Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ

ДЕЯКІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

В цій статті розглядаються властивості деяких числових послідовностей, які будуть в іншій роботі використані для арифметичного визначення такої функції, що дає топологічне (неперервне і взаємооднозначне) відображення певної множини, одна з яких має, а друга не має міри Лебега.

I

Якщо s, κ і n є натуральними числами, то формула $n=2^{s-1}(2\kappa-1)$ дає взаємооднозначну відповідність між множиною натуральних чисел $\{n\}$ і множиною пар натуральних чисел $\{s, \kappa\}$.

Наприклад, кожному з натуральних чисел $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$, відповідає взаємооднозначно пара натуральних чисел.

$$(s, \kappa)=(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (3,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (1,4),\ (4,1),\ (1,5),\ (2,3),\ (1,6),\ (3,2),\ (1,7),\ (2,4),\ (1,8).$$

Означимо тепер послідовність $\{u_n\}$ з допомогою формул

$$u_1=0,\ u_{n+1}=u_n+3^{s-1},\ \text{де}\ n=2^{s-1}(2\kappa-1).$$

Перші члени послідовності $\{u_n\}$ мають значення

0,1, 4,5, 14, 15, 18, 19, 46, 47, 50, 51, 60, 61, 64, 65, 146, 147.

З формули $n=2^{s-1}(2\kappa-1)$ виходить, що для непарного n буде $s=1$, отже

$$u_{n+1}=u_n+1. \tag{A}$$

Виведемо тепер слідуючі властивості послідовності $\{u_n\}$:

(1) $u_{2n}=n+3u_n$;

(2) $u_{2n+1}=n+3u_{n+1}$;

(3) $u_{2n-1}=n+3u_n-1$;

(4) $u_{2^n}=3^n-2^n$;

(5) $u_{2^{n+1}}-u_{2^n}=2\cdot 3^n-2^n$;

(6) $\sum\limits_{i=1}^{n}u_{2i-1}-\sum\limits_{i=1}^{n-1}u_{2i}=3u_n$;

(7) $u_{2^n}=u_{2^n-i}+u_{i+1}$ для $i=0, 1, 2,\dots (2^n-1)$,
$n=1, 2, 3,\dots$

Доведення. Формула (1) вірна для $n=1$. Якщо ця формула вірна для $n=m$, вона буде також вірна для $n=m+1$.

Треба довести, що $u_{2(m+1)}=m+1+3u_{m+1}$, якщо $u_{2m}=m+3u_m$.

Справді, для $m=2^{s-1}(2\kappa-1)$ маємо $u_{m+1}=u_m+3^{s-1}$, а також

$$u_{2m+1}-u_{2m}=3^s \text{ (бо } 2m=2^s(2\kappa-1));$$

$$u_{2m+1}-u_{2m}=3\cdot 3^{s-1}=3(u_{m+1}-u_m);$$

$$u_{2(m+1)}=u_{2m+2}=u_{2m+1}+1=u_{2m}+3u_m-3u_m+1.$$

Але за умовою $u_{2m}=m+3u_m$, отже $u_{2(m+1)}=m+1+3u_{m+1}$ і формула (1) вірна для $n=1, 2, 3, \ldots$ Формула (2) випливає з формули (1) і з зауваження (A). Маємо $u_{2n+2}=n+1+3u_{n+1}$ і $u_{2n+2}=u_{2n+1}+1$, отже

$$u_{2n+1}=n+3u_{n+1}.$$

З (A) і (1) випливає також формула (3). Справді одержуємо

$$u_{2n}=u_{2n-1}+1 \text{ і } u_{2n-1}=u_{2n}-1,\ u_{2n}=n+3u_n,$$

отже $u_{2n-1}=n+3u_n-1$.

Формула (4) вірна для $n=1$. Але якщо вона вірна для $n=m$, то вона вірна і для $n=m+1$.

З формули (1) виходить

$u_{2^{m+1}}=u_{2\cdot 2^m}=2^m+3u_{2^m}$, отже з прийнятої умови випливає

$$u_{2^{m+1}}=2^m+3(3^m-2^m)=3^{m+1}-2^{m+1}.$$

Формула (5) випливає безпосередньо з формули (4)

$$u_{2^{n+1}}-u_{2^n}=3^{n+1}-2^{n+1}-3^n+2^n=3^n(3-1)-2^n(2-1)=2\cdot 3^n-2^n.$$

Для доведення формули (6) беремо до уваги рівність

$\sum_{i=1}^{n}(u_{2i}-u_{2i-1})=n$, яка випливає з зауваження (A).

Одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n}u_{2i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{2i}=\sum_{i=1}^{n}(u_{2i-1}-u_{2i})+u_{2n}=u_{2n}-n=n+3u_n-n=3u_n.$$

Щоб довести формулу (7), зауважимо передусім, що ця формула вірна для будь-якого натурального числа n і для $i=0$.

Припустимо тепер, що формула вірна для $i=r<2^n-1$ і доведемо, що вона буде тоді вірна для $r+1<2^n$.

Нехай $r+1=2^{s-1}(2\kappa-1)<2^n$.

Тоді

$$2^n-(r+1)=2^n-2^{s-1}(2\kappa-1)=2^{s-1}(2^{n-s+1}-2\kappa+1).$$

Але $2^{s-1}(2\kappa-1)<2^n$, отже, $2\kappa-1<2^{n-s+1}$ і $2^{n-s+1}-2\kappa+1$ є найбільшим непарним множником виразу $2^n-(r+1)$, а найвищим степенем числа 2, що міститься в цьому виразі, є степінь 2^{s-1}. Таким чином, при тому самому показнику $s-1$ маємо

$$r+1=2^{s-1}(2\kappa-1);$$

$$2^n-(r+1)=2^{n-1}(2^{n-s+1}-2\kappa+1).$$

Можемо тепер написати

$$u_{2^n-(r+1)+1}=u_{2^n-(r+1)}+3^{s-1};$$

$$u_{r+2}=u_{r+1}+3^{s-1},$$

а далі

$$u_{r+2}-u_{r+1}+u_{2^n-r}-u_{2^n-(r+1)};$$

$$u_{2^n-(r+1)}+u_{r+2}=u_{2^n-r}+u_{r+1}=u_{2^n}.$$

Отже, формула (7) вірна для всякого натурального $i<2^n$.

II

Означимо тепер послідовність $\{p_n\}$ з допомогою таких умов:

$$p_n=2r+1, \text{ якщо } 2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}.$$

Зауважимо передусім, що для всякого натурального n нерівності $2^n\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$ визначають однозначно таке m і таке r, що задовольняють ці нерівності.

Перші члени означеної так послідовності, від $n=1$ до $n=18$, мають такі значення:

1,1, 3,1, 3,5, 7,1, 3,5, 7,9, 11, 13, 15, 1,3, 5.

Виведемо деякі властивості послідовності $\{p_n\}$

(8) $p_{2n}=2p_n-1$.

З умов $2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$ і $p_n=2r+1$ виходить

$$2^{m+1}\leqslant 2n=2^{m+1}+2r<2^{m+2},\ p_{2n}=4r+1;$$

$$p_{2n}=2(p_n-1)+1=2p_n-1;$$

(9) $p_{2^n-1}=2^n-1$.

Якщо $2^m\leqslant 2^n-1<2^{m+1}$, то $n=m+1$, якщо ж $2^n-1=2^m+r$, то $r=2^n-2^m-1=2^{n-1}-1$.

Врешті дістаємо

$$p_{2^n-1}=2(2^{n-1}-1)+1=2^n-1.$$

(10) $p_{2^n}=1$.

Ця формула випливає безпосередньо з означення, бо для кожного n $r=0$.

(11) Якщо $n+1$ не є степенем числа 2, то $p_{n+1}=2+p_n$.

Коли $2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$, тобто $p_n=2r+1$, то маємо

$$2^m\leqslant n+1=2^m+r+1<2^{m+1},\ \text{бо } n+1\neq 2^{m+1},$$

тому

$$p_{n+1}=2(r+1)+1=2r+3=2+p_n.$$

(12) $p_{4n-3}=2p_{2n-1}-3$, для $n=2, 3, 4,\ldots$

З формули (8) одержуємо $p_{4n-3}=2p_{2n-1}-1$, а за формулою (11):

$$p_{4n-3}=2p_{2n-1}-3;$$

(13) $p_{4n-1}=2p_{2n-1}+1$.

Ця формула випливає також з формул (8) і (11).

III

Нехай за означення буде

$$b_n=p_n+u_{p_n+1};$$

p_n+1 є завжди першим членом, отже, за формулою (A) маємо

$$u_{p_n+1}=u_{p_n}+1, \text{ а також } b_n=p_n+u_{p_n}+1.$$

Напишемо 18 перших членів послідовності $\{b_n\}$:

2, 2, 8, 2, 8, 20, 26, 2, 8, 20, 26, 56, 62, 74, 80, 2, 8, 20.

