Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ФУНКЦІЙ ЗАДАЧ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Нехай D конечна область n-вимірового простору Евкліда D_∞, обмежена поверхнею S типу Ляпунова.* Далі розглядається диференціальний оператор вигляду

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x); \qquad A_{ij}(x) = A_{ji}(x),$$

коефіцієнти якого є дійсними функціональними квадратними матрицями порядку 3, визначеними для значень $x = (x_1, x_2, x_3)$ з деякої конечної області Ω $(\overline{D} \subset \Omega)$ і достатньо гладкі в цій області.

Припускається, що

α) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є оператор еліптичного типу, тобто для кожної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ і довільного $x \in \Omega$

$$\det A_2(x, \alpha) = \det \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \right\} \neq 0.$$

β) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є варіаційний оператор від додатньо визначеного функціоналу.

В цих припущеннях, використовуючи метод Т. Карлємана [1], будуть одержані асимптотичні вирази власних значень λ_κ і власних функцій (стовпців) $u_\kappa(x)$ задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x \in D), \quad u_\kappa(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{1}$$

1. З припущення β) випливає, що для значень $\lambda \in [0, +\infty)$ задача

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{2}$$

(E — одинична матриця, $\Phi(x)$ — достатньо гладкий відомий стовпець) однозначно розв'язна. Покажемо це.

---

* Всі результати цієї роботи вірні при $n \geqslant 2$, для простоти запис ведеться для $n=3$.

Розглянемо білінійну форму (всюди в подальшому штрих при функціональному стовпці або матриці означає транспонування).

$$B(u, v)=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u'}{\partial x_i}B_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{3}u' C_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u'}{\partial x_i}C'_i(x)v-u' B_0(x)v, \quad (3)$$

причому в силу припущення $B(u, v)=B(v, u)$ маємо $B_{ij}(x)=B'_{ji}(x)$; $B_0(x)=B'_0(x)$. Нехай далі функціонал $\iiint\limits_D B(u, v)\,dx$ додатньо визначений. Зокрема для стовпця u, що дає мінімум цьому функціоналу, маємо

$$I(u)=\iiint\limits_D B(u, u)\,dx>0. \quad (4)$$

Складаючи варіаційну систему Ейлера для функціоналу $I(u)$, одержимо в силу умови β)

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ji}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(C'_i(x)u)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}C_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+B_0(x)u. \quad (5)$$

Звідки випливає, що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є самоспряжений. З допомогою (3) і (5) і застосувавши формулу Остроградського, одержимо аналог першої формули Гріна для варіаційного оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ у вигляді

$$\iiint\limits_D\left\{u' A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u+B(u, u)\right\}dx=$$

$$=\iint\limits_S\left\{\sum_{i,j=1}^{3}u' B_{ij}(z)\frac{\partial u}{\partial z_j}\cos(n, z_i)+\sum_{i=1}^{3}u' C'_i(z)u\cos(n, z_i)\right\}d_z S. \quad (6)$$

Нехай, від супротивного, задача (2) має два розв'язки $u_1(x)\neq u_2(x)$. Тоді $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ є розв'язком задачі

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^2 E\right]u(x)=0 \quad (x\in D), \quad u(x)=0 \quad (x\in S).$$

Застосувавши формулу (6) до розв'язку $u(x)$ останньої задачі, одержимо

$$\lambda^2\iiint\limits_D u'(x)u(x)\,dx=-\iiint\limits_D B(u, u)dx.$$

Враховуючи (4), ми одержуємо при $\lambda\in[0, +\infty)$ протиріччя, яке доводить твердження. Таким чином, доведено, що всі одержані в [2] результати справедливі, зокрема і для класу еліптичних систем, що розглядаються в цій роботі. Ми скористаємось в подальшому позначеннями й результатами [2].

