Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Ця замітка примикає до роботи [1] позначення і результати якої тут використовуються. Буде доведено, що одержана в [1] асимптотична формула (23) залишається справедливою і для задачі

$$\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x \in D), \quad u_\kappa(x) = 0 \quad (x \in S), \tag{1}$$

де оператор $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ являє собою суму розглянутого в [1] варіаційного оператора від додатньо визначеного функціоналу $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і оператора

$$A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0^*(x).$$

(Матриці $A_i^*(x)$, $A_0^*(x)$ мають відповідно ту саму гладкість, що й $A_i(x)$, $A_0(x)$). Припустимо, що для значень $\lambda \in [0, +\infty)$, задача

$$\left[\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S)$$

однозначно розв'язна.

При цьому всі результати пунктів 2 і 3 роботи [1], за винятком симетрії матриці Гріна і відповідного розкладу за власними функціями, залишаються справедливими.

Нехай $\tilde{G}(x, y; \lambda)$ є матриця Гріна оператора $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ з граничною умовою $\tilde{G}(x, y; \lambda) = 0$ $(x \in S)$, а $\tilde{G}(x, y)$ — матриця Гріна оператора $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою $\tilde{G}(x, y) = 0$ $(x \in S)$. Тоді

$$\tilde{\Psi}(x; \lambda) = \iiint_D \tilde{G}(x, z; \lambda) \tilde{G}(z, x)\, dz = \iiint_D \tilde{G}(x, z) \tilde{G}(x z; \lambda)\, dz;$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \iiint_D W(x; \lambda)\, dx = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_D \left\{ \iiint_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2(x, \alpha)] \, [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx, \tag{2}$$

де введено позначення $-\lambda^2 Sp \tilde{\Psi}(x; \lambda) = W(x; \lambda)$.

В силу доведеної Т. Карлеманом теореми (див. [2], стор. 122) і враховуючи, що систему інтегральних рівнянь можна, за І. Фредгольмом, трактувати як одно інтегральне рівняння, маємо

$$\frac{1}{\lambda}\iiint\limits_D W(x;\lambda)\,dx=\lambda\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-\lambda^2)}. \tag{3}$$

Тут λ_κ — власні значення задачі (1), або, що те саме, власні значення ядра $\tilde{G}(x, y)$. З (2) і (3) маємо (замінивши λ^2 на λ)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{1=\kappa}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-\lambda)}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iiint\limits_D W(x;\lambda)dx=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_D\left\{\iiint\limits_{D_\infty}S_p\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\right\}dx. \tag{4}$$

Через те, що оператор $\tilde{A}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ несамоспряжений, то λ_κ — взагалі комплексні числа, а власні функції (стовбці) $u_\kappa(x)$ — взагалі комплексні.

Існує нескінчена множина власних значень λ_κ. Дійсно, якби їх було конечне число, то ми мали б в (3) і в (4) конечну суму і, переходячи до границі при $\lambda\to\infty$, одержали б рівність нулю правої частини (4), що не можливо в силу доведеної в [1] формули (23).

Нехай $\lambda_\kappa=\xi_\kappa+i\eta_\kappa$ є власне значення, а $u_\kappa(x)$ — відповідний власний стовбець задачі (1). Власні стовбці вважаються ортонормованими. Маємо з (1)

$$\iiint\limits_D \bar{u}'_\kappa(x)\left[A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u_\kappa(x)\,dx+\lambda_\kappa=0.$$

Враховуючи, що оператор $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ є варіаційний і тому для нього справедлива формула (5) з [1], інтегруючи частинами і позначивши $(C_i(x)-A_i^*(x))'=D_i(x)$ і $B_0(x)+A_0^*(x)=E(x)$, одержуємо

$$\lambda_\kappa=\iiint\limits_D\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}B_{ij}(x)\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\,dx+\iiint\limits_D\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}C'_i(x)\,u_\kappa+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u'_\kappa}{\partial x_i}D_i(x)\bar{u}_\kappa+\bar{u}'_\kappa E(x)\,u_\kappa\right\}dx. \tag{5}$$

Внаслідок того, що оператор $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ варіаційний від додатньо визначеного функціоналу, то

$$\iiint\limits_D\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}B_{ij}(x)\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\,dx>\gamma\iiint\limits_D\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\right|^2dx=\gamma M, \tag{6}$$

де γ — додатня константа, і остання сума (фактично подвійна) розуміється як сума по всім j і по всім складовим стовбцям $\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}$.

