frac{\partial\sigma_t^j}{\partial I}=0,$$

звідки $\frac{\partial\sigma_t^j}{\partial I}=0$, тобто σ_t^j не залежить від I.

Для дальшого дослідження нам зручно буде писати систему (5) в матричній формі

$$B_t\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|=\left\|\frac{\partial\sigma_t^i}{\partial\mu_j}\right\|\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|+\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|\left\|\frac{\partial\sigma_t^j}{\partial\mu_i}\right\|,$$

$$B_t\left\|\tilde{a}_e\right\|=\left\|\frac{\partial\sigma_t^i}{\partial\mu_j}\right\|\left\|\tilde{a}_e\right\|+\left\|\sum_{i,\kappa=1}^{n-1}\tilde{a}_{i\kappa}\frac{\partial^2\sigma_t^e}{\partial\mu_i\,\partial\mu_\kappa}\right\|. \tag{6}$$

Враховуючи існуючі між операторами B_t співвідношення, ми покажемо, що з системи (6) випливає, що коефіцієнти $\tilde{a}_{ij}$ та $\tilde{a}_e$ задовольняють деякій алгебричній системі рівнянь, Справді, між коефіцієнтами σ_t^i при $t \geqslant n$ мають місце залежності

$$\sigma_t^i = v_1^{(t)} \sigma_i^i + \cdots + v_{n-1}^{(t)} \sigma_{n-1}^i, \tag{7}$$

з яких виходить

$$\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_i} = \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_1^i + \cdots + \frac{\partial v_{n-1}^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_{n-1}^i + v_1^{(t)} \frac{\partial \sigma_1^i}{\partial \mu_i} + \cdots + v_{n-1}^{(t)} \frac{\partial \sigma_{n-1}^i}{\partial \mu_i}. \tag{8}$$

Вживаючи співвідношення (7) до формул (6), одержуємо

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \left\| \frac{\partial \sigma_\kappa^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| + \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \right\| \frac{\partial \sigma_\kappa^i}{\partial \mu_i} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| + \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_i} \right\|.$$

Та аналогічно для молодших коефіцієнтів

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \left\| \frac{\partial \sigma_\kappa^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| + \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)}(\mu) \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| + \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right\|.$$

Користуючись співвідношеннями (8), знайдемо

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^i \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| = - \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_j} \sigma_\kappa^i \right\|;$$

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^i \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| = \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)} \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} - \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right) \right\|. \tag{9}$$

Зауважимо тепер, що

$$R_t = \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^i \right\| = \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\|; \quad \det R_t = \left| \sigma_j^t \right| \frac{D(v_1^{(t)} \cdots v_{n-1}^{(t)})}{D(\mu_1 \cdots \mu_{n-1})}. \tag{10}$$

З допомогою (10) система (9) може бути записаною, нарешті, в слідуючій формі:

$$\left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sigma_i^j \right\| \left\| \frac{\partial v_j^{(t)}}{\partial \mu_i} \right\| = - \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| = \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)} \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} - \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right) \right\|. \tag{11}$$

Розглядаючи частину цієї системи, до якої входять лише коефіцієнти $\tilde{a}_{ij}$ перетвореного оператора, і маючи на увазі симетрію матриці $\left\| \tilde{a}_{i\kappa} \right\|$, ми бачимо, що знаходимося в умовах леми 1, якщо тільки матриця $\|\sigma_i^j\| \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_i} \right\|$ виявляється не особливою. Але для того, щоб це виконувалося, ми повинні послатися на лему 2. Ця лема дозволяє виразити умову оберненості матриці $\|\sigma_i^j\| \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_i} \right\|$ безпосередньо в термінах самої групи перетворень. Отже, з леми 1 виходить $\|\tilde{a}_{ij}\| = \Phi(I, \mu)\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\|$. Тоді друга частина системи (11) дозволяє зробити висновок, що $\|\tilde{a}_l\| = \Phi(I, \mu)\|\tilde{a}_l(\mu)\|$.

Але матрицю $\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\|$ можна розглядати як розв'язок системи (6), а тому

$$B_t\, \Phi(I, \mu)\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\| = \Phi(I, \mu)\left\{\left\|\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j}\right\|\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\| + \|\tilde{a}_{ij}(\mu)\|\left\|\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}\right\|\right\}.$$

Звідси $B_t\, \Phi(I, \mu) = 0$, бо $\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\| \neq 0$. Таким чином, виявляється, що ція $\Phi(I, \mu)$ є інваріантом скороченої групи. Але скорочена група транзитивна, і отже функція не може залежати від μ. Підсумком наведених міркувань є слідуюча теорема.

