Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ З ПАРАМЕТРОМ

В цій роботі розглядаються граничні задачі типу Діріхле для одного класу еліптичних систем з параметром і відповідних систем без параметра. Провадиться побудова матриць Гріна для цих задач і розв'язки самих задач представляються з допомогою побудованих матриць Гріна. Виводяться оцінки для матриць Гріна і їх частин.

1. Тривимірний простір Евкліда D_∞ вважається далі віднесеним до прямокутної системи координат x_1, x_2, x_3. Буде розглядатися також конечна область $D \subset D_\infty$, обмежена поверхнею S типу Ляпунова.[1] Точки простору ототожнюються з відповідними радіус-векторами. Якщо a є вектор із складовими a_1, a_2, a_3, то тою самою буквою будемо позначати в матричному записі стовпець з елементами a_1, a_2, a_3.

Розглядається матричний диференціальний оператор вигляду

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x), \tag{1}$$

коефіцієнти якого є дійсними функціональними квадратними матрицями порядку 3, визначеними для значень $x = (x_1, x_2, x_3)$ з деякої конечної області Ω ($\overline{D} \subset \Omega$).

Припускається, що в цій області $A_0(x), A_i(x), A_{ij}(x)$ неперервно диференційовані відповідно 2, 3, 4 рази. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Нехай $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є оператор еліптичного типу: для кожної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ і довільного $x \in \Omega$

$$\det A_2(x, \alpha) = \det \left\{ \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j \right\} \neq 0.$$

Розглядається система диференціальних рівнянь з параметром $\lambda > 0$

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \tag{2}$$

(E — одинична матриця, $\Phi(x)$ — достатньо гладкий заданий стовпець)

---

[1] Всі результати цієї роботи вірні для будь-якого конечно-вимірового простору Евкліда з числом вимірів $n \geq 2$. Для простоти запис ведеться для тривимірового випадку.

і вважається, що для значень $\lambda\epsilon[0, +\infty)$ відповідна задача типу Діріхле для системи (2), тобто задача

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x \epsilon D); \quad u(x) = 0 \quad (x \epsilon S)$$

однозначно розв'язна.

2. Побудуємо з допомогою методу Е. Е. Леві [1] фундаментальну матрицю $g(x, y; \lambda)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ (означення фундаментальної матриці для еліптичного оператора довільного порядку дано Я. Б. Лопатинським в [2]).

Розглянемо допоміжний оператор $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$, де y деяка фіксована точка, і побудуємо фундаментальну матрицю $g_0(x-y, y; \lambda)$ для цього матричного диференціального оператора з постійними коефіцієнтами. Будемо шукати частинний розв'язок системи рівнянь

$$\left[A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \tag{3}$$

з допомогою трансформації Фур'є в цілому просторі D_∞. Замінимо шуканий стовпець $u(x)$ і даний $\Phi(x)$ їх трансформаціями Фур'є

$$\Phi(x) = \iiint_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \tilde{\Phi}(\alpha)\, d\alpha; \qquad u(x) = \iiint_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \tilde{u}(\alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

Маємо формули «обертання»

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{D_\infty} e^{-i(\alpha, y)} \Phi(y)\, dy; \; \tilde{u}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{D_\infty} e^{-i(\alpha, y)} u(y)\, dy. \tag{5}$$

Підставляючи значення $u(x)$ і $\Phi(x)$ з (4) в (3) одержимо, враховуючи, що в силу позначення $A_2(y, i\alpha) = -A_2(y, \alpha)$,

$$\iiint_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \left\{[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]\, \tilde{u}(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha)\right\} d\alpha = 0.$$

Звідки

$$\tilde{u}(\alpha) = [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1} \tilde{\Phi}(\alpha).$$

(Припускається, що матриця $[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]$ оборотня для значень $\lambda\epsilon[0, +)$. З цього припущення випливає, що всі λ — корені рівняння $\det[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E] = 0$ комплексні).
Підставляючи в (4), маємо

$$u(x) = \iiint_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1} \tilde{\Phi}(\alpha). \tag{6}$$