2. В [2] розглядалась гранична задача (2). Була побудована матриця Гріна

$$G(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda) = g_0(x-y; \lambda) + g_1(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda)$$

цієї задачі і розв'язок самої задачі представлено з допомогою матриці $G(x, y; \lambda)$. При цьому одержані оцінки

$$|g_0(x-y, y; \lambda)| \leqslant \frac{C_0 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|};$$

$$|g_1(x, y; \lambda)| \leqslant C_1 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}(|\ln|x-y|| + 1),$$

де $\varepsilon > 0$ фіксоване достатньо мале число і C_0, $C_1 = \text{const}$. Далі

$$a(x, y; \lambda) = \iint\limits_S H(x, z; \lambda)\, g(z, y; \lambda)\, d_z S$$

і справедливі оцінки

$$|g(z, y; \lambda)| \leqslant \frac{Ce^{-\lambda\varepsilon|z-y|}}{|z-y|}; \quad |H(x, z; \lambda)| \leqslant \frac{C(\lambda)}{|x-z|^{2-\varkappa}}$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$, $C = \text{const}$ і $C(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda \to \infty$.

В роботі [2] розглядалась також гранична задача

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \qquad u(x) = 0 \quad (x \in S). \tag{7}$$

Була побудована матриця Гріна

$$G(x, y) = g(x, y) - a(x, y) = g_0(x-y, y) + g_1(x, y) - a(x, y)$$

цієї задачі і розв'язок задачі (7) було представлено з допомогою побудованої матриці $G(x, y)$. Були одержані оцінки

$$|g_0(x-y, y)| \leqslant \frac{\widetilde{C}_0}{|x-y|}; \quad |g_1(x, y)| \leqslant \widetilde{C}_1(|\ln|x-y|| + 1);$$

$$|G(x, y)| \leqslant \frac{C^*}{|x-y|}; \qquad |a(x, y)| \leqslant \frac{C_2}{|x-y|^{1-\varkappa}},$$

де $\widetilde{C}_0$, $\widetilde{C}_1$, C^*, $C_2 = \text{const}$. Доказано також, що $G(x, y; \lambda)$ є резольвента ядра $G(x, y)$.

Застосувавши формулу типу другої формули Гріна для самоспряженого оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ми доводимо, як звичайно, симетрію матриці Гріна: $G(x, y) = G'(y, x)$. Але у випадку симетричного ядра відомий розклад резольвенти за власними функціями (стовпцями) ядра*. Маємо

* Див. [3], стор. 366. Тут — матричний запис.

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x) u'_\kappa(y)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)},$$

де λ_κ — власні значення, а $u_\kappa(x)$ — повна ортонормована система власних функцій (стовпців) ядра $G(x, y)$ або, що те саме, власні значення і функції (стовпці) задачі (1).

Таким чином, з допомогою системи інтегральних рівнянь для резольвенти $G(x, y; \lambda)$ (див. в [2] формули (37)) одержимо

$$\Psi(x; \lambda) = \iiint_D G(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz =$$

$$= \iiint_D G(x, z) G(z, x; \lambda)\, dz = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x) u'_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)}. \tag{8}$$

3. Доведемо, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(x; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{D_\infty} \{[A_2(x, \alpha)] [A_2(x, \alpha) + E]\}^{-1} d\boldsymbol{\alpha}. \tag{9}$$

Перш за все покажемо, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(x; \lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_0(z - x, x)\, dz. \tag{10}$$

Доведення рівності (10) зводиться до доведення того, що при $\lambda \to \infty$ (і рівномірно відносно $x \in D_i$, де $\overline{D_i} \subset D$ — будь-яка підобласть D)

$$1) \left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_1(z, x)\, dz \right| \to 0,$$

$$2) \left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) a(z, x)\, dz \right| \to 0,$$

$$3) \left| \lambda \iiint_D g_1(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz \right| \to 0,$$

$$4) \left| \lambda \iiint_D a(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz \right| \to 0.$$

Співвідношення 1)—4) доведемо з допомогою вказаних в пункті 2 оцінок. Маємо

$$\left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_1(z, x)\, dz \right| \leqslant \lambda C_0 \widetilde{C}_1 \iiint_{D_\infty} \frac{e^{-\lambda \varepsilon |x - z|}}{|x - z|} (|\ln |x - z|| + 1) dz =$$

$$= 4\pi\lambda C_0 \widetilde{C}_1 \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho} \rho (\ln \rho + 1)\, d\rho.$$

(Ми перейшли до сферичних координат з центром в точці x). Обчислюючи останній інтеграл частинами, одержимо