(14) $b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=1+3^{m+1}$ для $m=0, 1, 2\ldots, i=0, 1, 2\ldots(2^m-1)$.
Маємо $p_{2^m+i}=2i+1$ і $p_{2^{m+1}-2-1}=p_{2^m+(2^m-i-1)}$.
З нерівності $2^m-i-1<2^m$ дістаємо $p_{2^m-i-1}=2(2^m-i-1)+1=2^{m+1}-2i-1$.
Дістаємо тепер

$$b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=p_{2^m+i}+u_{p_{2^m+i}}+1+p_{2^{m+1}-i-1}+u_{p_{2^{m+1}-i-1}}+1=$$

$$=2i+1+u_{2i+1}+1+2^{m+1}-2i-1+u_{2^{m+1}-i-1}+1=$$

$$=2+2^{m+1}+u_{2i+1}+u_{2^{m+1}-2i-1}.$$

З формул (7) і (4) виводимо

$$u_{2^{m+1}-2i-1}=u_{2^{m+1}}-u_{2i+2}=3^{m+1}-2^{m+1}-u_{2i+2}=3^{m+1}-$$

$$-2^{m+1}-u_{2i+2}-1.$$

Знаходимо врешті

$$b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=2+2^{m+1}+u_{2i+1}+3^{m+1}-2^{m+1}-$$

$$-u_{2i+1}-1=1+3^{m+1}.$$

(15) $b_{2^n+2i}=3b_{2^n+i}-4$, для $n=1, 2, 3,\ldots, i=1, 2,\ldots(2^{n-1}-2)$.
Маємо

$$b_{2^n+i}=p_{2^n+i}+u_{p_{2^n+i}}+1;$$

$$b_{2^n+2i}=p_{2^n+2i}+u_{p_{2^n+2i}}+1.$$

За умовою $2i<2^n$, отже

$$p_{2n+i}=2i+1,\ p_{2^n+2i}=4i+1,$$

отже,

$$b_{2^n+i}=2i+1+u_{2i+1}=2i+2+u_{2i+1};$$

$$b_{2^n+2i}=4i+1+u_{4i+1}+1=4i+2+u_{4i+1}.$$

З формули (2) одержуємо

$$b_{2^n+2i}=4i+2+2i+3u_{2i+1}=bi+2+3u_{2i+1};$$

$$3b_{2^n+i}=bi+b+3u_{2i+1},$$

і врешті

$$b_{2^n+2i}=3b_{2^n+i}-4.$$

(16) $b_{2^n+4i-3}=3b_{2^n+2i-1}-16$, якщо $4i-3<2^n$, $n=1, 2, 3,\ldots$

З означень $p_{2^n+4i-3}=8i-5$, $p_{2^n+2i-3}=4i-1$ виходить, що

$$b_{2^n+4i-3}=8i-4+u_{8i-5};$$

$$b_{2^n+2i-1}=4i+u_{4i-1}.$$

З формул (2), (1) і (3) випливає

$$u_{8i-5}=u_{2(4i-3)+1}=4i-3+3u_{4i-2}=4i-3+3(2i-1+3u_{2i-1})=$$

$$=10i-6+9u_{2i-1}=10i-6+9(i+3u_i-1)=19i-15+27u_i;$$

$$u_{4i-1}=2i+3u_{2i}-1=2i-1+3(i+3u_i)=5i-1+9u_i.$$

З цього виходить

$$b_{2^n+4i-3}=27i+27u_i-19,\ b_{2^n+2i-1}=9i+9u_i-1$$

і врешті

$$b_{2^n+4i-3}=3b_{2^n+2i-1}-16.$$

(17) Якщо $4i-1<2^n$, то $b_{2^n+4i-1}=3b_{2^n+2i-1}+2$ для $n=1, 2, 3,\ldots$

З рівностей $p_{2^n+4i-1}=8i-1$ і $p_{2^n+2i-1}=4i-1$ виходить

$$b_{2^n+4i-1}=8i+u_{8i-1},\ b_{2^n+2i-1}=4i+u_{4i-1}.$$

З формули (3) дістаємо

$$u_{8i-1}=4i+3u_{4n}-1,\ u_{4i-1}=u_{4i}-1.$$

З цих формул знаходимо

$$b_{2^n+4i-1}=12i+3u_{4i}-1,\ b_{2^n-2i-1}=4i+u_{4i}-1$$

і

$$b_{2^n+4i-1}=3b_{2^n+2i-1}+2.$$

(18) $b_{2^n}=2$ для $n=1, 2, 3,\ldots$ Справді маємо

$$b_{2^n}=p_{2^n}+u_{p_{2^n}}+1=1+u_1+1=2.$$

IV

Неважко довести, що числа b_{2^n}, b_{2^n+1}, $b_{2^n+2}, \ldots b_{2^{n+1}-1}$ утворюють зростаючу прогресію та що найбільше з них $b_{2^{n+1}-1} = 3^{n+1} - 1$.