Взагалі інтеграл (6) розуміється як головне значення по Коші, тобто як границя інтеграла по кулі при прямуванні радіуса кулі до безмежності. Введемо допоміжний стовпець

$$u_2(x) = \iiint\limits_{|\alpha|<R} e^{i(\alpha, x)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1} \tilde{\Phi}(\alpha)\, d\alpha.$$

Внаслідок того, що інтеграл (6) збігається, існує конечний $\lim\limits_{R\to\infty} u_R(x) = u(x)$. Підставляючи в останній інтеграл значення $\tilde{\Phi}(\alpha)$ з (5) і змінивши порядок інтегрування, одержимо

$$u_R(x) = \iiint\limits_{D_\infty} g_0^R(x-(y, y; \lambda)\, \Phi(y)\, dy,$$

де

$$g_0^R(x-y, y; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i(x-y, \alpha)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}\, d\alpha. \tag{7}$$

Доведемо, що існує конечний $\lim\limits_{R\to\infty} g_0^R\ (x-y,\ y;\ \lambda)$, тобто що можна в (7) переходити до границі при $R\to\infty$. Доведемо, що збігається інтеграл

$$g_0(x-y, y; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D\infty} e^{i(x-y, \alpha)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}\, d\alpha. \tag{8}$$

Тоді шуканий частинний розв'язок системи (3) запишеться у вигляді

$$u(x) = \iiint\limits_{D\infty} g_0(x-y, y; \lambda)\, \Phi(y)\, dy.$$

Матриця $g_0(x-y, y; \lambda)$ є фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$.

Замінимо в (7) $x-y$ на x і зробимо заміну змінних $\alpha = \lambda\tilde{\alpha}$ (причому, для простоти позначимо $\tilde{\alpha}$ знову через α). Одержимо

$$g_0^R(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x, \alpha)} [A_2(y, \alpha) + E]^{-1}\, d\alpha, \tag{7'}$$

де $R_1 = \frac{R}{\lambda}$. Отже, необхідно оцінити $g_0^R\ (x,\ y;\ \lambda)$ при $R\to\infty$ і $x \neq 0$.

Маємо

$$g_0^R(x, y; \lambda) = \frac{1}{i(2\pi)^3 |x|^2} \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) e^{i\lambda(x, \alpha)} \right\} [A_2(y, \alpha) + E]^{-1}\, d\alpha.$$

Нехай S_1 — поверхня кулі $|\alpha| < R_1$. Застосувавши до останнього інтегралу формулу Остроградського, одержимо вираз $g_0^R\ (x,\ y;\ \lambda)$ у вигляді суми двох інтегралів по S_1 і по $|\alpha| < R_1$. Легко довести, що

$$g_0^R(x, y, \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3 |x|^2} \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x,\alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} d\alpha + O\left(\frac{1}{R_1 |x|^3}\right). \qquad (9)$$

Залишається довести, що останній інтеграл збігається при $R \to \infty$. Перейдемо до полярних координат з полюсом в центрі кулі $|\alpha| < R_1$ і з полярною віссю, співпадаючою з x (x є перпендикуляр до полярної площини). Тоді $d\alpha = \varrho^2 \sin\Theta d\varrho d\varphi d\partial$ і оператор $x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3}$ виразиться в змінних ϱ, φ, Θ, що й розуміється в усіх дальших формулах цього пункту. Покладемо $\alpha = \varrho\xi$, де ξ — орт α; $(x, \alpha) = |x| \varrho \cos\Theta$. Таким чином,

$$I = \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x,\alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 e^{i\lambda|x|\varrho\cos\Theta} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2 y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} d\varrho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 d\varrho \int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda|x|\varrho t} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} dt.$$

Під внутрішнім інтегралом в останньому виразі маємо аналітичну функцію від t всюди, крім $t = \pm 1$. Зсунемо шлях інтегрування в цьому інтегралі, взявши замість відрізка $[-1, +1]$ дійсної осі контур L, що лежить в верхній півплощині (де $Imt > 0$) і з'єднує точки $t = \pm 1$. Одержимо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 d\varrho \int\limits_L e^{i\lambda|x|\varrho t} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} dt.$$

Кожний елемент матриці $[A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1}$ має вигляд частки двох поліномів по ϱ: четвертого степеня (чисельник) з вільним членом $=1$ або $=0$ і шостого степеня (знаменник) з вільним членом $=1$. Тому

$$[A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1} = O\left(\frac{1}{1 + \varrho^2}\right).$$

Далі

$$\left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1} \right\} = O\left(\frac{1}{1 + \varrho^3}\right).$$

Обчислюючи інтеграл по контуру L частинами, позначивши $e^{i\lambda|x|\rho t}dt = dv$ і враховуючи вказані оцінки, можна твердити, що інтеграл I збігається при $R \to \infty$.