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}\varrho(\ln\varrho+1)\,d\varrho=\frac{1}{\lambda\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}(\ln\varrho+2)\,d\varrho=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2\varepsilon^2}-\frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}(C+\ln\lambda\varepsilon),$$

де C — постійна Ейлера. Отже, при $\lambda\to\infty$

$$\left|\lambda\iiint_D g_0(x-z,x;\lambda)\,g_1(z,x)\,dz\right|\leqslant\frac{4\pi C_0\widetilde{C}_1}{\lambda\varepsilon^2}\{2-(C+\ln\lambda\varepsilon)\}\to 0.$$

Точно до такого ж інтегралу ми приходимо при доведенні співвідношення 3). Таким чином, справедливість 1) і 3) доведена. Діючи аналогічно попередньому, маємо

$$\left|\lambda\iiint_D g_0(x-z,x;\lambda)\,a(z,x)\,dz\right|\leqslant\lambda C_0C_2\iiint_{D_\infty}\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-z|}}{|x-z|^{2-\varkappa}}\,dz=$$

$$=4\pi C_0C_2\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}\varrho^\varkappa\,d\varrho.$$

Але відомо, що $\int_0^\infty e^{-qx}x^{p-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{q^r}$, де Γ — функція Ейлера $p>-1$, а q може бути й комплексним з $Req>0$. В нашому випадку маємо

$$\left|\lambda\iiint_D g_0(x-z,x;\lambda)\,a(z,x)\,dz\right|\leqslant 4\pi C_0C_2\frac{\Gamma(\varkappa+1)}{(\lambda\varepsilon)^{\varkappa+1}}\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty,$$

бо $0<\varkappa\leqslant 1$. Отже, справедливість співвідношення 2) також доведена.

Переходимо до доведення 4). Маємо

$$I=\left|\lambda\iiint_D a(x,z;\lambda)\,G(z,x)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\iiint_D\left\{\iint_S|H(x,t;\lambda)|\,|g(t,z;\lambda)|\,d_tS\right\}|G(z,x)|\,dz\leqslant$$

$$\leqslant\lambda C_1(\lambda)\iint_S\frac{d_tS}{|x-t|^{2-\varkappa}}\iiint_D\frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz,$$

де $C_1(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda\to\infty$. Навколо біжучої точки t, границі S області D опишемо дві кулі: одну D_μ з деяким малим радіусом μ, вибір якого буде далі уточнено, другу D_R радіусом R, яка обіймає область D. Маємо далі

$$I\leqslant\lambda C_1(\lambda)\iint_S\frac{d_tS}{|x-t|^{2-\varkappa}}\left\{\iiint_{D_R-D_\mu}+\iiint_{D_\mu}\right\}\frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz. \qquad (*)$$

Розглянемо інтеграл по кулі D_μ. Вводячи сферичні координати з центром в точці t, одержимо

$$\iiint\limits_{D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon\rho}}{|x-z|}\,\varrho d\varrho \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\Theta \int\limits_0^{\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon\rho}}{|x-z|}\,\varrho d\varrho.$$

Будемо вважати радіус μ настільки малим, щоб під час інтегрування по D_μ $|x-z|>\delta$, де $\delta>\mu$. Тоді одержимо

$$\iiint\limits_{D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz < \frac{2\pi^2}{\delta}\int\limits_0^{\mu} e^{-\lambda\varepsilon\rho}\,\varrho d\varrho = -\frac{2\pi^2}{\delta}\left[\frac{\mu}{\lambda\varepsilon}e^{-\lambda\varepsilon\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}\left(e^{-\lambda\varepsilon\mu}-1\right)\right]. \tag{**}$$

Розглянемо інтеграл по $D_R - D_\mu$. Застосувавши нерівність Буняковського, одержуємо

$$\iiint\limits_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz \leqslant \sqrt{\iiint\limits_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-2\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|}\,dz}\,\sqrt{\iiint\limits_{D_R} \frac{dz}{|z-x|^2}}.$$

Маємо далі оцінку

$$\iiint\limits_{D_R} \frac{dz}{|z-x|^2} \leqslant \iiint\limits_{\widetilde{D}} \frac{dz}{|z-x|^2} < K^2,$$