Але з розгорнення $3^{n+1}-1 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + 2 \cdot 3^n$ виходить, що (при $i = 0, 1, 2, \ldots (2^n - 1)$) кожне число b_{2^n+i} розгортається за трійковою системою в многочлен $b_{2^n+i} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \ldots + \alpha_n \cdot 3^n$, де кількість членів не більша, ніж $n+1$, а числа α_v $(v = 0, 1, \ldots n)$ можуть мати одне з слідуючих значень: 0, 1, або 2.

(19) Доведемо таку теорему:

Теорема. Якщо $b_{2^n+i} = \sum_{v=0}^{n} \alpha_v 3^v$ (для $i = 0, 1, \ldots (2^n - 1)$), то

1) $\alpha_0 = 2$

2) $\alpha_v \neq 1$

для $v = 1, 2, \ldots n$, (для кожного n). Обчислюємо [беремо до уваги формулу (2)] $b_{2^n+i} = 2i + 1 + u_{2i+1} + 1 = 3(i + u_{i+1}) + 2$, отже $\alpha_0 = u$.

Щоб довести другу частину теореми (19), треба вивести дві допоміжні теореми:

(а) Якщо $i = 0, 2, 4, \ldots (2^n - 2)$, то $\alpha_1 = 0$.

(б) Якщо $i = 1, 3, 5, \ldots (2^n - 1)$, то $\alpha_1 = \alpha$.

Нехай буде $b_{2^n+m} = 2 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \ldots + \alpha_n \cdot 3^n$;

$$b_{2^n+2m} = 2 + \beta_1 \cdot 3 + \beta_2 \cdot 3^2 + \ldots + \beta_n \cdot 3^n.$$

З формули (15) виходить

$$b_{2^n+2m} = 3 b_{2^n+m} - 4 = -4 + 6 + \alpha_1 \cdot 3^2 + \alpha_2 \cdot 3^3 + \ldots = 2 +$$
$$+ \alpha_1 \cdot 3^2 + \alpha_2 \cdot 3^3 + \ldots, \text{ отже, } \beta_1 = 0.$$

Для доведення другої допоміжної теореми обчислимо

$$b_{2^n+2m+1} - b_{2^n+2m} = 4m + 3 + u_{4m+3} + 1 - 4m - 1 - u_{4m-1} - 1 =$$
$$= 2 + u_{2(2m+1)+1} - u_{2(2m+1)-1} = 2 + 2m + 1 + 3u_{2m+2} -$$
$$- 2m - 1 - 3u_{2m+1} + 1 = 3 + 3(u_{2m+2} - u_{2m+1}) =$$
$$= 3 + 3(u_{2m+1} + 1 - u_{2m+1}) = 6 = 2 \cdot 3.$$

Нехай

$$b_{2^n+2m} = 2 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \ldots, \quad b_{2^n+2m+1} = 2 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \ldots$$

Маємо тепер

$$b_{2^n+2m+1} = b_{2^n+2m} + 2 \cdot 3 = 2 + 2 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^3 + \ldots \quad \text{отже, } \alpha_1 = \alpha.$$

Доведемо тепер (19) насамперед для непарного i, тобто для $i = 4m - 3$, або для $i = 4m - 1$ (де $m = 1, 2, 3, \ldots$).

Ми довели раніше формули

$$b_{2^n+4m-3}=3b_{2^n+2m-1}-16 \text{ для } 4m-3<2^n;$$

$$b_{2^n+4m-1}=3b_{2^n+2m-1}+2 \text{ для } 4m-1<2^n.$$

Припустимо, що теорема (19) вірна для $i=2m-1=1, 3, 5, \ldots r$ і доведемо, що тоді вона вірна також і для $i=r+2$.