Переходячи в (9) до границі при $R \to \infty$ і позначивши $\lim\limits_{R\to\infty} g_0^R(x, y; \lambda) = g_0(x, y; \lambda)$ (ця границя існує в силу збіжності інтегралу I), одержимо

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3|x|^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i\lambda(x,\alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} \partial\alpha. \quad (10)$$

Отже, можна в (7′), а значить і в (7), переходити до границі при $R \to \infty$. Таким чином, збіжність інтегралу (8) доведена і фундаментальна матриця $g_0(x-y, y; \lambda)$ (з особливістю в точці $x=y$; коефіцієнти залежать від y) побудована.

3. В цьому пункті одержимо оцінки для матриці $g_0(x-y, y; \lambda)$ і її похідних.

Перетворимо прямокутну систему $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ в нову прямокутну систему $O\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3$, повернувши вісі так, щоб додатній напрям вісі α_3 і вектора x співпадали. Через спеціальний вибір вісі α_3 маємо $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = |x|$. Тому

$$(x, \alpha) = |x|\tilde{\alpha}_3 \qquad x_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\alpha_3} = |x| \frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_3}.$$

Легко підрахувати, що $d\alpha = d\tilde{\alpha}$. Переопозначимо для простоти $\tilde{\alpha}$ знову через α і позначивши через S_∞ координатну площину, перпендикулярну до вісі α_3, перепишемо (10) у вигляді

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3|x|} \iint\limits_{S_\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda|x|\alpha_3} \frac{\partial}{\partial\alpha_3} [\tilde{A}_2(y, \alpha) + E]^{-1} d\alpha_3. \quad (11)$$

Під внутрішнім інтегралом в (11) маємо аналітичну функцію від α_3. Зсунемо шлях інтегрування з дійсної вісі комплексної площини α_3 в верхню півплощину, замінивши його контуром l, паралельним дійсній вісі півплощи α_3 і віддаленим від цієї вісі на $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \mathrm{const}$, фіксовано і достатньо мало). На контурі l маємо $\alpha_3 = \tilde{\alpha}_3 + i\varepsilon$ ($\tilde{\alpha}_3$ — дійсне). Отже, одержимо

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{ie^{-\lambda\varepsilon|x|}}{(2\pi)^3|x|} \iint\limits_{S_\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int\limits_{l} e^{i\lambda|x|\tilde{\alpha}_3} \frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_3} [\tilde{A}_2(y, \varepsilon; \tilde{\alpha}) + E]^{-1} d\tilde{\alpha}_3.$$

[1] Подібні оцінки були одержані Д. П. Мельник в її кандидатській дисертації, Львів.

Замінивши x на $x-y$, маємо оцінку

$$g_0(x-y, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|}\right), \tag{12}$$

справедливу як при великих $|x-y|$, так і при наближенні x до y.

Відмітимо, що матрицю $g_0(x-y, y; \lambda)$ можна неперервно диференціювати по x скільки завгодно разів при $x \neq y$, а по y стільки ж, скільки неперервно диференційовні коефіцієнти $A_{ij}(y)$ $(i, j=1, 2, 3)$. Виходячи з (11) і повністю повторюючи міркування, проведені при виведенні оцінки (12) для матриці $g_0(x, y; \lambda)$, одержимо оцінки для похідних по x матриці $g_0(x-y, y; \lambda)$, замінивши у відповідних оцінках похідних матриці $g_0(x, y; \lambda)$ x на $x-y$. Отже, одержимо[1]

$$\frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_j} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^3}\right) \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{13}$$