де $\widetilde{D}$ — будь-яка достатньо велика куля, що вміщує будь-яку кулю радіусом R з центром в першій-ліпшій точці $t \in S$. Далі

$$\left|\iiint\limits_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-2\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|^2}\,dz\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int\limits_{\mu}^{R} e^{-2\lambda\varepsilon\rho}\,d\varrho\right| \leqslant \frac{\pi^2}{\lambda\varepsilon}\left(e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - e^{-2\lambda\varepsilon R}\right).$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz \leqslant \frac{K\pi}{\sqrt{\lambda\varepsilon}}\sqrt{e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - e^{-2\lambda\varepsilon R}}. \tag{***}$$

Підставляючи значення інтегралів з (**) і (***) в (*), одержимо

$$I \leqslant C_1(\lambda)\left\{\frac{K\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - \lambda e^{-2\lambda\varepsilon R}} - \frac{2\pi^2}{\delta}\left[\frac{\mu}{\varepsilon_1}e^{-\lambda\varepsilon\mu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda\varepsilon^2}\left(e^{-\lambda\varepsilon\mu} - 1\right)\right]\right\}\iint\limits_S \frac{d_t S}{|t-x|^{2-\varkappa}}.$$

Тому при $\lambda \to \infty$ $I \to 0$ і 4) доведено. Отже, справедливість формули (10) доведена. Доведемо тепер (9). Матриці

$$g_0(x-y, y; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y,\alpha)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1} d\alpha;$$

$$g_0(x-y, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y,\alpha)} [A_2(y, \alpha)]^{-1} d\alpha,$$

побудовані в [2], можна розглядати, як трансформації Фурьє відповідно від матриць $[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}$ і $[A_2(y, \alpha)]^{-1}$. Як відомо*

$$\iiint\limits_{D_\infty} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} \left\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + \lambda^2 E] \right\}^{-1} d\alpha.$$

Замінимо в останньому інтегралі змінні $\alpha = \lambda\tilde{\alpha}$. Одержимо, переопозначивши для спрощення запису $\tilde{\alpha}$ знову через α,

$$\iiint\limits_{D_\infty} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 \lambda} \iiint\limits_{D_\infty} \left\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha. \qquad (11)$$

Легко показати, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \iiint\limits_{D_\infty - D} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz = 0. \qquad (12)$$

Дійсно, з допомогою оцінок, вказаних в пункті 2, маємо при $\lambda \to \infty$

$$\left| \lambda \iiint\limits_{D_\infty - D} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz \right| \leqslant \lambda C_0 \tilde{C}_0 \iiint\limits_{D_\infty - D_1} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-z|}}{|x-z|^3}\, dz =$$

$$= \lambda C_0 \tilde{C}_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int\limits_{R_1}^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon\rho} d\rho = \frac{4\pi C_0 \tilde{C}_0}{\varepsilon} e^{-\lambda\varepsilon R_1} \to 0.$$

(Ми замінили область D найбільшою кулею $D_1 \leqslant D$ радіусом R_1 і потім перейшли до сферичних координат з центром в точці x). З (10), (11), (12) безпосередньо випливає справедливість формули (9).

На підставі (8) і (9) одержуємо

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x)\, u'_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} \{[A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E]\}^{-1} d\alpha.$$

* Див. [4], стор. 98, де відповідна формула вказана для одновимірового випадку. Формула аналогічна в багатовимірovому просторі.

Взявши сліди цих матриць і переопозначивши λ^2 через λ, одержимо

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa+\lambda)}=\frac{C^*(x)}{4\pi}, \tag{13}$$

де введені слідуючі позначення

$$Sp u_\kappa(x)\,u'_\kappa(x)=u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)=a_\kappa(x),$$

$$C^*(x)=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\left\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\right\}^{-1}d\alpha. \tag{14}$$

Формула (13) відіграє в дальшому важливу роль.

4. Покажемо, що власні значення λ_κ задачі (1) додатні. Застосувавши до розв'язку $u_\kappa(x)$ задачі (1) формулу (6), одержимо

$$\lambda_\kappa\iiint\limits_D u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\,dx=\iiint\limits_D B(u,u)\,dx.$$

Враховуючи (4), ми приходимо до висновку, що $\lambda_\kappa>0$.