Теорема. Нехай в просторі трьох або чотирьох вимірів задано лінійний диференціальний оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i, \kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x) \qquad (n = 3, 4)$$

інваріантний відносно групи Лі, діючої в цьому просторі і маючої p параметрів $(p \geqslant n)$. Нехай далі в деякій області D простору між породжуючими групу інфінітезимальними операторами A_t мають місце умови зв'язаності

$$A_t = \varphi_1^{(t)} A_1 + \cdots + \varphi_{n-1}^{(t)} A_{n-1} \qquad (t \geqslant n),$$

причому оператори $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лінійно не зв'язані. Нехай, нарешті, в області D відмінний від нуля вираз

$$F_1(I) = \sum_{i, \kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x)\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial I}{\partial x_\kappa}$$

і відмінна від нуля принаймні для одного значення t слідуюча сума:

$$\sum_{s=n}^{p}\begin{vmatrix} \eta_1^1(e) \cdots\cdots \eta_{n-1}^1(e)\, \varphi_1^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_1^{n-1}(e) \cdots \eta_{n-1}^{n-1}(e)\, \varphi_{n-1}^{(s)} \\ \eta_1^s(e) \cdots\cdots \eta_{n-1}^s(e)\ \ 0 \end{vmatrix},$$

де $\eta_i^\kappa(e)$ — коефіцієнти інфінітезимальних операторів приєднаної групи і

$$e_i=\varphi_i^{(t)}\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\ e_i=0\ n\leqslant i<t,\ e_t=-1,\ e_i=0\quad i>t.$$

Тоді, переходячи в операторі $L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ до нових незалежних змінних I та $\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$, де μ_i — незалежні в D розв'язки рівняння

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_\kappa}=0,$$

ми приведемо його до вигляду

$$L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=F_1(I)\frac{\partial^2}{\partial I^2}+F_2(I)\frac{\partial}{\partial I}+a+\Phi(I)L_1\left(\mu,\frac{\partial}{\partial\mu}\right).$$

При цьому оператор $L_1\left(\mu,\frac{\partial}{\partial\mu}\right)$, що відщеплюється, інваріантний відносно скороченої групи.

У випадку трьохмірного простору і діючої в ньому трьохпараметричної групи замість вимоги відмінності від нуля вказаної вище суми, слід вимагати, щоб був відмінним від нуля вираз $\psi_2(\varphi_1,\varphi_2,-1)$, де $\psi_2(e)$ — коефіцієнт при ω в характеристичному поліномі Кіллінга.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Група обертань в трьохмірному просторі. Поліном Кіллінга має вигляд

$$\varphi(\omega)=-\begin{vmatrix}-\omega & e_3 & -e_2\\ -e_3 & -\omega & e_1\\ e_2 & -e_1 & -\omega\end{vmatrix}=\omega^3+\omega(e_1^2+e_2^2+e_3^2).$$

$\psi_2(e)=e_1^2+e_2^2+e_3^2$ відмінно від нуля при e_i, не рівних нулю одночасно.

2. Група в трьохмірному просторі породжена трьома слідуючими операторами:

$$A_1=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\quad A_2=y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y},\quad A_2=x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x}.$$

Її інваріантом буде функція $x^2+y^2-z^2$. Між операторами мають місце такі структурні співвідношення: $[A_1,A_2]=-A_3$; $[A_1,A_3]=A_2$; $[A_2,A_3]=A_1$.

Далі, функції φ_1 і φ_2 поза площиною $y=0$ будуть $\varphi_1=\frac{z}{y}$, $\varphi_2=\frac{x}{y}$. Поліном Кіллінга має вигляд

$$\varphi(\omega)=-\begin{vmatrix}-\omega & -e_3 & e_2\\ -e_3 & -\omega & -e_1\\ e_2 & -e_2 & -\omega\end{vmatrix}.$$

Отже, $\psi_2(e)=e_1^2-e_2^2-e_3^2$, $\psi_2(\varphi_1,\varphi_2,-1)=\varphi_1^2-\varphi_2^2-1$.

Тому у будь-якій області, яка не перетинається поверхнею $z^2-x^2-y^2=0$ та площиною $y=0$ в інваріантному відносно цієї групи рівнянні, можна добитися віддідення змінних.

3. Група рухів, паралельних площині $z=0$. Її поліном Кіллінга буде $\varphi(\omega)=\omega^3+\omega e_3^2$. Тому $\psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1)=+1$. Між іншим, в цьому прикладі віддільність змінних безпосередньо випливає з того, що загальний вид оператора, інваріантного відносно цієї групи, такий:

$$a(z)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}+b(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a(z)\frac{\partial}{\partial z}+d(z).$$

На зв'язок групових властивостей диференціального оператора з віддільністю змінних є деякі вказівки в книжці Г. Біркгофа «Гидродинамика».

ЛІТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ, М., 1954.