При наближенні точки x до точки y маємо ще й слідуючу оцінку

$$\frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial y_j} = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \quad (j=1, 2, 3). \tag{14}$$

Для матриць з точковою особливістю справедлива слідуюча оцінка, що відіграє дуже велику роль надалі.[2]

Якщо в області Ω маємо для матриць $L(x,z)$ і $N(z,y)$ оцінки

$$L(x, z) = O\left(\frac{1}{|x-z|^{\alpha}}\right), \quad N(z, y) = O\left(\frac{1}{|z-y|^{\beta}}\right), \qquad (\alpha, \beta < 3).$$

а при $x \neq z$ матриця $L(x,z)$ і при $z \neq y$ матриця $N(z,y)$ неперервні по сукупності аргументів, то

$$M(x, y) = \iiint\limits_{\Omega} L(x, z) N(z, y)\, dz = O\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta-3}}\right), \tag{15}$$

причому цей інтеграл збігається абсолютно.

4. Переходимо тепер до побудови фундаментальної матриці $g(x, y; \lambda)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$. Згідно [1], матриця $g(x, y; \lambda)$ розшукується у вигляді

$$g(x, y; \lambda) = g_0(x-y, y; \lambda) + g_1(x, y; \lambda). \tag{16}$$

де $g_0(x-y, y; \lambda)$ — визначена в цілому D_∞ (а тому і в $\overline{\Omega} \subset D_\infty$) фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$, а

[1] Можна твердити, що оцінки (12), (13) справедливі в цілому D_∞ з єдиним у всіх оцінок фіксованим $\varepsilon > 0$.

[2] Цю оцінку див., напр., в [3], стор. 28.

$$g_1(x, y; \lambda) = \iiint\limits_{\Omega} g_0(x - z, z; \lambda)\, h(z, y; \lambda)\, dz. \tag{17}$$

Матриця $h(z, y; \lambda)$ підлягає визначенню. $h(z, y; \lambda)$ достатньо гладка при $z \neq y$ і має при наближенні z до y оцінку $h(z, y; \lambda) = O\left(\frac{1}{|z-y|^{\alpha}}\right)$, $\alpha < 3$.

Матрицю $h(z, y; \lambda)$ треба підібрати так, щоб в силу означення фундаментальної матриці

$$\left\{A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right\} g(x, y; \lambda) = 0. \qquad (x \neq y)$$

Для перевірки справедливості останньої рівності припадає двічі диференціювати по x (при $x \neq y$) інтеграл (17). При цьому з допомогою оцінок (12), (13), (14), (15) і враховуючи одну з властивостей фундаментальної матриці, ми одержуємо, позначивши

$$\left\{A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right\} g_0(x - y, y; \lambda) = -P(x, y; \lambda),$$

слідуючу систему інтегральних рівнянь для визначення матриці h:

$$h(x, y; \lambda) = P(x, y; \lambda) + \iiint\limits_{\Omega} P(x, z; \lambda)\, h(z, y; \lambda)\, dz. \tag{18}$$

Визначивши матрицю $h(x, y; \lambda)$ як розв'язок системи рівнянь (18), ми, згідно (16), знайдемо фундаментальну матрицю $g(x, y; \lambda)$.

З допомогою (12) і (13) легко доводиться, що

$$P(x, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda_3 |x-y|}}{|x-y|^2}\right). \tag{19}$$

Приймаючи до уваги оцінку (19), доведемо, що при великих значеннях параметру λ можна до системи рівнянь (18) застосувати метод послідовних наближень (цей метод для систем інтегральних рівнянь викладено в роботі М. Манда [4], див пункт 1), і вона, таким чином, розв'язана за першою теоремою Фредгольма. Саме в силу цієї обставини фундаментальна матриця $g(x, y; \lambda)$ розшукується у вигляді (16) без додаткового доданка. Отже, фундаментальна матриця $g(x, y; \lambda)$ побудована.

Вкажемо тепер оцінки для матриць $g_1(x, y; \lambda)$ і $g(x, y; \lambda)$.