Використання формули (13) для виводу асимптотичних виразів власних значень і функцій (стовпців) задачі (1) засновано на слідуючій теоремі типу Таубера (див. [5], стор. 703—704 і стор. 706—715).

Якщо ряд

$$s(\lambda)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{c_\kappa}{\lambda_\kappa+\lambda},\qquad (c_\kappa\geqslant 0,\ \lambda_\kappa>0),$$

де $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots,\ \lambda_n\to\infty$ збігається при $\lambda>0$ і $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\ s(\lambda)=H$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}c_\kappa=\frac{2H}{\pi}$, причому в останній сумі підсумовування поширюється на ті значення κ, для яких $\lambda_\kappa\leqslant\lambda$. Застосуємо цю теорему до ряду (13). У нас $c_\kappa=\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}$, $H=\frac{C^*(x)}{4\pi}$. Тому $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}\frac{a_\kappa(x)}{4\pi}=$ $=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}$. Або, що те саме,

$$\Phi(x;\lambda)\equiv\sum_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda}+\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}, \tag{15}$$

причому $\varepsilon(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Якщо взяти в (15) $\lambda=\lambda_n$, то одержимо

$$\sigma_n(x)=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda_n}+\varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}, \tag{16}$$

де $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Функція $\Phi(x;\lambda)$ неспадна функція від λ, причому

$$\Phi(x;\lambda)=0 \text{ при } \lambda<\lambda_1 \text{ і } \Phi(x;\lambda)=\sigma_m(x) \text{ при } \lambda_m\leqslant\lambda<\lambda_{m+1}. \tag{17}$$

Виведемо асимптотичні вирази для $\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x)$ і для λ_n при великих n. З допомогою перетворення Абеля маємо

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x) = \sigma_1(x)(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(x)(\lambda_2 - \lambda_3) + \\ + \cdots + \sigma_{n-1}(x)(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \sigma_n(x)\lambda_n. \tag{18}$$

Функція $\Phi(x; \lambda) = \frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}$ інтегровна по λ по будь-якому конечному проміжку, і, таким чином, другий доданок правої частини також інтегровна функція. В силу (15) і (17) одержуємо

$$\int_0^{\lambda_n} \Phi(x; \lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_1(x)\, d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \sigma_2(x)\, d\lambda + \cdots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \sigma_{n-1}(x)\, d\lambda.$$

Таким чином

$$\sigma_1(x)(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(x)(\lambda_3 - \lambda_2) + \cdots + \sigma_{n-1}(x)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \\ = \frac{C^*(x)}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda. \tag{19}$$

Легко показати, що при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \to 0. \tag{20}$$

Дійсно, нехай $\delta > 0$ задане число. Фіксуємо p настільки великим, щоб мати $|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \delta$ при $\lambda_n \geqslant \lambda_p$. Ми знаходимо

$$\left| \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\, d\lambda + \frac{2}{3}\delta(\lambda_n^{3/2} - \lambda_p^{3/2}). \qquad (n > p)$$

Звідки випливає, що

$$\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \frac{2}{3}\delta + \left[\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)|\sqrt{\lambda}\, d\lambda - \frac{2\delta\lambda_p^{3/2}}{3\lambda_n^{3/2}} \right].$$

При достатньо великих n вираз в квадратних дужках за абсолютною величиною $\leqslant \frac{1}{3}\delta$, тобто $\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \delta$ при великих n. Звідки і випливає (20), тобто $\int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda = \varepsilon'_n \lambda_n^{3/2}$, причому $\varepsilon'_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу (19) маємо

$$\sigma_1(x)(\lambda_2-\lambda_1)+\sigma_2(x)(\lambda_3-\lambda_2)+\cdots+\sigma_{n-1}(x)(\lambda_n-\lambda_{n-1})=$$
$$=\frac{C^*(x)}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon'_n\lambda_n^{3/2}.$$

Підставивши останнє в (18) з допомогою (16), одержимо

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x)=\frac{C^*(x)}{6\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon''_n\lambda_n^{3/2}, \tag{21}$$

причому $\varepsilon''_n\to 0$ при $n\to\infty$. Таким чином, враховуючи позначення (14), ми одержуємо слідуючий асимптотичний вираз для власних функцій (стовпців) задачі (1):