Якщо $\frac{r+1}{2}$ є непарне число (тобто $r=1, 5, 9, 13, \ldots$), то покладемо в формулі (17) $2m-1=\frac{r+1}{2}$, тобто $4m-1=r+2$. Тоді дістанемо

$$b_{2^n+r+2}=3b_{2^n+\frac{r+3}{2}}-16\,.$$

Нехай, за умовою в розгорненні $b_{2n+r}=2+2\cdot3+\alpha_2\cdot3^2+\alpha_3\cdot3^3+\ldots$ цифри α_v мають значення 0 або 2. Тоді, залежно від того, яке значення буде мати $r=1, 5, 9, \ldots$ або $3, 7, 11, \ldots$ дістанемо

$$b_{2^n+r+2}=2+2\cdot3+2\cdot3^2+\alpha_2\cdot3^3+\alpha_3\cdot3^4+\ldots$$

або

$$b_{2^n+r+2}=-16+2\cdot3+2\cdot3^2+\alpha_2\cdot3^3+\alpha_3\cdot3^4+\ldots=$$

$$=2+2\cdot3+\alpha_2\cdot3^3+\alpha_3\cdot3^4+\ldots$$

Бачимо, що в трійковому розгорненні числа b_{2^n+r+2} жодна цифра α_i не дорівнює 1.

Для доведення, що теорема (19) вірна для парного i, обчислимо різницю (на основі (2))

$$b_{2^n+2m+1}-b_{2^n+2m}=4m+2+1+u_{4m+3}=4m-1-u_{4m+1}=$$

$$=2+u_{4m+3}-u_{4m+1}=2+u_{2(2m+1)}+1-u_{2(2m+1)}-1=$$

$$=2+2m+1+3u_{2m+2}-2m-3u_{2m+1}=3+3u_{2m+2}-$$

$$-3u_{2m+1}=2+5m+4+9u_{m+1}-5m-9u_{m+1}=2\cdot3.$$

Одержуємо

$$b_{2^n+2m}=b_{2^n+2m+1}-6=2+\alpha_2\cdot3^2+\alpha_3\cdot3^3+\ldots$$

Бачимо, що теорема (19) вірна для $i=0, 1, 2, \ldots (2^n-1)$.

Таким чином, кожне число b_n можна записати у вигляді трійкової системи без цифри 1.

Числа $a_n=b_n-1$ мають в трійковій системі вигляд

$$a_n=1+\alpha_1\cdot3+\alpha_2\cdot3^2+\ldots+\alpha_m\cdot3^m, \text{ де } \alpha_v=0 \text{ або } 2.$$

Зважаючи на те, що $1=2\cdot3^{-1}+2\cdot3^{-2}+2\cdot3^{-3}, \ldots$, можемо a_n записати у вигляді періодичного числа з періодом 2 без цифри 1

$$a_n=\alpha_m\cdot3^m+\alpha_{m-1}\cdot3^{m-1}+\ldots+\alpha_1\cdot3+2\cdot3^{-1}+2\cdot3^{-2}+\ldots$$

V

Можна довести, що кожне ціле додатне число, яке в трійковій системі може бути записане без цифри 1 і перша цифра якого $v_0=2$, є певним членом послідовності $\{b_n\}$.

(20) Якщо $b=2+\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\ldots+\alpha_n\cdot 3^n$ (де $\alpha_v=0$ або 2), то існує одне і тільки одне таке число i $(0\leqslant i\leqslant 2^{n-1})$, для якого $b=b_{2^n+i}$.

Ми мали раніше

$$b_{2^n+i}=2i+1+u_{2i+1}+1,$$

$$i+u_{i+1}=\frac{b_{2^n+i}-2}{3}.$$

Якщо тепер

$$b_{2^n+i}=2+\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\ldots+\alpha_m\cdot 3^m,\ (\alpha_v=0 \text{ або } 2,\ \alpha_m=2)$$

то маємо

$$i+u_{i+1}=\alpha_1+\alpha_2\cdot 3+\alpha_3\cdot 3^2+\ldots+\alpha_m 3^{m-1}.$$

Маємо, очевидно, $i_1+u_{i_1+1}<i_2+u_{i_2+1}$ якщо $i_1<i_2$.

(21) Якщо тепер покладемо $c_\kappa=\kappa+u_{\kappa+1}$, де $\kappa=1, 2, 3, 4, \ldots$, то послідовність $\{c_\kappa\}$ є зростаючою за величиною послідовністю всіх натуральних чисел, в трійковому записі яких немає цифри 1.

Для $\kappa=1, 2, \ldots 18$ члени цієї послідовності мають значення

2, 6, 8, 18, 20, 24, 26, 54, 56, 60, 62, 72, 74, 78, 80, 162, 164, 168.