Виходячи з (19), легко одержуємо оцінки для ітерованих ядер, і, таким чином і для резольвенти $R^*(x, y; \lambda)$ системи (18). Виявляється, що

$$R^*(x, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda_3 |x-y|}}{|x-y|^2}\right).$$

Але резольвента сама задовольняє системі інтегральних рівнянь (див.

[4], стор. 338), з допомогою якої, враховуючи (18), ми приходимо до висновку, що $R^*(x, y; \lambda) = h(x, y; \lambda)$.

Одержавши оцінку для $h(x, y; \lambda)$, з (17) з допомогою (12) маємо

$$|g_1(x, y; \lambda)| \leqslant C_1 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}(|\ln|x-y|| + 1). \tag{20}$$

З (16), враховуючи (12) і (20), знайдемо

$$|g(x, y; \lambda)| \leqslant \frac{C e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|}. \tag{21}$$

$(C,\ C_1 = \mathrm{const})$.

5. В цьому пункті ми розглянемо систему рівнянь без параметра, відповідну раніш розглянутій системі (2), тобто систему

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x), \tag{22}$$

побудуємо фундаментальну матрицю $g(x, y)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і одержимо оцінки для частин цієї матриці. Міркування, які тут проводяться, являються в дуже значній мірі повторенням попередніх міркувань.

Матриця $g(x, y)$ розшукується у вигляді

$$g(x, y) = g_0(x-y, y) + g_1(x, y), \tag{23}$$

де $g_0(x-y, y)$ є фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, а

$$g_1(x, y) = \iiint\limits_{\Omega} g_0(x-z, z)\, h(z, y)\, dz.$$

Матриця $h(z, y)$ знаходиться як розв'язок системи інтегральних рівнянь Фредгольма. Матриця $g_0(x-y, y)$ має вигляд

$$g_0(x-y, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y,\alpha)} A_2^{-1}(y, \alpha)\, d\alpha. \tag{24}$$

(Матриця $A_2^{-1}(y, \alpha)$ існує в силу еліптичності оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ для кожної точки $y \in \Omega$ і довільної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$. Причому

$$A_2^{-1}(y, \alpha) = O\left(\frac{1}{|\alpha|^2}\right).$$

Міркування, подібні попереднім, приводять нас до слідуючих оцінок:

$$g_0(x-y, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right); \tag{25}$$

$$|g_1(x, y)| \leqslant \tilde{C}_1(|\ln|x-y|| + 1), \quad \tilde{C}_1 = \mathrm{const}, \tag{26}$$

Для самої матриці $g(x, y)$ маємо з (23), (25), (26) оцінку

$$|g(x, y)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{|x-y|}, \quad \tilde{C} = \text{const}, \tag{27}$$

що відповідає означенню цієї матриці.

6. Для системи рівнянь (22) ставиться гранична задача типу Діріхле, тобто задача

$$\begin{cases} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x) & (x \in D) \quad \text{(I)} \\ \qquad u(x) = 0 & (x \in S). \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Розв'язок задачі (I)—(II), як це доведено Я. Б. Лопатинським [5], представляється у вигляді

$$u(x) = \iiint\limits_{D} G(x, y)\, \Phi(y)\, dy, \tag{28}$$

де $G(x, y)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою (II). Матриця $G(x, y)$ розшукується у вигляді

$$G(x, y) = g(x, y) - a(x, y), \tag{29}$$

де $g(x, y)$ є визначена формулою (23) фундаментальна матриця системи (22), а матриця $a(x, y)$ знаходиться як розв'язок задачі

$$\begin{cases} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) a(x, y) = 0 & (x \in D) \quad (\alpha) \\ \qquad a(x, y) = g(x, y) & (x \in S) \quad (\beta) \end{cases}$$

Задача (α)—(β) розв'язана в [6] шляхом зведення до системи регулярних інтегральних рівнянь, з якої випливає, що

$$a(x, y) = \iint\limits_{S} H(x, z)\, g(z, y)\, d_z S. \tag{30}$$

В [6] показано, що справедлива оцінка

$$H(x, z) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{2-\varkappa}}\right),$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$ є показник в умові Ляпунова для поверхні S.