Відділивши в (5) дійсну і уявну частини, одержимо з допомогою (6)

$$\xi_\kappa > c_1 M - c_2 ; \quad |\eta_\kappa| < c_3 \sqrt{M},$$

де c_1, c_2, c_3 — додатні константи, і остання нерівність одержана з допомогою нерівності Буняковського. Таким чином

$$M < \frac{1}{c_1}(\xi_\kappa + c_2); \quad |\eta_\kappa| < c_3 \sqrt{\frac{\xi_\kappa + c_2}{c_1}}.$$

Отже, всі власні значення λ_κ задачі (1) лежать всередині параболи $\eta^2 = \kappa_0(\xi - \xi_0)$, $\kappa_0 > 0$, де ξ_κ, η_κ суть координати точки в площині комплексного змінного λ_κ. Останнє твердження для одинакового еліптичного рівняння доведено в [2] Т. Карлеманом, якому ми в точності слідуємо в дальшому. З (3), замінивши там λ^2 на λ, маємо, бо $\lambda_\kappa = \xi_\kappa + i\eta_\kappa$

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_\kappa(\xi_\kappa - z)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda - z)} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi_\kappa(\xi_\kappa - z)} - \frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa - z)} \right) =$$

$$= \frac{1}{z} \iiint\limits_D W(x; z)\, dx + g(z). \tag{7}$$

Будемо вважати, що ξ_κ впорядковані за неспадаючою величиною. Через те, що ряд $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_\kappa^2} = C$ збігається, існує таке δ, що $\frac{\kappa}{\xi_\kappa^2} < \delta$. Буквально повторюючи відповідні викладки з [2], одержимо для $r > 0$

$$g(-r) = \frac{c'\,\Theta(r)}{\sqrt[4]{r}} f(-r) + \frac{c'\,\Theta(r)\, C^{3/4}\, \delta^{1/4}}{r^{3/4}},$$

де c' незалежна від κ і r постійна, а функція $\Theta(r)$ така, що $|\Theta(r)| \leqslant 1$. Підставивши останнє в (7) і перейшовши до границі при $r \to \infty$, одержимо в силу (4) слідуюче асимптотичне представлення для $f(-r)$:

$$f(-r) \sim \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{r}} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx.$$

Застосуємо тепер до ряду (7), сума якого має тільки що вказане асимптотичне представлення, слідуючу теорему типу Таубера, доведену в [2] (див. стор. 120).

Нехай a_κ і ξ_κ дійсні числа, задовольняючі умовам $a_\kappa \geqslant 0$, $\xi_\kappa > \xi_0$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$. Нехай далі ряд $f(z) = \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{a_\kappa}{\xi_\kappa - z}$ для $z < \xi_0$ збігається.

Якщо $f(-r)$ має при $r \to \infty$ асимптотичне представлення $f(-r) \sim \frac{A}{r^\alpha}$, де $0 < \alpha < 1$ і A дійсна константа, то

$$\sum_{\xi_\kappa < y} a_\kappa \sim \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi\alpha}{1 - \alpha} y^{1-\alpha},$$

причому в останній сумі підсумовування поширюється на ті значення κ, для яких $\xi_\kappa \leqslant y$.

В нашому випадку

$$\alpha_\kappa = \frac{1}{\xi_\kappa}; \ \alpha = \frac{1}{2}; \ A =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2 x, \alpha)] [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx. \tag{8}$$

Отже, одержимо

$$M(y) = \sum_{\xi_\kappa < y} \frac{1}{\xi_\kappa} \sim \frac{2A}{\pi} \sqrt{y}.$$

Позначимо через $N(y)$ число власних значень λ_κ, для яких $Re \lambda_\kappa = \xi_\kappa < y$. Очевидно, маємо

$$N(y) = \sum_{\xi_\kappa < y} 1 = \int_0^y t dM(t) = yM(y) - \int_0^y M(t) dt \sim \frac{2A}{3\pi} y^{3/2}.$$

Поклавши в останньому $y = \xi_n$, одержимо $n \sim \frac{2A}{3\pi} \xi_n^{3/2}$. Але тому, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n} = 1$, бо $\eta_n \sim \sqrt{\xi_n}$, то $\xi_n \sim \lambda_n$, і тому, враховуючи позначення (8), маємо

$$n \sim \frac{1}{12\pi^4} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2(x, \alpha)] [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} \cdot dx \lambda_n^{3/2}. \tag{9}$$

Встановлення формули (9) ї було метою цієї замітки.

Отже, враховуючи доведене в [1] (див. пункт 5), ми можемо твердити, що результат Т. Карлемана і для одинокого несамоспряженого еліптичного рівняння випливає з (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Драпкін А. Б. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, вип. 8, 1957.

2. Carleman T. Berichte Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 88, 1936, стор. 119—132.