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)u_\kappa(x)\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\cdot\lambda_n^{3/2}. \tag{22}$$

Інтегруючи (21) по x в області D і враховуючи ортонормованість власних стовпців і позначення (14), одержуємо асимптотичний вираз для власних значень λ_n задачі (1)

$$n\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint_{D}\left\{\iiint_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\right\}dx\,\lambda_n^{3/2}. \tag{23}$$

Зокрема, коли коефіцієнти вихідного оператора $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ постійні, формула (22) і формула (23) приймають відповідно вигляд

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)u_\kappa(x)\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint_{D_\infty} Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\,\lambda_n^{3/2}, \tag{24}$$

$$n\sim\frac{V}{12\pi^4}\iiint_{D_\infty} Sp\{A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)+E]\}^{-1}d\alpha\,\lambda_n^{3/2}, \tag{25}$$

де V об'єм області D. Установлення формул (22), (23), а також (24), (25) і було метою цієї роботи.

Для фактичних підрахунків за формулами (22), (23) доцільно спочатку спростити інтеграл по D_∞ в цих формулах. Перейдемо в цьому інтегралі до сферичних координат з центром в початку і покладемо потім $\alpha=\varrho\alpha_0$, де α_0 є орт α. Тоді одержимо (переопозначивши α_0 через α)

$$\iiint_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\,Sp\iint_{|\alpha|=1}[A_2(x,\alpha)]^{-1}\,dS\int_{-\infty}^{+\infty}[\varrho^2 A_2(x,\alpha)+E]^{-1}\,d\varrho,$$

де dS є елемент поверхні одиничної сфери. Для обчислення внутрішнього інтегралу в останньому виразі застосуємо теорію лишків. В силу того, що кожний елемент матриці $[\varrho^2A_2(x,\alpha)+E]^{-1}$ є аналітична функція від ϱ в цілій верхній півплощині, включаючи дійсну вісь за винятком конечного числа полюсів, а безмежно віддалена точка є нуль другого порядку, то, як відомо, має місце формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\varrho^2 A_2(x,\alpha)+E]^{-1}d\varrho=2\pi i\,\Sigma\,\mathrm{res}\,[\varrho^2 A_2(x,\alpha)+E]^{-1}, \tag{26}$$

де $\Sigma\mathrm{res}[\varrho^2 A_2(x,a)+E]^{-1}$ є сума лишків відносно полюсів, що лежать в верхній півплощині. Таким чином,

$$\iiint_{D_\infty} Sp\,\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha=$$

$$=\pi i\iint_{|\alpha|=1}\Sigma\,\mathrm{res}\,Sp\,\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)\varrho^2+E]\}^{-1}\,dS.$$

Підставляючи значення останнього інтегралу в (22) і (23), ми одержуємо слідуючі розрахункові формули:

$$\sum_{\kappa=r}^{n}u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\sim$$

$$\sim\frac{i}{12\pi^3}\iint_{|\alpha|=1}\Sigma\,\mathrm{res}\,Sp\,\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)\varrho^2+E]\}^{-1}\,dS\,\lambda_n^{3/2}; \tag{27}$$

$$n\sim\frac{i}{12\pi^3}\iiint_{D}\left\{\iint_{|\alpha|=1}\Sigma\,\mathrm{res}\,Sp\,\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2x,\alpha)\varrho^2+E]\}^{-1}\,dS\right\}dx\,\lambda_n^{3/2}. \tag{28}$$

А у випадку постійних коефіцієнтів вихідного оператора маємо з (24), (25) відповідно

$$\sum_{\kappa=1}^{n}u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\sim\frac{i}{12\pi^3}\iint_{|\alpha|=1}\Sigma\,\mathrm{res}\,Sp\,\{[A_2(\alpha)][A_2(\alpha)\varrho^3+E]\}^{-1}\,dS\,\lambda_n^{3/2}, \tag{29}$$

$$n\sim\frac{iv}{12\pi^3}\iint_{|\alpha|=1}\Sigma\,\mathrm{res}\,Sp\,\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]\}^{-1}\,dS\,\lambda_n^{3/2}. \tag{30}$$

5. Розглянемо важливий окремий випадок. Нехай

$$A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{3}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+a_0(x)$$