З (30) на підставі останньої оцінки і (27) одержується з допомогою (15) оцінка

$$a(x, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{1-\varkappa}}\right). \tag{31}$$

Таким чином, для матриці Гріна (29) маємо оцінку

$$G(x, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right). \tag{32}$$

7. Розглянемо тепер граничну задачу типу Діріхле для системи рівнянь (2), тобто задачу

$$\begin{cases} \left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) & (x \in D) \qquad (\mathrm{I}') \\ u(x) = 0 & (x \in S). \qquad (\mathrm{II}') \end{cases}$$

Розв'язок задачі (I′)—(II′) в силу (28) представляється у вигляді

$$u(x) = -\lambda^2 \iiint\limits_D G(x, y) u(y) dy + \iiint\limits_D G(x, y) \Phi(y) dy, \qquad (33)$$

де $G(x, y)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою (II), раніш визначена формулою (29). Нехай $R(x, y; \lambda)$ — резольвента системи інтегральних рівнянь (33). Для всякого значення $-\lambda^2$, що не є власним значенням $\lambda_к$ задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_к(x) = -\lambda_к u_к(x) \quad (x \in D), \qquad u_к(x) = 0 \quad (x \in S)$$

системи рівнянь (33) має одинаковий розв'язок виду (див. [4], стор. 338)

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x, y) \Phi(y) dy -$$

$$- \lambda^2 \iiint\limits_D R(x, z; \lambda) \left\{ \iiint\limits_D G(z, y) \Phi(y) dy \right\} dz,$$

звідки з допомогою системи інтегральних рівнянь для резольвенти маємо

$$u(x) = \iiint\limits_D R(x, y; \lambda) \Phi(y) dy. \qquad (34)$$

Отже, розв'язок задачі (I′)—(II′) представляється у вигляді (34). З іншої сторони, розв'язок цієї задачі представляється у вигляді

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x, y; \lambda) \Phi(y) dy, \qquad (35)$$

де $G(x, y; \lambda)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ з граничною умовою (II′).

Дійсно, аналогічно (29) розшукуємо матрицю Гріна у вигляді

$$G(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda), \qquad (36)$$

де $g(x, y; \lambda)$ є визначена формулою (16) фундаментальна матриця системи (2), а матриця $a(x, y; \lambda)$ підлягає визначенню. Таким чином, доведення законності представлення (35) полягає в розв'язуванні задачі

$$\begin{cases} \left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^3 E\right] a(x, y; \lambda) = 0 & (x \in D) \quad (\gamma) \\ a(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) & (x \in S) \quad (\delta) \end{cases}$$

Але задача (γ)—(δ) по суті нічим не відрізняється від задачі (α)—(β), розглянутої в пункті 6, тому що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ відрізняється від оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ лише вільним членом.

Отже, справедливість формули (35) доведена.

З (34) і (35), враховуючи, що $\Phi(y)$ — довільний, достатньо гладкий стовпець, випливає, що $R(x, y; \lambda) = G(x, y; \lambda)$. Тому матриця Гріна задовольняє слідуючим системам інтегральних рівнянь

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint_D G(x, z; \lambda) G(z, y)\, dz;$$

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint_D G(x, z) G(z, y; \lambda)\, dz. \tag{37}$$

Відмітимо на закінчення, що розв'язок задачі (γ)—(δ) ми одержуємо, повторюючи міркування пункту 6 у вигляді

$$a(x, y; \lambda) = \iint_S H(x, z; \lambda)\, g(z, y; \lambda)\, d_z S, \tag{38}$$

де для фундаментальної матриці $g(z, y; \lambda)$ справедлива оцінка (21). Для матриці $H(x, z; \lambda)$ маємо оцінку

$$|H(x, z; \lambda| \leqslant \frac{C(\lambda)}{|x - z|^{2-\varkappa}}, \tag{39}$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$ і функція $C(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda \to \infty$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леви Э. Э. Усп. мат. наук, VIII, 1940.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, 71, № 3, стор. 433—436, 1950.
3. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. III, № 1, стор. 3—38, 1951.
4. Mendes M. Jornal de Math. pur, et. appl., 32, Série 9, № 4, стор. 335—386, 1953.
5. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, № 2, стор. 107—112, 1956.
6. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, № 2, стор. 5—9, 1956.