одинокий еліптичний оператор. В цьому пункті будуть одержані, виходячи з формул (22), (23), асимптотичні вирази для власних значень і функцій задачі

$$A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\kappa(x)=-\lambda_\kappa u_\kappa(x)\quad(x\epsilon D),\quad u_\kappa(x)=0\quad(x\epsilon S). \tag{31}$$

Нехай $a(x,a)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j$. В силу еліптичності оператора $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ квадратична форма $a(x,a)$ додатньо визначена для всіх $x\epsilon\overline{D}$. Нехай

$A(x)$ — матриця, складена з коефіцієнтів $a_{ij}(x)$, $\triangle(x)$ — визначник цієї матриці. Інтеграл, що входить в (22), (23), перепишеться так:

$$\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)+E]\}^{-1} d\alpha = \iiint\limits_{D_\infty} \frac{d\alpha}{a(x, \alpha)[a(x, \alpha)+1]}.$$

Форму $a(x, \alpha)$ можна записати слідуючим способом: $a(x, \alpha) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j = \alpha' A(x)\alpha$. Замінимо в останньому інтегралі змінні, поклавши $\alpha = P\xi$, де ξ — стовбець нових змінних, а P — деяка матриця порядку 3, вибір якої буде уточнено далі. Тоді одержимо $a(x, \alpha) = \xi' P' A(x) P\xi$. Виберемо матрицю P так, щоб $P'A(x)P = E$ (такий вибір матриці P при умові $\det P \neq 0$ завжди можна зробити, якщо $\det A(x) \neq 0$). Тоді $a(x, \alpha) = \xi'\xi = |\xi|^2$. Далі $d\alpha = |\det P| d\xi$, але тому що $\det P = \det P'$, то $\det P = \frac{\pm 1}{\sqrt{\triangle(x)}}$ і, таким чином, $d\alpha = \frac{d\xi}{\sqrt{\triangle(x)}}$. Отже

$$\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)+E]\}^{-1} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\triangle(x)}} \iiint\limits_{D_\infty} \frac{d\xi}{|\xi|^2(|\xi|^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\triangle(x)}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^2+1} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\triangle(x)}}. \tag{32}$$

З (22) і (23) одержимо з допомогою (32) асимптотичні вирази власних значень і функцій розглядуваної задачі (31) у вигляді

$$\sum_{\kappa=1}^{n} [u_\kappa(x)]^2 \sim \frac{1}{6\pi^3\sqrt{\triangle(x)}} \lambda_n^{3/2}; \quad \lambda_n \sim \left[\frac{1}{6\pi^3} \iiint\limits_D \frac{dx}{\sqrt{\triangle(x)}}\right]^{-2/3} \cdot n^{2/3}$$

Остання формула являє собою результат Т. Карлемана (див. в [1] теорему VI) для самоспряженого рівняння.

З формул (22) і (23) випливають також результати Ф. Браудера [6] для випадку рівняння другого порядку. Покажемо це.

Маємо еліпсоїд $a(x, \alpha) = 1$. Його об'єм є $\iiint\limits_{a(x, \alpha)<1} d\alpha.$

Для вираження цього об'єму безпосередньо через півосі еліпсоїда приведемо квадратичну форму до канонічного виду

$$a(x, \alpha) = a(x, \xi) = N_1(x)\xi_1^2 + N_2(x)\xi_2^2 + N_3(x)\xi_3^2.$$

В силу додатньої визначеності форми $N_1(x) > 0$, $N_2(x) > 0$, $N_3(x) > 0$ для всіх $x \in \overline{D}$. Легко перевірити, що $N_1(x)N_2(x)N_3(x) = \det A(x) = \Delta(x)$. Але об'єм еліпсоїда $N_1(x)\xi_1^2 + N_2(x)\xi_2^2 + N_3(x)\xi_3^2 = 1$ складає

$$\frac{4}{3}\pi \frac{1}{\sqrt{N_1(x)N_2(x)N_3(x)}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\triangle(x)}} = \iiint\limits_{a(x, \alpha)<1} d\alpha. \tag{33}$$

В силу (32) і (33) маємо

$$\frac{1}{12\pi^4}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{6\,\pi^2\sqrt{\triangle(x)}}=\frac{1}{8\pi^3}\,\frac{4\pi}{3\sqrt{\triangle(x)}}=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha.$$

Підставляючи останній вираз в (22) і (23), одержимо асимптотичні вирази власних значень і функцій задачі (31) у вигляді

$$\sum_{\kappa=1}^{n}[u_\kappa(x)]^2\sim\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\,\lambda_n^{3/2};\qquad n\sim\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{D}\left\{\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\right\}dx\,\lambda_n^{3/2}$$

Дві останні формули одержані Ф. Браудером.

6. Як приклад, знайдемо асимптотичні вирази для власних значень і власних вектор-функцій задачі типу Діріхле для системи рівнянь теорії пружності (рівняння Ламе для ізотропного та однорідного пружного тіла). Отже, розглянемо задачу

$$\mu A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\kappa(x)=-\lambda_\kappa u_\kappa(x)\quad(x\epsilon D),\quad u(x)=0\quad(x\epsilon S),\tag{34}$$

де

$$\mu A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv\mu\begin{pmatrix}\tau+1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\tau+1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\mu\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\tau+1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+$$

$$+\mu\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\tau\\0&\tau&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3}+\mu\begin{pmatrix}0&0&\tau\\0&0&0\\\tau&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3}+\mu\begin{pmatrix}0&\tau&0\\\tau&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\,.$$

(тут $\tau=\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$; λ,μ — постійні Ламе. Відмітимо, що замість $\lambda>0$, $\mu>0$ часто вводять постійні $a=\lambda+2\mu$, $b=\mu$). Скористуємось розрахунковими формулами (29), (30), бо коефіцієнти оператора $\mu A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ постійні. Обчислимо

$$Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\,\varrho^2+E]\}^{-1}=Sp\,[A_2(\alpha)]^{-1}\,[A_2(\alpha)\,\varrho^2+E]^{-1}.$$

При обчисленнях будемо враховувати, що $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$. В нашому випадку $A_2(\alpha)=\mu A(\alpha)$ і безпосередній підрахунок дає:

$$Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\,\varrho^2+E]\}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\mu(\tau+1)}\cdot\frac{(3+4\tau+2\tau^2)\,\mu^2\varrho^4+(6+6\tau+2\tau^2)\,\mu\varrho^2+(3+2\tau)}{(1+\tau)\,\mu^3\varrho^6+(3+2\tau)\,\mu^2\varrho^4+(3+\tau)\,\mu\varrho^2+1}\,.$$

Як неважко підрахувати, одержимо

$$\sum\operatorname{res}Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\,\varrho^2+E]\}^{-1}=\frac{2(1+\tau)\sqrt{1+\tau}+1}{2i\,\mu\sqrt{\mu}\,(1+\tau)\sqrt{1+\tau}}$$

або, вводячи постійні a, b, маємо

$$\sum \operatorname{res} Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2 + E]\}^{-1} = \frac{1}{2i}(a^{-3/2} + 2b^{-3/2}).$$

Підставляючи останнє в (29), (30) і враховуючи, що $\iint\limits_{|\alpha|=1} dS = 4\pi$, знаходим

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)\, u_\kappa(x) \sim \frac{1}{6\pi^2}(a^{-3/2} + 2b^{-3/2})\,\lambda_n^{3/2}.$$

Ця формула являє собою результат А. Плежеля (див. [7], стор. 75).

$$n \sim \frac{V}{6\pi^2}(a^{-3/2} + 2b^{-3/2})\,\lambda_n^{3/2}.$$

Остання формула є результат Г. Вейля (див. [8], формула (70)). Тут V об'єм області D, зайнятої пружним тілом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carleman T. Berichte Verhandl. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 88, 1936, стор. 119—132.
2. Драпкін А. Б. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, 1957.
3. Mendes M. Jornal de Math. pur et appl., 32 Série 9, № 4, 1953, стор. 335—386.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
6. Browder F. Comptes rendus Acad. Sci., 236, № 22, 1953, стор. 2140—2142.
7. Pleijel A. Arkiv för matem., astr. och. fysik, 27A, № 13, 1940 стор. 1—100.
8. Weyl H. Rendiconti Circolo mat. Palermo, 39, 1915 стор. 1—50.